BAB III

THREE STAGE LEAST SQUARE

Sebagaimana telah disinggung pada bab sebelumnya, salah satu metode penaksiran parameter pada persamaan simultan yaitu metode *Three Stage Least Square* (3SLS). Sebelum dijelaskan lebih lanjut mengenai metode ini, akan dipaparkan lebih dahulu mengenai Persamaan Simultan.

3.1 Persamaan Simultan

3.1.1 Sifat Dasar Model Persamaan Simultan

Model persamaan simultan adalah suatu model yang mengandung lebih dari satu persamaan yang saling mempengaruhi. Ciri khas dari model persamaan simultan adalah variabel tak bebas dalam suatu persamaan muncul sebagai variabel yang menjelaskan dalam persamaan lain dalam model. Dalam model ini, sejumlah persamaan membentuk suatu sistem persamaan yang menggambarkan ketergantungan di antara berbagai variabel dalam persamaan-persamaan tersebut.

Terdapat dua jenis variabel dalam model persamaan simultan, yaitu:

1. Variabel endogen, yaitu variabel-variabel yang nilainya ditentukan dalam model.
2. Variabel predetermin, yaitu variabel-variabel yang nilainya ditentukan di luar model.

Variabel endogen bersifat stokastik, sedangkan variabel predetermin bersifat nonstokastik. Variabel predetermin dibagi dalam dua kategori, yaitu variabel eksogen baik yang merupakan eksogen sekarang (*current exogeneous*) maupun eksogen waktu lampau (*lagged exogeneous*), dan variabel endogen waktu lampau (*lagged endogeneeous*).

Secara umum bentuk struktural dari sebuah model persamaan simultan di mana semua variabel muncul pada setiap persamaan dapat dituliskan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
Y_{t1} &= \alpha_{21}Y_{t2} + \alpha_{31}Y_{t3} + \ldots + \alpha_{m1}Y_{tm} + \beta_{11}X_{t1} + \beta_{21}X_{t2} + \ldots + \beta_{1k}X_{kt} + \varepsilon_{t1} \\
Y_{t2} &= \alpha_{12}Y_{t1} + \alpha_{32}Y_{t3} + \ldots + \alpha_{m2}Y_{tm} + \beta_{12}X_{t1} + \beta_{22}X_{t2} + \ldots + \beta_{2k}X_{kt} + \varepsilon_{t2} \qquad (3.1.1) \\
&\vdots \\
Y_{tm} &= \alpha_{1m}Y_{t1} + \alpha_{2m}Y_{t2} + \ldots + \alpha_{(m-1)m}Y_{t(m-1)} + \beta_{1m}X_{t1} + \beta_{2m}X_{t2} + \ldots + \beta_{km}X_{tk} + \varepsilon_{tm}
\end{aligned}$$

Di mana Y_{tM} = variabel endogen dengan M = 1, ..., m

X_{tK} = variabel predetermin dengan K = 1, ..., k

α = parameter variabel endogen

β = parameter variabel predetermin

ε = variabel error

t = banyaknya observasi total (1, ..., n)

Model (3.1.1) secara implisit menganggap bahwa variabel-variabel endogen adalah saling tergantung. Model tersebut mempunyai m variabel endogen dengan k variabel predetermin dan n observasi.

Untuk menaksir parameter pada persamaan simultan tidak mungkin menaksir parameter untuk masing-masing persamaan tanpa memperhitungkan informasi yang diberikan oleh persamaan lain dalam sistem.

Jika parameter dari tiap persamaan ditaksir dengan metode O*rdinary Least Square* (OLS) secara langsung maka penaksir tidak hanya bias tetapi juga tidak konsisten, yaitu penaksir tidak mengarah pada nilai sebenarnya berapapun besar sampel yang diberikan. Hal ini dikarenakan salah satu asumsi penting dari metode OLS yaitu bahwa variabel yang menjelaskan bersifat nonstokastik atau jika bersifat stokastik didistribusikan secara bebas dari variabel error dimana hal ini tidak terpenuhi dalam persamaan simultan.

3.1.2 Bentuk Struktural dan Bentuk yang Direduksi dari Model Persamaan Simultan

Persamaan pada sebuah model persamaan simultan disebut sebagai persamaan struktural dan parameter-parameternya dikenal sebagai koefisien struktural atau parameter struktural.

Dari sebuah persamaan struktural dapat diturunkan bentuk yang direduksi (*reduced form*) yaitu suatu persamaan yang menyatakan suatu variabel endogen dengan hanya memperhatikan variabel-variabel predetermin dan variabel error. Jumlah persamaan pada bentuk yang direduksi sama dengan jumlah variabel endogen dalam model.

Seperti yang telah dikemukakan sebelumnya bahwa secara umum bentuk struktural dari sebuah model persamaan simultan di mana semua variabel muncul pada setiap persamaan dapat dituliskan seperti pada persamaan (3.1.1). Variabel-variabel di ruas kiri pada persamaan tersebut mempunyai koefisien sama dengan satu dan jika variabel-variabel tersebut dipindahkan ke ruas kanan, koefisiennya berubah menjadi -1. Misalkan α_{mm} = -1 sehingga persamaan (3.1.1) menjadi:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}Y_{t1}+\alpha_{21}Y_{t2}+\ldots+\alpha_{m1}Y_{tm}+\beta_{11}X_{t1}+\beta_{21}X_{t2}+\ldots+\beta_{k1}X_{tk}+\varepsilon_{t1}=0\\
&\alpha_{22}Y_{t2}+\alpha_{12}Y_{t1}+\ldots+\alpha_{m2}Y_{tm}+\beta_{12}X_{t1}+\beta_{22}X_{t2}+\ldots+\beta_{k2}X_{tk}+\varepsilon_{t2}=0\\
&\vdots\\
&\alpha_{mm}Y_{tm}+\alpha_{1m}Y_{t1}+\ldots+\alpha_{(m-1)m}Y_{t(m-1)}+\beta_{1m}X_{t1}+\beta_{2m}X_{t2}+\ldots+\beta_{km}X_{tk}+\varepsilon_{tm}=0
\end{aligned}
\tag{3.1.2.1}
$$

