BAB III

MODEL NON MULTIPLIKATIF PADA RUNTUN WAKTU MUSIMAN

Sebelum masuk ke pembahasan mengenai model Non Multiplikatif pada *Seasonal Autoregressive Integrated Moving Average* (SARIMA), terlebih dahulu akan dibahas runtun waktu musiman.

3.1 Runtun Waktu Musiman

Musiman berarti kecenderungan mengulangi pola tingkah gerak dalam periode musim, biasanya satu tahun. Karena itu, runtun waktu musiman mempunyai karakteristik yang ditunjukkan oleh adanya korelasi beruntun yang kuat pada jarak semusim, yakni waktu yang berkaitan dengan banyak observasi per periode musim.

3.1.1 Proses AR Musiman

Proses AR musiman mempunyai bentuk:

$$Z_t = \phi_s Z_{t-s} + \ldots + \phi_{Ps} Z_{t-Ps} + a_t \tag{3.1}$$

dimana *s* adalah banyak observasi per periode musim dan *P* adalah kelipatan *s* yang terbesar, jadi tingkat proses itu adalah *Ps*. Untuk menyederhanakan penulisan digunakan notasi:

$$\phi_{js} = \Gamma_j \tag{3.2}$$

Sehingga persamaan (3.1) dapat ditulis:

$$Z_t = \Gamma_1 Z_{t-s} + \ldots + \Gamma_P Z_{t-Ps} + a_t \tag{3.3}$$

3.1.2 Proses MA Musiman

Proses MA musiman mempunyai bentuk:

$$Z_t = a_t + \theta_s a_{t-s} + \ldots + \theta_{Qs} a_{t-Qs} \tag{3.4}$$

dimana *s* adalah banyak observasi per periode musim dan *Q* adalah kelipatan *s* yang terbesar, jadi tingkat proses itu adalah *Qs*.

Untuk membedakan proses MA musiman dengan proses MA biasa maka digunakan notasi:

$$\Delta_j = \theta_{js} \tag{3.5}$$

sehingga persamaan (3.4) menjadi:

$$Z_t = a_t + \Delta_1 a_{t-s} + \ldots + \Delta_Q a_{t-Qs} \tag{3.6}$$

yang dinamakan proses MA musiman tingkat *Q*.

3.1.3 Model ARIMA Musiman

Bentuk proses ARIMA musiman yaitu:

$$x_t = \Gamma_1 x_{t-s} + \ldots + \Gamma_P x_{t-Ps} + a_t + \Delta_1 a_{t-s} + \ldots + \Delta_Q a_{t-Qs} \tag{3.7}$$

Model di atas merupakan model runtun waktu selisih musiman yang stasioner, berasal dari runtun waktu musiman nonstasioner. Selisih musiman dari model di atas ditulis dengan x_t, dimana

$$x_t = Z_t - Z_{t-s} = (1 - B^s) Z_t \tag{3.8}$$

Persamaan (3.7) dapat juga ditulis dalam bentuk operator *backshift*, yaitu:

$$(1 - \Gamma_1 B^s - \ldots - \Gamma_P B^{Ps})(1 - B^s)^1 Z_t = (1 + \Delta_1 B^s + \ldots + \Delta_Q B^{Qs}) a_t \tag{3.9}$$

dengan $(1 - B^s)^1 Z_t = x_t$.

Apabila runtun waktu di atas stasioner pada selisih musiman ke D, maka model runtun waktu tersebut adalah:

$$(1-\Gamma_1 B^s - \ldots - \Gamma_P B^{Ps})(1-B^s)^D Z_t = (1+\Delta_1 B^s + \ldots + \Delta_Q B^{Qs})a_t \qquad (3.10)$$

3.2 Model Musiman Multiplikatif

Model runtun waktu pada persamaan (3.10) masih kurang sempurna untuk menggambarkan berbagai runtun waktu (misalnya runtun waktu ekonomi), karena tidak menggambarkan adanya interaksi antara observasi-observasi, kecuali pada kelipatan lag musiman. Ini merupakan sifat independensi dari observasi yang berurutan. Oleh karena itu dikembangkan model multiplikatif yang menggambarkan adanya korelasi antara observasi-observasi di dalam periode musim yang dapat dikenalkan dengan anggapan bahwa input gerakan pada ARIMA musiman tidak independen, melainkan beruntun berkorelasi.

