BAB III

METODE *RECURSIVE LEAST SQUARE*

Pada bab ini akan dikemukakan secara rinci apa yang menjadi inti permasalahan dalam tulisan ini, yaitu penaksiran parameter koefisien persamaan regresi menggunakan metode *Recursive Least Square* dan pengujian kecocokan model persamaan regresi pada metode *Recursive Least Square*.

3.1 Pendahuluan

Pollock dalam bukunya *Time-Series Analysis Signal processing and Dynamics* menyatakan bahwa teori penaksiran *Least Square* pertama kali ditemukan oleh Gauss, namun Penemuan kembali yang pertama pada tahun 1950 oleh Plackett, sebelum kehadiran perhitungan elektronik *on-line* yang efisien, dan ini juga hampir terlewatkan. Penemuan kedua algoritma *recursive* pada tahun 1960, dalam konteks teori kontrol, mendapat perhatian yang sangat besar pada teori ini. Teori ini ditemukan pada kumpulan dokumen-dokumen Kalman dan Kalman *and* Bucy.

3.2 Penaksiran Koefisien Persamaan Regresi Linear Berganda dengan Menggunakan Metode *Recursive Least Square*

Sebelumnya telah dikenal penaksiran koefisien persamaan regresi dengan menggunakan metode *Least Square* untuk menaksir koefisien β pada model

$$Y(n) = \beta_0(n) + \beta_1 X_1(n) + \beta_2 X_2(n) + \cdots + \beta_k X_k(n) + \varepsilon(n) \tag{3.1}$$

untuk berbagai nilai n. Persamaan (3.1) dapat dituliskan oleh notasi matriks

$$\mathbf{Y} = \mathbf{X\beta} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

dengan

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ \vdots \\ y(n) \end{bmatrix} \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_1(1) & X_2(1) & \dots & X_k(1) \\ X_1(2) & X_2(2) & \dots & X_k(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ X_1(n) & X_2(n) & \dots & X_k(n) \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{bmatrix}$$

$X_k{}'(n) = [X_1(n), X_2(n), \dots, X_k(n)]$ adalah vektor baris k koefisien yang diambil pada saat data ke-n, kemudian sebuah informasi pengamatan baru, pada saat $n+1$ yaitu $Y(n+1)$ dengan persamaan:

$$Y(n+1) = \beta_0(n+1) + \beta_1 X_1(n+1) + \beta_2 X_2(n+1) + \cdots + \beta_k X_k(n+1)$$

$$X_k{}'(n) = [X_1(n), X_2(n), \dots, X_k(n)] \tag{3.2}$$

yang menghendaki penaksir *Least square* $\hat{\beta}$ seperti pada persamaan (2.13) ditinjau kembali.

Dengan menggunakan metode *Recursive Least Square* dapat dihitung solusi baru dengan melibatkan solusi awal dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Menentukan nilai $X_n'Y_n$ dari persamaan *Least Square* awal

$$\hat{\beta}_n = \left(X_n'X_n\right)^{-1} X_n'Y_n$$

$$\left(X_n'X_n\right)\hat{\beta}_n = \left(X_n'X_n\right)\left(X_n'X_n\right)^{-1} X_n'Y_n$$

$$\left(X_n'X_n\right)\hat{\beta}_n = X_n'Y_n \tag{3.3}$$

2. Menentukan nilai $X_n^{'}Y_n$ baru yang dilambangkan dengan $\overline{X}_n^{'}\overline{Y}_n$

Jika λ adalah suatu faktor pembobot dengan $0 < \lambda < 1$, untuk $t = 1,2,\dots,n$ digunakan untuk mengurangi pengaruh data lama (Haykin, 2002), sehingga dapat dituliskan:

$$X_n\sqrt{\lambda^{n-t}} = \overline{X}_n^{'} \quad \text{dan} \quad Y_n\sqrt{\lambda^{n-t}} = \overline{Y}_n^{'}$$

maka persamaan (3.3) dapat dituliskan kembali sebagai:

$$\hat{\beta}_n = \left(\overline{X}_n^{'}\overline{X}_n\right)^{-1}\overline{X}_n^{'}\overline{Y}_n \tag{3.5}$$

sehingga

$$\left(\overline{X}_n^{'}\overline{X}_n\right)\hat{\beta}_n = \overline{X}_n^{'}\overline{Y}_n \tag{3.6}$$