Dengan memperhatikan seluruh observasi sebanyak n, model (3.1.2.1) menjadi:

$$
\begin{aligned}
&\alpha_{11}Y_{11}+\ldots+\alpha_{m1}Y_{1m}+\beta_{11}X_{11}+\ldots+\beta_{k1}X_{1k}+\varepsilon_{11}=0\\
&\vdots\\
&\alpha_{11}Y_{n1}+\ldots+\alpha_{m1}Y_{nm}+\beta_{11}X_{n1}+\ldots+\beta_{k1}X_{nk}+\varepsilon_{n1}=0\\
&\alpha_{12}Y_{11}+\ldots+\alpha_{m2}Y_{1m}+\beta_{12}X_{11}+\ldots+\beta_{k2}X_{1k}+\varepsilon_{12}=0\\
&\vdots\\
&\alpha_{12}Y_{n1}+\ldots+\alpha_{m2}Y_{nm}+\beta_{12}X_{n1}+\ldots+\beta_{k2}X_{nk}+\varepsilon_{n2}=0\\
&\vdots\\
&\alpha_{1m}Y_{11}+\ldots+\alpha_{mm}Y_{1m}+\beta_{1m}X_{11}+\ldots+\beta_{km}X_{1k}+\varepsilon_{1m}=0\\
&\vdots\\
&\alpha_{1m}Y_{n1}+\ldots+\alpha_{mm}Y_{nm}+\beta_{1m}X_{n1}+\ldots+\beta_{km}X_{nk}+\varepsilon_{nm}=0
\end{aligned}
\tag{3.1.2.2}
$$

Atau dapat diberikan dalam bentuk matriks, yaitu:

$$
\underset{(n\times m)}{\begin{pmatrix} Y_{11} & Y_{12} & \cdots & Y_{1m}\\ Y_{21} & Y_{22} & \cdots & Y_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Y_{n1} & Y_{n2} & \cdots & Y_{nm}\end{pmatrix}}
\underset{(m\times m)}{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm}\end{pmatrix}}
+
\underset{(n\times k)}{\begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & \cdots & X_{1k}\\ X_{21} & X_{22} & \cdots & X_{2k}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ X_{n1} & X_{n2} & \cdots & X_{nk}\end{pmatrix}}
\underset{(k\times m)}{\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m}\\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km}\end{pmatrix}}
$$

$$
+\underset{(n\times m)}{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1m}\\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{nm}\end{pmatrix}} = \underset{(n\times m)}{\mathbf{0}}
\tag{3.1.2.3}
$$

Atau

$$
Y\alpha + X\beta + \varepsilon = 0 \tag{3.1.2.4}
$$

di mana **Y** adalah matriks variabel endogen dengan orde (n x m)

α adalah matriks parameter variabel endogen dengan orde (m x m)

X adalah matriks variabel predetermin dengan orde (n x k)

β adalah matriks parameter variabel predetermin dengan orde (k x m)

ε adalah matriks variabel gangguan dengan orde (n x m)

0 adalah matriks nol dengan orde (n x m)

Model (3.1.2.4) mempunyai m variabel endogen sehingga bentuk reduksinya akan terdiri dari m persamaan. Diasumsikan bahwa matriks α merupakan matriks nonsingular sehingga bentuk reduksi dari model (3.1.2.4) didapat dengan mengalikan model tersebut dengan α^{-1} sehingga diperoleh:

$$Y(\alpha\ \alpha^{-1}) = X\beta(-\alpha^{-1}) + \varepsilon(-\alpha^{-1}) \qquad (3.1.2.5)$$

atau

$$YI = X\Pi + \eta \qquad (3.1.2.6)$$

di mana

$$\Pi = -\beta\alpha^{-1} = -\underset{(k\times m)}{\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km} \end{pmatrix}} \underset{(m\times m)}{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}^{-1}} = \underset{(k\times m)}{\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \cdots & \Pi_{1m} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \cdots & \Pi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{k1} & \Pi_{k2} & \cdots & \Pi_{km} \end{pmatrix}}$$

$$\eta = -\varepsilon\alpha^{-1} = -\underset{(n\times m)}{\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \cdots & \varepsilon_{1m} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \cdots & \varepsilon_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon_{n1} & \varepsilon_{n2} & \cdots & \varepsilon_{nm} \end{pmatrix}} \underset{(m\times m)}{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}^{-1}} = \underset{(n\times m)}{\begin{pmatrix} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1m} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \eta_{n1} & \eta_{n2} & \cdots & \eta_{nm} \end{pmatrix}}$$

Masing-masing persamaan pada bentuk yang direduksi adalah

$$Y_i = \Pi_i X_i + \eta_i \qquad (3.1.2.7)$$

di mana i menunjukkan baris ke-i matriks yang bersangkutan.

3.1.3 Masalah Identifikasi

Yang dimaksud dengan masalah identifikasi adalah apakah taksiran dari parameter persamaan struktural dapat diperoleh atau tidak. Jika taksiran parameter persamaan struktural dapat dihasilkan dari parameter bentuk yang direduksi maka persamaan tersebut dikatakan teridentifikasi (*identified)*, tapi jika tidak maka persamaan tersebut dikatakan tidak teridentifikasi (*unidentified*) atau kurang teridentifikasi (*underidentified)*.

Persamaan teridentifikasi terdiri dari dua tipe, yaitu teridentifikasi secara tepat (*exactly identified*) dan teridentifikasi berlebih (*overidentified*). Suatu persamaan dikatakan *exactly identified* jika nilai parameter struktural yang diperoleh adalah unik. Suatu persamaan dikatakan *overidentified* jika diperoleh lebih dari satu nilai untuk beberapa parameter struktural. Untuk lebih jelasnya berikut akan diberikan contoh mengenai masalah identifikasi tersebut.

a. Unidentified

Pertimbangkan model permintaan dan penawaran suatu komoditas, yaitu:

$Q_t^d = \beta_{01} + \alpha_{11} P_t + \varepsilon_{1t}$ (fungsi permintaan) (3.1.3.1)

$Q_t^s = \beta_{02} + \alpha_{21} P_t + \varepsilon_{2t}$ (fungsi penawaran) (3.1.3.2)

Dengan Q^d = jumlah permintaan komoditas

Q^s = jumlah penawaran komoditas

P = harga komoditas

ε = variabel error

t = 1, 2, ..., n = banyaknya observasi

α = parameter variabel endogen

β = parameter variabel predetermin

Keseimbangan pasar terjadi jika $Q^d_t = Q^s_t = Q_t$, dengan Q = jumlah komoditas, sehingga diperoleh keseimbangan pasar dan kuantitas masing-masing adalah

$$\beta_{01} + \alpha_{11}P_t + \varepsilon_{1t} = \beta_{02} + \alpha_{21}P_t + \varepsilon_{2t}$$
$$(\alpha_{11} - \alpha_{21})P_t = (\beta_{02} - \beta_{01}) + (\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})$$
$$P_t = \frac{(\beta_{02} - \beta_{01})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \frac{(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$$
$$P_t = \pi_0 + \mu_t \qquad (3.1.3.3)$$

dengan $\pi_0 = \frac{(\beta_{02} - \beta_{01})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$ dan $\mu_t = \frac{(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$

dengan mensubstitusikan nilai P_t pada (3.1.3.3) ke dalam (3.1.3.1) atau (3.1.3.2), kita mendapatkan kuantitas keseimbangan berikut ini:

$$Q_t = \beta_{01} + \alpha_{11}(\pi_0 + \mu_t) + \varepsilon_{1t}$$
$$Q_t = \beta_{01} + \alpha_{11}\pi_0 + \alpha_{11}\mu_t + \varepsilon_{1t}$$
$$Q_t = \beta_{01} + \alpha_{11}\frac{(\beta_{02} - \beta_{01})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \alpha_{11}\frac{(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \varepsilon_{1t}$$
$$Q_t = \frac{\beta_{01}(\alpha_{11} - \alpha_{21}) + \alpha_{11}(\beta_{02} - \beta_{01})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \frac{\alpha_{11}(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}) + \varepsilon_{1t}(\alpha_{11} - \alpha_{21})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$$
$$Q_t = \frac{\beta_{01}\alpha_{11} - \beta_{01}\alpha_{21} + \alpha_{11}\beta_{02} - \alpha_{11}\beta_{01}}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \frac{\alpha_{11}\varepsilon_{2t} - \alpha_{11}\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{1t}\alpha_{11} - \varepsilon_{1t}\alpha_{21}}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$$
$$Q_t = \frac{\alpha_{11}\beta_{02} - \beta_{01}\alpha_{21}}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \frac{\alpha_{11}\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}\alpha_{21}}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$$
$$Q_t = \pi_1 + v_t \qquad (3.1.3.4)$$

dengan $\pi_1 = \frac{\alpha_{11}\beta_{02} - \beta_{01}\alpha_{21}}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$ dan $v_t = \frac{\alpha_{11}\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}\alpha_{21}}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$

perhatikan bahwa variabel error μ_t dan v_t adalah kombinasi linear dari variabel error asli ε_{1t} dan ε_{2t}.

Persamaan (3.3.1.3) dan (3.3.1.4) adalah bentuk persamaan yang direduksi. Model permintaan dan penawaran terdiri dari empat parameter struktural $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \beta_{01}$ dan β_{02} tetapi bentuk persamaan yang direduksi hanya terdiri dari dua parameter sehingga tidak ada cara yang unik untuk menaksir keempat parameter struktural tersebut dari bentuk persamaan yang direduksi. Inilah yang dikenal dengan *unidentified*. Perlu diingat bahwa untuk menaksir empat parameter yang tidak diketahui sedikitnya harus terdapat empat persamaan, secara umum untuk menaksir k parameter yang tidak diketahui sedikitnya harus terdapat k persamaan.

b. Exactly Identified

Misalkan model persamaan permintaan dan penawaran (3.3.1.1) dan (3.3.1.2) mendapat variabel tambahan yaitu sebagai berikut:

$$Q_t^d = \beta_{01} + \alpha_{11}P_t + \beta_{11}I_t + \varepsilon_{1t} \text{ (fungsi permintaan)} \quad (3.1.3.5)$$

$$Q_t^s = \beta_{02} + \alpha_{21}P_t + \beta_{22}P_{t-1} + \varepsilon_{2t} \text{ (fungsi penawaran)} \quad (3.1.3.6)$$

Di mana P_{t-1} = harga komoditas pada observasi sebelumnya

I_t = pendapatan konsumen

Keseimbangan pasar menjelaskan bahwa jumlah yang diminta = jumlah yang ditawarkan, sehingga diperoleh:

$$\beta_{01} + \alpha_{11}P_t + \beta_{11}I_t + \varepsilon_{1t} = \beta_{02} + \alpha_{21}P_t + \beta_{22}P_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$
$$\alpha_{11}P_t - \alpha_{21}P_t = (\beta_{02} - \beta_{01}) + (-\beta_{11}I_t) + \beta_{22}P_{t-1} + (\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})$$
$$(\alpha_{11} - \alpha_{21})P_t = (\beta_{02} - \beta_{01}) + (-\beta_{11})I_t + \beta_{22}P_{t-1} + (\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})$$

$$P_t = \frac{(\beta_{02} - \beta_{01})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \frac{(-\beta_{11})I_t}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \frac{\beta_{22}P_{t-1}}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})} + \frac{(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$$

$$P_t = \pi_0 + \pi_1 I_t + \pi_2 P_{t-1} + \mu_t \quad (3.1.3.7)$$

dengan $\pi_0 = \dfrac{(\beta_{02} - \beta_{01})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}, \pi_1 = \dfrac{(-\beta_{11})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}, \mu_t = \dfrac{(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})}$

dengan mensubstitusikan nilai P_t pada (3.1.3.7) ke dalam (3.1.3.5) atau (3.1.3.6), diperoleh kuantitas keseimbangan berikut ini:

$$Q_t = \beta_{01} + \alpha_{11}\left(\frac{\beta_{02} - \beta_{01}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{(-\beta_{11})I_t}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\beta_{22}P_{t-1}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right) + \beta_{11}I_t + \varepsilon_{1t}$$

$$Q_t = \beta_{01} + \frac{\alpha_{11}(\beta_{02} - \beta_{01})}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}(-\beta_{11})I_t}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}\beta_{22}P_{t-1}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \beta_{11}I_t + \varepsilon_{1t}$$

$$Q_t = \beta_{01} + \frac{\alpha_{11}(\beta_{02} - \beta_{01})}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}(-\beta_{11})I_t}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \beta_{11}I_t + \frac{\alpha_{11}\beta_{22}P_{t-1}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\alpha_{11}(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t})}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \varepsilon_{1t}$$

$$Q_t = \left(\frac{\beta_{01}(\alpha_{11} - \alpha_{21}) + \alpha_{11}(\beta_{02} - \beta_{01})}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right) + \left(\frac{-\alpha_{11}\beta_{11} + \beta_{11}(\alpha_{11} - \alpha_{21})}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right)I_t$$
$$+ \frac{\alpha_{11}\beta_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}P_{t-1} + \frac{\alpha_{11}(\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}) + \varepsilon_{1t}(\alpha_{11} - \alpha_{21})}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$$

$$Q_t = \left(\frac{\beta_{01}\alpha_{11} - \beta_{01}\alpha_{21} + \alpha_{11}\beta_{02} - \alpha_{11}\beta_{01})}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right) + \left(\frac{-\alpha_{11}\beta_{11} + \beta_{11}\alpha_{11} - \beta_{11}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right)I_t$$
$$+ \frac{\alpha_{11}\beta_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}P_{t-1} + \frac{\alpha_{11}\varepsilon_{2t} - \alpha_{11}\varepsilon_{1t} + \varepsilon_{1t}\alpha_{11} - \varepsilon_{1t}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$$

$$Q_t = \left(\frac{-\beta_{01}\alpha_{21} + \alpha_{11}\beta_{02}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right) + \left(\frac{-\beta_{11}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right)I_t + \left(\frac{\alpha_{11}\beta_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right)P_{t-1} + \frac{\alpha_{11}\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$$

$$Q_t = \pi_3 + \pi_4 I_t + \pi_5 P_{t-1} + \nu_t \tag{3.1.3.8}$$

dengan $\pi_3 = \dfrac{-\beta_{01}\alpha_{21} + \alpha_{11}\beta_{02}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}; \pi_4 = \dfrac{-\beta_{11}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}};$

$$\pi_5 = \frac{\alpha_{11}\beta_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}; \nu_t = \frac{\alpha_{11}\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$$

Perhatikan bahwa variabel error μ_t dan ν_t adalah kombinasi linear dari variabel error asli ε_{1t} dan ε_{2t}.