Box dan Jenkins mengusulkan bahwa korelasi antara observasi-observasi di dalam periode musim dapat dikenalkan dengan anggapan bahwa input gerakan pada ARIMA musiman tidak independen, melainkan beruntun berkorelasi. Dapat dipandang bahwa Z_t dihasilkan oleh model musiman

$$(1-\Gamma_1 B^s - \ldots - \Gamma_P B^{Ps})(1-B^s)^D Z_t = (1+\Delta_1 B^s + \ldots + \Delta_Q B^{Qs})\in_t \qquad (3.11)$$

dengan input gerakan $\in_t$ dihasilkan oleh proses ARIMA yang mempunyai bentuk seperti biasanya, yakni

$$(1-\phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)(1-B)^d \in_t = (1+\theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q)a_t \qquad (3.12)$$

Dengan menggabungkan persamaan (3.11) dan (3.12) diperoleh model musiman multiplikatif umum

$$(1-\Gamma_1 B^s - ... - \Gamma_P B^{Ps})(1-\phi_1 B - ... - \phi_p B^p)(1-B^s)^D (1-B)^d Z_t = (1+\Delta_1 B^s + ... + \Delta_Q B^{Qs})(1+\theta_1 B + ... + \theta_q B^q) a_t \quad (3.13)$$

Model (3.13) adalah runtun waktu yang mempunyai mean = 0. Apabila runtun waktu mempunyai mean yang tidak sama dengan nol, maka dalam model (3.13) runtun waktu Z_t diganti dengan $(Z_t - \bar{Z})$.

3.3 Fungsi Autokorelasi dari Model-model Musiman Multiplikatif

Model yang biasanya banyak dipakai dalam model musiman multiplikatif adalah sebagai berikut:

Model 1 : $x_t = (1-\Delta B^s)a_t$; ARIMA $(0,d,0)(0,D,1)_s$

Model 2 : $(1-\Gamma B^s)x_t = a_t$; ARIMA $(0,d,0)(1,D,0)_s$

Model 3 : $x_t = (1-\theta B)(1-\Delta B^s)a_t$; ARIMA $(0,d,1)(0,D,1)_s$

Model 4 : $(1-\Gamma B^s)x_t = (1-\Delta B^s)a_t$; ARIMA $(0,d,0)(1,D,1)_s$

Model 5 : $(1-\Gamma B^s)x_t = (1-\theta B)a_t$; ARIMA $(0,d,1)(1,D,0)_s$

Model 6 : $x_t = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)(1-\Delta B^s)a_t$; ARIMA $(0,d,2)(0,D,1)_s$

Model 7 : $(1-\Gamma B^s)x_t = (1-\theta B)(1-\Delta B^s)a_t$; ARIMA $(0,d,1)(1,D,1)_s$

Berikut adalah fungsi autokorelasi dari model 1 dan model 3 dari model-model di atas:

Model 1. $x_t = (1-\Delta B^s)a_t$

$\Leftrightarrow x_t = a_t - \Delta B^s a_t$

$$\Leftrightarrow x_t = a_t - \Delta a_{t-s} \quad (3.14)$$

dengan $\Delta_j = \theta_{js}$.

Dengan mengalikan persamaan (3.14) dengan x_{t-k} dan selanjutnya diambil ekspektasinya, maka:

$$x_t x_{t-k} = (a_t - \Delta a_{t-s})(a_{t-k} - \Delta a_{t-s-k})$$

$$E(x_t x_{t-k}) = E(a_t a_{t-k} - \Delta a_t a_{t-s-k} - \Delta a_{t-s} a_{t-k} + \Delta^2 a_{t-s} a_{t-s-k})$$

$$\gamma_0 = \sigma_a^2 + \Delta^2 \sigma_a^2 = (1+\Delta^2)\sigma_a^2 \quad \text{, untuk } k = 0 \qquad (3.15)$$

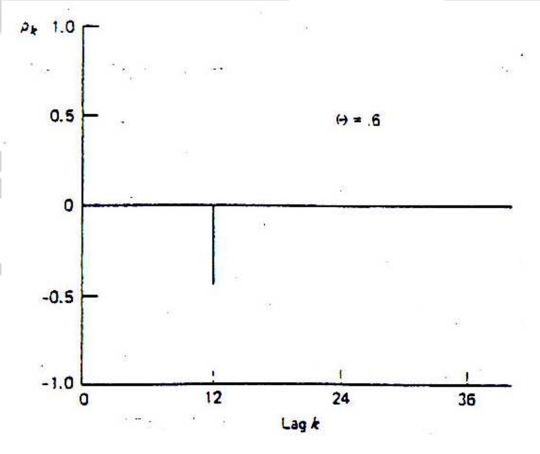
$$\gamma_s = -\Delta \sigma_a^2 \quad \text{, untuk } k = s = 12 \qquad (3.16)$$

$$\gamma_k = 0 \quad \text{, untuk } k \text{ lainnya} \qquad (3.17)$$

sehingga diperoleh fungsi autokorelasi dari model 1:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\dfrac{\Delta}{1+\Delta^2} & k = 12 \\ 0 & k \text{ yang lain} \end{cases} \qquad (3.18)$$