3. Menentukan nilai $\hat{\beta}_{n+1}$

Dengan memisalkan $M_n = \overline{X}_n^{'}\overline{X}_n$ dan $q_n = \overline{X}_n^{'}\overline{Y}_n$, persamaan (3.6) ditulis sebagai:

$$M_n\hat{\beta}_n = q_n \tag{3.7}$$

Didefinisikan pula $M_{n+1} = \overline{X}_{n+1}^{'}\overline{X}_{n+1}$ dengan bentuk:

$$\begin{aligned} M_{n+1} &= \lambda M_n + X_i^{'}(n+1)X_i(n+1) \\ \lambda M_n &= M_{n+1} - X_i^{'}(n+1)X_i(n+1) \end{aligned} \tag{3.8}$$

dan

$$q_{n+1} = \lambda q_n + X_i^{'}(n+1)Y(n+1) \tag{3.9}$$

sehingga persamaan untuk menaksir $\hat{\beta}$ yang memuat data baru dapat dituliskan:

$$M_{n+1}\hat{\beta}_{n+1} = q_{n+1}$$

$$\hat{\beta}_{n+1} = M_{n+1}^{-1}q_{n+1} \tag{3.10}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.7) kedalam persamaan (3.9) diperoleh:

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \lambda q_n + X_i'(n+1)Y(n+1) \\ &= \lambda M_n\hat{\beta}_n + X_i'(n+1)Y(n+1) \end{aligned} \tag{3.11}$$

Persamaan (3.8) disubstitusikan kedalam persamaan (3.10) diperoleh

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= \left(M_n - X_i'(n+1)X_i(n+1)\right)\hat{\beta}_n + X_i'(n+1)Y(n+1) \\ &= M_{n+1}\hat{\beta}_n - X_i'\hat{\beta}_n(n+1)X_i(n+1) + X_i'(n+1)Y(n+1) \\ &= M_{n+1}\hat{\beta}_n + X_i'(n+1)\left[Y(n+1) - X_i(n+1)\hat{\beta}_n\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

sehingga

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{n+1} &= M_{n+1}^{-1}q_1 \\ &= M_{n+1}^{-1}\left[M_{n+1}\hat{\beta}_n + X_i'(n+1)\left(Y(n+1) - X_i(n+1)\hat{\beta}_n\right)\right] \\ &= \hat{\beta}_n + M_{n+1}^{-1}X_i'(n+1)\left[Y(n+1) - X_i(n+1)\hat{\beta}_n\right] \end{aligned} \tag{3.13}$$

Taksiran terbaru akan menghasilkan $\hat{\beta}_{n+1}$ berbeda dari taksiran $\hat{\beta}_n$ sebelumnya dengan sebuah fungsi galat $g(n+1) = Y(n+1) - X_i(n+1)\hat{\beta}_n$.

Beban penghitungan dapat lebih dipermudah dengan menerapkan sebuah skema untuk menghitung matriks invers M_{n+1}^{-1} yang dilakukan dengan memodifikasi nilai M_n^{-1}. Skema ini didasarkan pada Lemma Matriks Inversi yang memberikan invers pada penjumlahan matriks.

Lemma 3.1 (Lemma Matriks Inversi)

Jika

$$A = C'DC + B \tag{3.14}$$

maka

$$A^{-1} = B^{-1} - B^{-1}C' \left(CB^{-1}C' + D^{-1}\right)^{-1} CB^{-1} \tag{3.15}$$

dengan B dan D adalah matriks non singular.

<u>Bukti</u>:

Diketahui: $A = C'DC + B$. Untuk memperoleh invers, kalikan penjumlahan awal matriks A dengan A^{-1} dilanjutkan dengan mengalikan pada bagian akhir dengan B^{-1}, diperoleh

$$A^{-1}A = A^{-1}\left(C'DC + B\right)$$

$$I = A^{-1}C'DC + A^{-1}B$$

$$IB^{-1} = (A^{-1}C'DC + A^{-1}B)B^{-1}$$

$$B^{-1} = A^{-1}C'DCB^{-1} + A^{-1}BB^{-1}$$

$$B^{-1} = A^{-1}C'DCB^{-1} + A^{-1} \tag{3.16}$$

Kemudian kalikan persamaan (3.16) dengan C', diperoleh:

$$B^{-1}C' = \left(A^{-1}C'DCB^{-1} + A^{-1}\right)C'$$

$$= A^{-1}C'DCB^{-1}C' + A^{-1}C'$$

$$= A^{-1}C'DCB^{-1}C' + A^{-1}C'DD^{-1}$$

$$B^{-1}C' = A^{-1}C'D(CB^{-1}C' + D^{-1}) \tag{3.17}$$

Kalikan kedua ruas persamaan (3.17) dengan $\left(CB^{-1}C' + D^{-1}\right)^{-1}$, sehingga diperoleh:

$$B^{-1}C'\left(CB^{-1}C' + D^{-1}\right)^{-1} = A^{-1}C'D\left(CB^{-1}C' + D^{-1}\right)\left(CB^{-1}C' + D^{-1}\right)^{-1}$$

$$= A^{-1}C'D \tag{3.18}$$

Persamaan (3.14) dapat dituliskan kembali:

$$A = C'DC + B \tag{3.19}$$

$$A^{-1} = (C'DC + B)^{-1}$$

Persamaan (3.16) dapat dituliskan kembali:

$$B^{-1} = A^{-1}C'DCB^{-1} + A^{-1}$$

$$A^{-1} = B^{-1} - A^{-1}C'DCB^{-1} \tag{3.20}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.17) kedalam persamaan (3.20), sehingga diperoleh:

$$A^{-1} = B^{-1} - B^{-1}C'\left(CB^{-1}C' + D^{-1}\right)^{-1} CB^{-1} \tag{3.21}$$

Sehingga Lemma Matriks Inversi pada persamaan (3.15) terbukti.

Lemma Matriks Inversi dapat digunakan untuk bentuk M_{n+1}^{-1}. Persamaan (3.8) dapat dituliskan:

$$M_{n+1}^{-1} = \left(\lambda M_n + X_i'(n+1)X_i(n+1)\right)^{-1} \tag{3.22}$$

Jika $A = M_{n+1}, B = \lambda M_n, C = X_i(n+1), D = 1$ maka dengan mensubstitusikan persamaan (3.21), dapat dituliskan bentuk dari M_{n+1}^{-1}, yaitu:

$$M_{n+1}^{-1} = (\lambda M_n)^{-1} - [(\lambda M_n)^{-1}X_i'(n+1)\left(X_i(n+1)(\lambda M_n)^{-1}X_i'(n+1) + 1\right)^{-1} X_i(n+1)(\lambda M_n)^{-1}] \tag{3.23}$$

Dengan mensubstitusikan persamaan (3.22) dan persamaan (3.23) kedalam persamaan (3.18), diperoleh:

$$\left(\lambda M_n + X_i'(n+1)X_i(n+1)\right)^{-1} X_i'(n+1) = (\lambda M_n)^{-1}X_i'(n+1)(X_i(n+1) (\lambda M_n)^{-1}X_i'(n+1) + 1)^{-1} \tag{3.24}$$

Sehingga persamaan (3.10) dapat dituliskan sebagai:

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + M_{n+1}^{-1}X_i'(n+1)\left[Y(n+1) - X_i(n+1)\hat{\beta}_n\right]$$

$$= \hat{\beta}_n + \left[(\lambda M_n)^{-1}X_i'(n+1)(X_i(n+1)(\lambda M_n)^{-1}X_i'(n+1)+1)\right][Y(n+1)$$

$$-X_i(n+1)\hat{\beta}_n]$$

$$\hat{\beta}_{n+1} = \hat{\beta}_n + k(n+1)\left[Y(n+1) - X_i(n+1)\hat{\beta}_n\right] \tag{3.25}$$

dengan $k(n+1) = (\lambda M_n)^{-1}X_i'(n+1)(X_i(n+1)(\lambda M_n)^{-1}X_i'(n+1)+1)$

3.3 Pengujian Kecocokan Model Persamaan Regresi Linear Berganda pada Metode *Recursive Least Square*

Dalam tugas akhir ini, pengujian yang akan dilakukan adalah:

1. Menguji setiap koefisien persamaan regresi yang bertujuan untuk mengetahui apakah nilai-nilai koefisien tersebut memiliki pengaruh yang signifikan sehingga dapat diambil langkah efektif dengan menambah atau mengurangi variabel-variabel bebas yang digunakan untuk model regresi berganda. Langkah-langkah pengujian tersebut sebagai berikut:

   a. Perumusan Hipotesis

   $$H_0: \beta_i = 0 \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

   $$H_1: \beta_i \neq 0 \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

   b. Besaran-Besaran yang diperlukan

   Menghitung nilai s_b

   c. Statistik Uji

   $$t = \frac{b - b_0}{s_b}$$

   d. Kriteria Pengujian

   Dengan mengambil taraf signifikansi α, maka:

$$H_0 \text{ diterima jika } -t_{1-\alpha/2, n-1} < t_0 < t_{1-\alpha/2, n-1}$$

dengan $t_{1-\alpha/2, n-1}$ diperoleh dari Tabel Distribusi t dengan peluang $1 - \alpha/2$ dan derajat kebebasan (dk) = n-1.

e. Kesimpulan

Penafsiran dari ditolak atau diterima.

2. Pengujian pengaruh variabel bebas secara bersama-sama terhadap variabel terikat. Langkah-langkah pengujian tersebut sebagai berikut:

a Perumusan Hipotesis

$$H_0: \beta_i = 0 \qquad i = 0,1,2,\ldots,n$$

H_1: salah satu tanda "=" tidak berlaku

b Besaran-Besaran yang diperlukan

$$JK_{reg} = a_i \sum_{1}^{n} x_{1i}y_i + a_2 \sum_{1}^{n} x_{2i}y_i + \cdots + a_k \sum_{1}^{n} x_{ki}y_i$$

$$JK_{res} = \sum_{1}^{n} (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

c Statistik Uji

$$F = \frac{JK_{reg}/k}{JK_{res}/(n-k-1)}$$

d Kriteria Pengujian

Dengan mengambil taraf nyata α, maka:

H_0 ditolak jika $F_{hitung} > F_{\alpha,k,n-k-1}$.

dengan $F_{\alpha,1,n-2}$ diperoleh dari Tabel Distribusi F dengan peluang = α, dk pembilang = k, dan dk penyebut = n-k-1.

e Kesimpulan

Penafsiran dari H_0 ditolak atau diterima.

3. Model regresi linear berganda dapat disebut sebagai model yang baik, jika model tersebut memenuhi beberapa asumsi yang kemudian disebut dengan asumsi klasik. Proses pengujian asumsi klasik dilakukan bersama dengan proses uji persamaan regresi, sehingga langkah-langkah yang dilakukan dalam pengujian asumsi klasik menggunakan langkah kerja yang sama dengan uji regresi. Pengujian asumsi regresi klasik, yaitu:

a. Pengujian Normalitas

Pengujian normalitas ini bertujuan untuk menguji apakah dalam model regresi, galat atau residual memiliki distribusi normal. Seperti diketahui, bahwa uji t dan uji F mengasumsikan bahwa nilai residual mengikuti distribusi normal. Jika asumsi ini dilanggar maka uji statistik menjadi tidak valid untuk jumlah sampel kecil.

b. Pengujian Autokorelasi

Pengujian autokorelasi bertujuan untuk menguji apakah dalam model regresi linear ada korelasi antara galat pada periode t dengan kesalahan pengganggu pada periode t-1 (sebelumnya), jika terjadi korelasi, maka dinamakan ada masalah autokorelasi. Autokorelasi muncul karena observasi yang berurutan sepanjang waktu berkaitan satu sama lainnya. Masalah ini timbul karena galat (kesalahan pengganggu) tidak bebas dari satu observasi ke observasi lainnya. Model regresi yang baik seharusnya tidak terjadi autokorelasi.

c. Pengujian Heteroskedastisitas

Pengujian heteroskedastisitas bertujuan menguji apakah dalam model regresi terjadi ketidaksamaan variansi dari residual satu pengamatan ke pengamatan yang lain. Jika variansi dari galat satu pengamatan ke pengamatan lain tetap, maka disebut homoskedastisitas dan jika berbeda disebut heteroskedastisitas.

d. Pengujian Multikolinearitas

Pengujian multikolinearitas bertujuan untuk menguji apakah model regresi ditemukan adanya korelasi antar variabel bebas. Model regresi yang baik seharusnya tidak terjadi korelasi diantara variabel bebas. Jika variabel bebas saling berkorelasi, maka variabel-variabel ini tidak ortogonal. Variabel ortogonal adalah variabel bebas yang nilai korelasi antar sesama variabel independen sama dengan nol.