Persamaan (3.1.3.7) dan (3.1.3.8) adalah bentuk persamaan yang direduksi. Model permintaan dan penawaran terdiri dari enam parameter struktural yaitu $\alpha_{11}, \alpha_{21}, \beta_{01}, \beta_{11}, \beta_{02}$ dan β_{22} serta model bentuk yang direduksi juga memuat enam parameter. Karena jumlah parameter sama maka bentuk persamaan yang direduksi akan menghasilkan solusi unik. Dengan demikian model permintaan dan penawaran adalah *exactly identified.*

c. Overidentified

Misalkan model persamaan permintaan dan penawaran (3.3.1.5) dan (3.3.1.6) mendapat variabel tambahan yaitu sebagai berikut:

$$Q_t^d = \beta_{101} + \alpha_{11}P_t + \beta_{12}I_t + \beta_{13}W_t + \varepsilon_{1t} \text{ (fungsi permintaan)} \tag{3.1.3.9}$$

$$Q_t^s = \beta_{102} + \alpha_{21}P_t + \beta_{22}P_{t-1} + \varepsilon_{2t} \text{ (fungsi penawaran)} \tag{3.1.3.10}$$

Dengan W_t = kekayaan konsumen

Keseimbangan pasar menjelaskan bahwa jumlah yang diminta = jumlah yang ditawarkan, sehingga diperoleh:

$$\beta_{101} + \alpha_{11}P_t + \beta_{12}I_t + \beta_{13}W_t + \varepsilon_{1t} = \beta_{102} + \alpha_{21}P_t + \beta_{22}P_{t-1} + \varepsilon_{2t}$$

$$\alpha_{11}P_t - \alpha_{21}P_t = \beta_{102} - \beta_{101} + \beta_{22}P_{t-1} - \beta_{12}I_t - \beta_{13}W_t + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}$$

$$(\alpha_{11} - \alpha_{21})P_t = \beta_{102} - \beta_{101} + \beta_{22}P_{t-1} - \beta_{12}I_t - \beta_{13}W_t + \varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}$$

$$P_t = \frac{\beta_{102} - \beta_{101}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\beta_{22}P_{t-1}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} - \frac{\beta_{12}I_t}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} - \frac{\beta_{13}W_t}{\alpha_{11} - \alpha_{21}} + \frac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$$

$$P_t = \pi_0 + \pi_1 P_{t-1} + \pi_2 I_t + \pi_3 W_t + \mu_t \tag{3.1.3.11}$$

dengan

$$\pi_0 = \frac{\beta_{102} - \beta_{101}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}},\ \pi_1 = \frac{\beta_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}},\ \pi_2 = -\frac{\beta_{12}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}},$$

$$\pi_3 = -\frac{\beta_{13}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}},\ \mu_t = \frac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$$

Dengan cara yang sama seperti subbab sebelumnya, diperoleh:

$$Q_t = \pi_4 + \pi_5 P_{t-1} + \pi_6 I_t + \pi_7 W_t + \nu_t \qquad (3.1.3.12)$$

dengan $\pi_4 = \dfrac{\alpha_{21}\beta_{101} - \alpha_{11}\beta_{101}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$, $\pi_5 = \dfrac{\alpha_{21}\beta_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$, $\pi_6 = \dfrac{-\beta_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$,

$\pi_7 = \dfrac{-\beta_{13}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$ dan $\nu_t = \dfrac{\varepsilon_{2t} - \varepsilon_{1t}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}$

Dari persamaan (3.1.3.9) dan (3.1.3.10) terdapat tujuh parameter struktural sedangkan pada (3.1.3.11) dan (3.1.3.12) terdapat delapan parameter bentuk yang direduksi. Oleh sebab itu, jumlah persamaan lebih besar dari jumlah yang tidak diketahui sehingga tidak mungkin memperoleh taksiran yang unik untuk semua parameter struktural. Artinya terdapat lebih dari satu nilai parameter struktural. Jika besaran koefisien bentuk yang direduksi ditentukan maka nilai α_{21} ada dua, yaitu

$$\alpha_{21} = \frac{\left(\dfrac{-\beta_{12}\alpha_{21}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right)}{\left(\dfrac{-\beta_{12}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right)} = \left[\frac{\pi_6}{\pi_2}\right] \text{ dan } = \alpha_{21} = \frac{\left(\dfrac{\alpha_{21}\beta_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right)}{\left(\dfrac{\beta_{22}}{\alpha_{11} - \alpha_{21}}\right)} = \left[\frac{\pi_5}{\pi_1}\right]$$

Dari penjelasan ini dapat dikatakan bahwa model penawaran adalah *overidentified.*

3.1.4 Aturan Identifikasi

Penentuan identifikasi persamaan simultan melalui bentuk yang direduksi pada umumnya tidak digunakan karena akan memakan waktu dan tenaga. Metode umum untuk mengidentifikasi model persamaan simultan adalah kondisi ordo dan kondisi rank (*order and rank conditions*).

3.1.4.1 Kondisi Ordo

Secara umum sebuah model struktural dapat dituliskan dalam bentuk $\alpha_i Y + \beta_i X + \varepsilon_i = 0$ dengan bentuknya yang direduksi yaitu Y = Π X + η. Berdasarkan uraian sebelumnya diperlihatkan bahwa:

$$\Pi = -\beta\,\alpha^{-1} \tag{3.1.4.1}$$

Sehingga

$$\Pi\,\alpha = -\beta \tag{3.1.4.2}$$

Atau

$$\underset{(k\times m)}{\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \cdots & \Pi_{1m} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \cdots & \Pi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{k1} & \Pi_{k2} & \cdots & \Pi_{km} \end{pmatrix}} \underset{(m\times m)}{\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \cdots & \alpha_{mm} \end{pmatrix}} = - \underset{(k\times m)}{\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \cdots & \beta_{1m} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \cdots & \beta_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{k1} & \beta_{k2} & \cdots & \beta_{km} \end{pmatrix}}$$

Untuk setiap persamaan dalam sistem kita mempunyai:

$$\underset{(k\times m)}{\begin{pmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \cdots & \Pi_{1m} \\ \Pi_{21} & \Pi_{22} & \cdots & \Pi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Pi_{k1} & \Pi_{k2} & \cdots & \Pi_{km} \end{pmatrix}} \underset{(m\times 1)}{\begin{pmatrix} \alpha_{1i} \\ \alpha_{2i} \\ \vdots \\ \alpha_{mi} \end{pmatrix}} = - \underset{(k\times 1)}{\begin{pmatrix} \beta_{1i} \\ \beta_{2i} \\ \vdots \\ \beta_{ki} \end{pmatrix}}$$