Fungsi autokorelasi tersebut dapat dibuat grafik fak sebagai berikut:



Gambar 3.1 Grafik fak model $x_t = (1 - \Delta B^s)a_t$

Model 3. $x_t = (1-\theta B)(1-\Delta B^s)a_t$

$$\Leftrightarrow x_t = (1 - \Delta B^s - \theta B + \theta\Delta B^{s+1})a_t$$

$$\Leftrightarrow x_t = a_t - \Delta B^s a_t - \theta B a_t + \theta \Delta B^{s+1} a_t$$

$$\Leftrightarrow x_t = a_t - \Delta a_{t-s} - \theta a_{t-1} + \theta \Delta a_{t-s-1} \qquad (3.19)$$

Dengan mengalikan persamaan (3.19) dengan x_{t-k} dan selanjutnya diambil ekspektasinya, maka:

$$x_t x_{t-k} = (a_t - \Delta a_{t-s} - \theta a_{t-1} + \theta \Delta a_{t-s-1})(a_{t-k} - \Delta a_{t-s-k} - \theta a_{t-k-1} + \theta \Delta a_{t-s-k-1})$$

Untuk $s = 12$, diperoleh:

$$\begin{aligned} E(x_t x_{t-k}) = E(&a_t a_{t-k} - \Delta a_t a_{t-k-12} - \theta a_t a_{t-k-1} + \theta \Delta a_t a_{t-k-12-1} - \Delta a_{t-12} a_{t-k} \\ &+ \Delta^2 a_{t-12} a_{t-k-12} + \theta \Delta a_{t-12} a_{t-k-1} - \theta \Delta^2 a_{t-12} a_{t-k-12-1} - \theta a_{t-1} a_{t-k} \\ &+ \theta \Delta a_{t-1} a_{t-k-12} + \theta^2 a_{t-1} a_{t-k-1} - \theta^2 \Delta a_{t-1} a_{t-k-12-1} + \theta \Delta a_{t-12-1} a_{t-k} \\ &- \theta \Delta^2 a_{t-12-1} a_{t-k-12} - \theta^2 \Delta a_{t-12-1} a_{t-k-1} + \theta^2 \Delta^2 a_{t-12-1} a_{t-k-12-1}) \end{aligned} \qquad (3.20)$$

$$\begin{aligned} \gamma_0 &= \sigma_a^2 + \Delta^2 \sigma_a^2 + \theta^2 \sigma_a^2 + \theta^2 \Delta^2 \sigma_a^2 \\ &= (1 + \Delta^2 + \theta^2 + \theta^2 \Delta^2) \sigma_a^2 \end{aligned} \quad \text{, untuk } k = 0 \qquad (3.21)$$

$$\gamma_1 = -\theta \sigma_a^2 - \theta \Delta^2 \sigma_a^2 = (-\theta - \theta \Delta^2) \sigma_a^2 \quad \text{, untuk } k = 1 \qquad (3.22)$$

$$\gamma_{11} = \theta \Delta \sigma_a^2 \quad \text{, untuk } k = 11 \qquad (3.23)$$

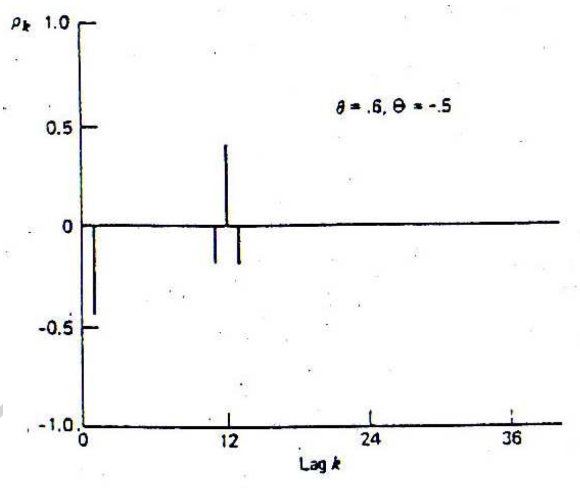
$$\gamma_{12} = -\Delta \sigma_a^2 - \theta^2 \Delta \sigma_a^2 = (-\Delta - \theta^2 \Delta) \sigma_a^2 \quad \text{, untuk } k = 12 \qquad (3.24)$$

$$\gamma_{13} = \theta \Delta \sigma_a^2 \quad \text{, untuk } k = 13 \qquad (3.25)$$