Atau $\alpha_i\,\Pi = -\beta_i$ (3.1.4.3)

Tetapi terdapat kemungkinan bahwa tidak semua variabel endogen dan eksogen yang ada di dalam model muncul pada setiap persamaan struktural. Berikut akan diperkenalkan beberapa notasi yaitu:

D = jumlah variabel endogen di dalam model

d = jumlah variabel endogen yang terdapat dalam persamaan

K = jumlah variabel predetermin di dalam model

k = jumlah variabel predetermin yang terdapat dalam persamaan

Salah satu elemen matriks α_i mempunyai nilai satu (lihat kembali model (3.1.1)), sehingga persamaan (3.1.4.2) mempunyai d - 1 bilangan α yang tidak diketahui dan k bilangan β tidak diketahui yang harus dihitung berdasarkan matiks Π. Matriks α_i dan β_i hanya dapat diperoleh jika (3.1.4.2) sekurang-kurangnya terdiri dari k + d - 1 persamaan. Ini berarti bahwa jumlah baris matriks Π sekurang-kurangnya harus sama dengan k + d - 1, atau

$$K \geq k + d - 1 \qquad (3.1.4.4)$$

Ketidaksamaan (3.1.4.4) menyatakan bahwa jumlah variabel predetermin yang ada di dalam model sekurang-kurangnya harus sama dengan jumlah variabel yang muncul pada sebuah persamaan struktural dikurangi satu.. Jika $K = k + d - 1$, maka persamaan tersebut *exactly identified*; jika $K > k + d - 1$, maka persamaan tersebut *overidentified*. Persyaratan yang diperlihatkan (3.1.4.4) disebut sebagai kondisi ordo dari masalah identifikasi.

Dengan melakukan manipulasi terhadap (3.1.4.4) kita dapat menyatakan kondisi ordo tersebut dalam bentuk sebagai berikut:

$$K + D \geq k + d + D - 1$$

$$(K + D) - (k + d) \geq D - 1 \qquad (3.1.4.5)$$

Maksudnya, persamaan struktural tertentu dapat diidentifikasi jika jumlah variabel yang tidak muncul pada persamaan tersebut sekurang-kurangnya harus sama dengan jumlah variabel endogen di dalam model dikurangi satu. Jika

$(K+D)-(k+d)=D-1$, maka persamaan tersebut *exactly identified*; jika $(K+D)-(k+d)>D-1$, maka persamaan tersebut *overidentified*.

Selanjutnya dari (3.1.4.4) kita juga dapat memperoleh:

$$K-k \geq d-1 \quad (3.1.4.6)$$

Persyaratan (3.1.4.6) menyatakan bahwa sebuah persamaan struktural dapat diidentifikasi jika jumlah variabel eksogen yang tidak muncul pada persamaan tersebut sekurang-kurangnya harus sama dengan variabel endogen yang muncul dikurangi satu. Jika $K-k=d-1$, maka persamaan tersebut *exactly identified*; jika $K-k>d-1$, maka persamaan tersebut *overidentified*.

3.1.4.2 Kondisi Rank

Kondisi ordo seperti yang telah dibahas di atas, hanya merupakan kondisi yang diperlukan, sehingga belum cukup menunjukkan kondisi identifikasi; artinya meskipun suatu persamaan sudah teridentifikasi berdasarkan kondisi ordo, mungkin terjadi bahwa persamaan tersebut tidak teridentifikasi jika diuji dengan kondisi rank.

Secara umum, jika kondisi ordo seperti pada persamaan (3.1.4.6) yaitu $K-k \geq d-1$ dipenuhi oleh suatu persamaan, persamaan tadi mungkin tidak teridentifikasi karena variabel predetermin yang dikeluarkan dari persamaan ini tetapi ada dalam model mungkin tidak semuanya independen sehingga tidak ada hubungan satu-satu antara parameter struktural (β) dan parameter bentuk yang direduksi (Π). Jika hal ini terjadi, maka kita tidak bisa menaksir parameter struktural dari koefisien bentuk yang direduksi. Dengan demikian dibutuhkan baik kondisi ordo maupun kondisi rank dalam melakukan identifikasi.

Kondisi rank menyatakan dalam suatu model D persamaan dalam D variabel endogen, suatu persamaaan disebut *identified* jika dan hanya jika sekurang-kurangnya satu matriks berordo (D-1) x (D-1) dengan determinan tidak sama dengan nol dapat dibentuk dari koefisien variabel (baik endogen maupun predetermin) yang tidak dimasukkan dari persamaan tersebut, tetapi terdapat dalam persamaan lain dalam model.

Sebagai suatu gambaran dari kondisi rank, perhatikan sistem persamaan simultan berikut di mana variabel Y adalah endogen dan variabel X adalah predetermin:

$$Y_{1t} - \beta_{10} - \alpha_{12} Y_{2t} - \alpha_{13} Y_{3t} - \beta_{11} X_{1t} = \varepsilon_{1t} \quad (3.1.4.7)$$

$$Y_{2t} - \beta_{20} - \alpha_{23} Y_{3t} - \beta_{21} X_{1t} - \beta_{22} X_{2t} = \varepsilon_{2t} \quad (3.1.4.8)$$

$$Y_{3t} - \beta_{30} - \alpha_{31} Y_{1t} - \beta_{31} X_{1t} - \beta_{32} X_{2t} = \varepsilon_{3t} \quad (3.1.4.9)$$

$$Y_{4t} - \beta_{40} - \alpha_{41} Y_{1t} - \alpha_{42} Y_{2t} - \beta_{43} X_{3t} = \varepsilon_{4t} \quad (3.1.4.10)$$

Untuk memudahkan identifikasi, sistem di atas ditulis dalam bentuk tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1
Parameter-parameter struktural

Persamaan	Koefisien dari variabel-varaibel							
	1	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2	X_3
(3.1.4.7)	$-\beta_{10}$	1	$-\alpha_{12}$	$-\alpha_{13}$	0	$-\beta_{11}$	0	0
(3.1.4.8)	$-\beta_{20}$	0	1	$-\alpha_{23}$	0	$-\beta_{21}$	$-\beta_{22}$	0
(3.1.4.9)	$-\beta_{30}$	α_{31}	0	1	0	$-\beta_{31}$	$-\beta_{32}$	0
(3.1.4.10)	$-\beta_{40}$	α_{41}	$-\alpha_{42}$	0	1	0	0	$-\beta_{43}$

Sebelum menerapkan kondisi rank, terlebih dahulu diterapkan kondisi ordo, seperti ditunjukkan pada tabel 3.2 sebagai berikut:

Tabel 3.2
Kondisi Ordo

Persamaan	Banyak variabel eksogen yang tidak muncul $(K-k)$	Banyak variabel endogen yang muncul kurang satu (d - 1)	Identifikasi
(3.1.4.7)	2	2	*exactly*
(3.1.4.8)	1	1	*exactly*
(3.1.4.9)	1	1	*exactly*
(3.1.4.10)	2	2	*exactly*

Dari tabel di atas terlihat bahwa semua persamaan teridentifikasi dengan tepat (*exactly*). Selanjutnya akan diidentifikasi dengan kondisi rank.

Untuk menerapkan kondisi rank, dapat dilakukan langkah-langkah sebagai berikut:

1. Tuliskan model persamaan dalam suatu tabel.
2. Coret koefisien dari baris persamaan yang diselidiki.
3. Coret dari kolom yang sesuai dengan koefisien yang muncul dalam langkah 2 yang tidak sama dengan nol..
4. Angka yang tertinggal dalam tabel adalah koefisien dari variabel yang terdapat dalam sistem tetapi tidak muncul pada persamaan yang sedang diselidiki. Dari angka ini bentuklah semua matriks yang mungkin dengan ordo (D-1) x (D-1) dan tentukanlah determinannya. Jika terdapat sekurang-kurangnya satu determinan yang tidak sama dengan nol maka persamaan tersebut teridentifikasi. Rank dari matriks tadi, misalkan **A**, dalam kasus ini adalah tepat sama dengan (D-1). Jika semua determinan matriks (D-1) x (D-1) yang mungkin adalah nol, rank dari matriks **A**

adalah kurang dari (D-1) dan persamaan yang sedang diselidiki adalah tidak teridentifikasi.

Berikut adalah penerapan kondisi rank untuk persamaan (3.1.4.7), langkah 1 telah ditunjukkan pada Tabel 3.1. Untuk langkah 2 dan 3 ditunjukkan pada tabel 3.3, sebagai berikut:

Tabel 3.3
Langkah 2 dan 3

Persamaan	1	Y_1	Y_2	Y_3	Y_4	X_1	X_2	X_3
(3.1.4.7)	$-\beta_{10}$	1	$-\alpha_{12}$	$-\alpha_{13}$	0	$-\beta_{11}$	0	0
(3.1.4.8)	$-\beta_{20}$	0	1	$-\alpha_{23}$	0	$-\beta_{21}$	$-\beta_{22}$	0
(3.1.4.9)	$-\beta_{30}$	α_{31}	0	1	0	$-\beta_{31}$	$-\beta_{32}$	0
(3.1.4.10)	$-\beta_{40}$	α_{41}	$-\alpha_{42}$	0	1	0	0	$-\beta_{43}$

Agar persamaan (3.1.4.7) teridentifikasi, sekurang-kurangnya persamaan tersebut memiliki satu matriks berordo 3 x 3 dengan determinan tidak sama dengan nol dari koefisien variabel yang tidak muncul dalam persamaan, tetapi terdapat dalam persamaan lain.

Seperti pada langkah 4, angka-angka yang tertinggal (tidak dicoret) akan dibentuk matriks berordo 3 x 3 sedemikian sehingga determinannya tidak sama dengan nol, karena angka yang tertinggal telah tepat berordo 3 x 3 maka hanya terdapat satu matriks saja. Misalkan matriks tersebut adalah **A**, sehingga matriks tersebut dituliskan sebagai berikut:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -\beta_{22} & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\beta_{43} \end{bmatrix} \qquad (3.1.4.11)$$

Determinan dari matriks **A** adalah:

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & -\beta_{22} & 0 \\ 0 & -\beta_{32} & 0 \\ 1 & 0 & -\beta_{43} \end{vmatrix} = 0 \tag{3.1.4.12}$$

Karena determinannya adalah nol, rank dari matriks (3.1.4.11), yang diberi simbol $r(A)$, kurang dari 3. Oleh karena itu, persamaan (3.1.4.7) tidak memenuhi kondisi rank, akibatnya persamaan tersebut tidak teridentifikasi.

Lakukan hal yang sama untuk mengidentifikasi persamaan lainnya dengan kondisi rank.

Seperti telah dijelaskan sebelumnya bahwa kondisi rank ini merupakan kondisi yang perlu dan cukup untuk identifikasi. Oleh karena itu, meskipun pada kondisi ordo persamaan (3.1.4.7) teridentifikasi, pada kondisi rank menunjukkan bahwa persamaan tersebut tidak teridentifikasi. Hal ini terjadi karena kolom atau baris dari matriks **A** (3.1.4.11) tidak bebas secara linier, di mana ada suatu hubungan antara variabel Y_4, X_2 dan X_3. Sehingga tidak mempunyai cukup informasi untuk menaksir parameter dari persamaan (3.1.4.7).

Prosedur umum penentuan identifikasi setiap persamaan struktural yang terdiri dari D persamaan dalam persamaan simultan, yaitu:

1. Jika $K - k > d - 1$ dan rank dari matriks **A** adalah (D-1), maka persamaan tersebut teridentifikasi berlebih (*overidentified*).
2. Jika $K - k = d - 1$ dan rank dari matriks **A** adalah (D-1), maka persamaan tersebut teridentifikasi secara tepat (*exactly identified*).

3. Jika $K - k \geq d - 1$ dan rank dari matriks **A** kurang dari (D-1), maka persamaan tersebut kurang teridentifikasi (*underidentified*).
4. Jika $K - k < d - 1$, maka persamaan tersebut tidak teridentifikasi (*unidentified*).

3.2 Metode Penaksiran

Banyak alternatif metode penaksiran untuk menaksir persamaan simultan. Semua metode tersebut dapat diklasifikasikan dalam dua kategori, yaitu: Pertama, metode penaksiran persamaan tunggal yang disebut metode informasi terbatas (*limited information method*) dan kedua, metode penaksiran sistem yang disebut metode informasi penuh (*full information method*). Pada metode pertama setiap persamaan yang terdapat dalam model ditaksir secara terpisah, sehingga tidak menggunakan semua informasi yang diberikan oleh persamaan-persamaan lain yang tidak muncul pada persamaan tersebut tetapi terdapat pada model. Sedangkan pada metode kedua semua persamaan yang terdapat dalam model ditaksir secara simultan dengan memperhatikan kendala-kendala yang berkenaan dengan koefisien struktural semua persamaan serta varians dan kovarians variabel error antar persamaan.

Persamaan simultan merupakan suatu persamaan yang terdiri dari paling sedikit dua persamaan yang saling mempengaruhi. Sehingga, jika kita menggunakan penaksiran dengan metode penaksiran persamaan tunggal di mana pada metode ini tidak menggunakan semua informasi yang terdapat dalam sistem, maka hasil penaksirannya kemungkinan kurang efisien dibandingkan dengan metode penaksiran sistem yang menggunakan semua informasi pada sistem persamaan simultan. Salah satu metode penaksiran sistem yaitu *Three Stage Least Square* (3SLS). Berikut akan dikaji lebih lanjut mengenai metode tersebut.

3.2.1 Three Stage Least Square (3SLS)

Three Stage Least Square(3SLS) adalah suatu metode yang diaplikasikan untuk semua persamaan yang terdapat pada model dalam waktu yang sama dan memberikan penaksiran untuk semua parameter secara simultan. Metode ini dikembangkan oleh Theil dan Zellner sebagai lanjutan dari *Two Stage Square*(2SLS). 2SLS merupakan suatu metode penaksiran persamaan tunggal, sehingga termasuk pada kategori pertama yaitu metode informasi terbatas (*limited information method*). Metode *Three Stage Least Square*(3SLS) dapat digunakan untuk menaksir persamaan simultan dengan identifikasi *exactly identified* dan *overidentified*.

Sesuai dengan namanya metode penaksiran *Three Stage Least Square* (3SLS) adalah metode OLS dalam tiga tahap. Tahap I, menaksir parameter persamaan simultan dari parameter bentuk yang direduksi dengan menggunakan metode OLS. Sehingga diperoleh hasil taksiran persamaan struktural. Tahap II, taksiran yang diperoleh pada tahap I ditaksir kembali menggunakan metode OLS. Pada tahap II diperoleh matriks varians-kovarians variabel error yang terdapat dalam sistem persamaan simultan. Kemudian pada tahap III semua persamaan struktural ditaksir secara simultan melalui matriks varians-kovarians dengan menggunakan metode *generalized least square* (GLS).

Berikut adalah tahap-tahap penaksiran persamaan simultan dengan menggunakan metode 3SLS:

Tahap I

Ide dasar dilakukan tahap I ini adalah untuk menghilangkan korelasi yang terjadi antara variabel endogen yang menjadi variabel penjelas Y_i^* dengan variabel error ε_j, yang menyebabkan metode OLS tidak dapat digunakan untuk menaksir parameter-parameter dari persamaan yang diberikan. Penghilangan korelasi tersebut adalah dengan mengubah persamaan simultan menjadi bentuk yang direduksi, di mana suatu variabel endogen hanya dijelaskan oleh variabel predetermin. Dengan demikian metode OLS dapat digunakan untuk menaksir parameter struktural dari bentuk yang direduksi.

Misalkan diberikan persamaan simultan sebagai berikut:

$$Y_i = Y_i^* \alpha_i + X_i^* \beta_i + \varepsilon_i \tag{3.2.1.1}$$

$$Y_i = \begin{bmatrix} Y_i^* & X_i^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix} + \varepsilon_i$$

$$Y_i = Z_i \gamma_i + \varepsilon_i \tag{3.2.1.2}$$

Di mana

α_i = parameter variabel endogen

β_i = parameter variabel eksogen

Y_i = variabel endogen yang muncul pada persamaan ke-i

Y_i^* = variabel endogen yang muncul sebagai variabel penjelas pada persamaan ke-i

X_i^* = variabel predetermin yang muncul pada persamaan ke-i

$\gamma_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \beta_i \end{bmatrix}$ = parameter pada persamaan ke-i

$Z_i = \begin{bmatrix} Y_i^* & X_i^* \end{bmatrix}$ = variabel-variabel yang muncul pada persamaan ke-i

ε_i = variabel error

Untuk keseluruhan persamaan, model (3.2.1.2) dapat dituliskan dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_m \end{bmatrix}$$

Atau $Y = Z\gamma + \varepsilon$ (3.2.1.3)

Seperti yang telah diuraikan sebelumnya bahwa bentuk yang direduksi dari persamaan simultan $Y\alpha + X\beta + \varepsilon = 0$ (3.1.2.4) adalah

$$Y = X\Pi + \eta \qquad (3.1.2.6)$$

$$\hat{\eta} = Y - X\hat{\Pi}$$

Diasumsikan bahwa X nonsingular sehingga taksiran parameter Π dengan metode OLS adalah sebagai berikut:

$$\hat{\Pi} = \left(X^{'}X\right)^{-1} X^{'}Y \qquad (3.2.1.4)$$

Sehingga

$$\hat{Y}_i = X\hat{\Pi}_i \qquad (3.2.1.5)$$

Sekarang persamaan (3.1.2.6) dapat dinyatakan sebagai:

$$Y_i = X\hat{\Pi}_i + \hat{\eta}_i$$
$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\eta}_i \qquad (3.2.1.6)$$

Tahap II

Pada tahap II, substitusikan (3.2.1.6) ke dalam (3.2.1.1), sehingga diperoleh:

$$
\begin{aligned}
Y_i &= \left(\hat{Y}_i + \hat{\eta}_i\right)\alpha_i + X_i^* \beta_i + \varepsilon_i \\
&= \hat{Y}_i \alpha_i + \hat{\eta}_i \alpha_i + X_i^* \beta_i + \varepsilon_i \\
&= \hat{Y}_i \alpha_i + X_i^* \beta_i + \hat{\eta}_i \alpha_i + \varepsilon_i
\end{aligned}
$$

Atau

$$Y_i = Z_i^* \gamma_i + \varepsilon_i^* \qquad (3.2.1.7)$$

Di mana

$$Z_i^* = \left[X_i^* \quad \hat{Y}_i \right],\ \gamma_i = \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \hat{\beta}_i \end{bmatrix},\ \varepsilon_i^* = \hat{\eta}_1 \alpha_i + \varepsilon_i$$

Kemudian parameter pada persamaan (3.2.1.7) akan ditaksir kembali menggunakan metode OLS. Metode OLS dapat kembali digunakan karena tidak ada pelanggaran terhadap asumsi OLS. Salah satu yang menyebabkan OLS tidak dapat diterapkan pada persamaan simultan yaitu adanya korelasi antara variabel penjelas dengan variabel error, hal ini telah direduksi pada tahap I.

Dari persamaan (3.2.1.7) diperoleh

$$\varepsilon_i^* = Y_i - Z_i^* \hat{\gamma}_i$$

Diasumsikan Z nonsingular sehingga taksiran parameter γ_i dengan metode OLS adalah sebagai berikut:

$$\hat{\gamma} = \left(Z^{*'} Z^*\right)^{-1} Z^{*'} Y \qquad (3.2.1.8)$$

Jadi, pada tahap II ini diperoleh taksiran parameter persamaan simultan sebagai berikut:

$$
\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{(2SLS)} &= \begin{bmatrix} \hat{\alpha} \\ \hat{\beta} \end{bmatrix} = \left(Z^{*'} Z^*\right)^{-1} \left(Z^{*'} Y\right) \\
&= \left(\left[X^* \quad \hat{Y} \right]' \left[X^* \quad \hat{Y} \right]\right)^{-1} \left(\left[X^* \quad \hat{Y} \right]' Y\right) \qquad (3.2.1.9)
\end{aligned}
$$

Substitusikan $\hat{\gamma}_{(2SLS)}$ pada (3.2.1.2) untuk memperoleh matriks varians-kovarians error seluruh persamaan yang akan digunakan pada tahap III. Sehingga hasil taksiran (3.2.1.2) yaitu:

$$\hat{Y}_i = Z_i \hat{\gamma}_i \tag{3.2.1.10}$$

Sehingga

$$Y_i = \hat{Y}_i + \hat{\varepsilon}_i = Z_i \hat{\gamma}_i + \hat{\varepsilon}_i = Y^*_i \hat{\alpha}_i + X^*_i \hat{\beta}_i + \hat{\varepsilon}_i$$

Diperoleh

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - Y^*_i \hat{\alpha}_i - X^*_i \hat{\beta}_i$$

Sehingga matriks varians-kovarians variabel error yaitu:

$$\hat{\Sigma} = \text{var} - \text{cov}\left(\hat{\varepsilon}_i\right) = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{11} I_n & \hat{\sigma}_{12} I_n & \cdots & \hat{\sigma}_{1m} I_n \\ \hat{\sigma}_{21} I_n & \hat{\sigma}_{22} I_n & \cdots & \hat{\sigma}_{2m} I_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{\sigma}_{m1} I_n & \hat{\sigma}_{m2} I_n & \cdots & \hat{\sigma}_{mm} I_n \end{bmatrix} \tag{3.2.1.11}$$

Dengan

$$\begin{aligned} \text{var}\left(\hat{\varepsilon}_i\right) = \sigma_i^2 &= \frac{\sum \hat{\varepsilon}_i^2}{n - (d_i - 1) - k_i} = \frac{\hat{\varepsilon}_i' \hat{\varepsilon}_i}{n - (d_i - 1) - k_i} \\ &= \frac{\left(Y_i - Y^*_i \hat{\alpha}_i - X^*_i \hat{\beta}_i\right)' \left(Y_i - Y^*_i \hat{\alpha}_i - X^*_i \hat{\beta}_i\right)}{n - (d_i - 1) - k_i} \\ &= \frac{(Y_i - Z_i \hat{\gamma}_i)' (Y_i - Z_i \hat{\gamma}_i)}{n - (d_i - 1) - k_i} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{cov}\left(\hat{\varepsilon}_i \hat{\varepsilon}_j\right) = \hat{\sigma}_{ij} &= \frac{\hat{\varepsilon}_i ' \hat{\varepsilon}_j}{n - (d_i - 1) + k_i} \\ &= \frac{\left(Y_i - \hat{\alpha}_i Y^*_i - \hat{\beta}_i X^*_i\right)' \left(Y_j - \hat{\alpha}_j Y^*_j - \hat{\beta}_j X^*_j\right)}{n - (d_i - 1) + k_i} \\ &= \frac{(Y_i - Z_i \hat{\gamma}_i)' \left(Y_j - Z_j \hat{\gamma}_j\right)}{n - (d_i - 1) + k_i} \end{aligned}$$

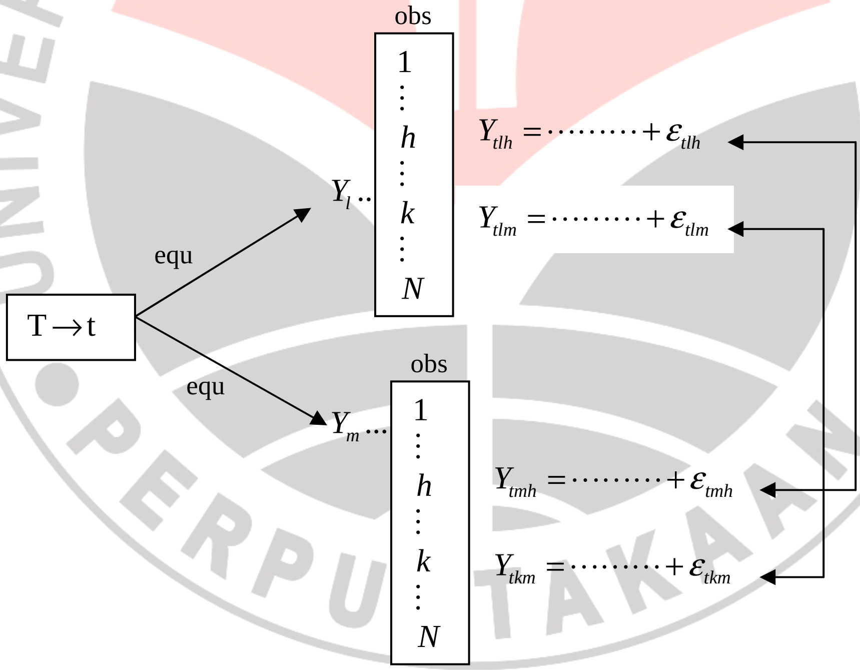
n = banyak observasi

d_i = variabel endogen yang muncul pada persamaan ke-i

k_i = variabel predetermin yang muncul pada persamaan ke-i

Tahap III

Pada tahap III, dengan memanfaatkan matriks varians-kovarians error yang diperoleh pada tahap II, persamaan (3.2.1.6) ditaksir kembali dengan menggunakan metode GLS. Metode GLS digunakan karena diasumsikan pada model persamaan simultan terdapat korelasi antar variabel error $\left[E\left(\varepsilon_i \varepsilon_j\right) \neq 0\right]$. Hal ini dapat digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.1
Analisis korelasi variabel error

Dengan t = waktu

l = persamaan ke-1

m = persamaan ke-m

h, k dan N = observasi ke-h, ke-k, dan ke-N

Selanjutnya persamaan (3.2.1.7) akan ditaksir kembali menggunakan metode GLS dengan memperhatikan matriks varians-kovarians yang diperoleh dari tahap II. Matriks varians-kovarians $\hat{\Sigma}$ adalah matriks definit positif, berdasarkan pembahasan sebelumnya penaksir GLS yang diperoleh adalah:

$$\hat{\gamma}_{(3SLS)} = \left(Z^{*'}\hat{\Sigma}^{-1}Z^{*}\right)^{-1} Z^{*'}\hat{\Sigma}^{-1}Y \qquad (3.2.1.12)$$

Persamaan (3.2.1.12) merupakan penaksir 3SLS untuk persamaan (3.2.1.2). Penaksir 3SLS merupakan penaksir yang konsisten dan secara umum lebih efisien daripada penaksir 2SLS. Tetapi, jika variabel error antarpersamaan struktural tidak berkorelasi sehingga matriks varians-kovarians untuk variabel error merupakan matriks diagonal, maka hasil taksiran 3SLS sama dengan 2SLS.