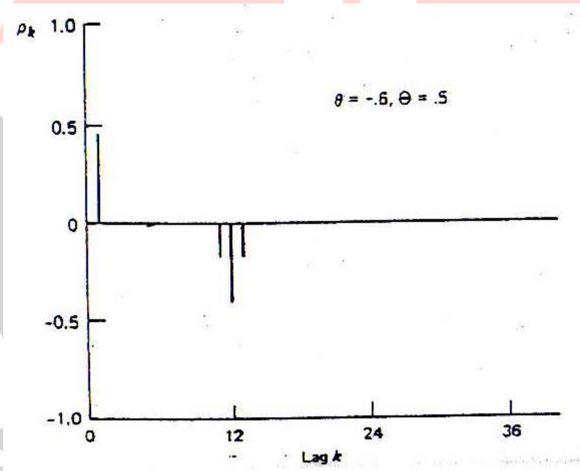
sehingga diperoleh fungsi autokorelasi dari model 3:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2} & k = 1 \\ \dfrac{\theta \Delta}{(1+\theta^2)(1+\Delta^2)} & k = 11 \\ -\dfrac{\Delta}{1+\Delta^2} & k = 12 \\ \rho_{11} & k = 13 \\ 0 & k \text{ yang lain} \end{cases} \qquad (3.26)$$

Fungsi autokorelasi di atas dapat digambarkan dengan grafik fak sebagai berikut:



Gambar 3.2 Grafik fak model $x_t = (1-\theta B)(1-\Delta B^s)a_t$



Gambar 3.3 Grafik fak model $x_t = (1-\theta B)(1-\Delta B^s)a_t$

Dengan cara yang sama diperoleh fak untuk berbagai model lainnya, yaitu:

- **Model 2**: $(1-\Gamma B^s)x_t = a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ \Gamma^{k/12} & k = 12 \\ 0 & k \text{ yang lain} \end{cases} \tag{3.27}$$

- **Model 4**: $(1-\Gamma B^s)x_t = (1-\Delta B^s)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 1 \\ -\dfrac{(\Delta-\Gamma)(1-\Gamma\Delta)}{1+\Delta^2-2\Gamma\Delta}\Gamma^{k/12-1} & k = 12, 24, 36, \ldots \\ 0 & k \text{ yang lain} \end{cases} \tag{3.28}$$

- **Model 5:** $(1-\Gamma B^s)x_t = (1-\theta B)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2} & k = 1 \\ 0 & k = 2, \ldots, 10 \\ -\dfrac{\theta\Gamma}{(1+\theta^2)} & k = 11 \\ \Gamma & k = 12 \\ \rho_{11} & k = 13 \\ \Gamma\rho_{k=12} & k > 13 \end{cases} \tag{3.29}$$

- **Model 6:** $x_t = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2)(1-\Delta B^s)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ -\dfrac{\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k = 1 \\ -\dfrac{\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} & k = 2 \\ \dfrac{\theta_2\Delta}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)(1+\Delta^2)} & k = 10 \\ \dfrac{\theta_1\Delta(1-\theta_2)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)(1+\Delta^2)} & k = 11 \\ -\dfrac{\Delta}{(1+\Delta^2)} & k = 12 \\ \rho_{11} & k = 13 \\ \rho_{10} & k = 14 \\ 0 & k \text{ yang lain} \end{cases} \tag{3.30}$$

- **Model 7:** $(1-\Gamma B^s)x_t = (1-\theta B)(1-\Delta B^s)a_t$

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ -\dfrac{\theta}{1+\theta^2} & k=1 \\ 0 & k=2,\ldots,10 \\ \dfrac{\theta}{1+\theta^2}\dfrac{(\Delta-\Gamma)(1-\Gamma\Delta)}{1+\Delta^2-2\Gamma\Delta} & k=11 \\ -\dfrac{(\Delta-\Gamma)(1-\Gamma\Delta)}{1+\Delta^2-2\Gamma\Delta} & k=12 \\ \rho_{11} & k=13 \\ \Gamma\rho_{k-12} & k>13 \end{cases} \tag{3.31}$$

3.4 Model Non Multiplikatif

Pada subbab sebelumnya tidak disebutkan bahwa model multiplikatif berlaku untuk semua runtun waktu musiman. Salah satu modifikasi yang dapat dilakukan dan berguna untuk memunculkan berbagai model lain yaitu dengan membuat operator *Autoregressive* dan/atau *Moving Average* menjadi bentuk non multiplikatif. Sebagai contoh, dari model multiplikatif ke-3 dari subbab sebelumnya, dapat diperoleh model non multiplikatif dengan bentuk:

$$x_t = (1-\theta_1 B-\theta_{12}B^{12})a_t \tag{3.32}$$

dimana model multiplikatif dengan dua parameternya dapat memenuhi korelasi pada lag 1, 11, 12 dan 13, dengan pembatasan $\rho_{11} = \rho_{13}$ model (3.32) memenuhi hanya pada lag 1, 11, dan 12. Dalam praktek mungkin sulit untuk mengetahui apakah model multiplikatif atau non multiplikatif yang harus digunakan. Untuk kasus-kasus dimana model non multiplikatif dapat digunakan, telah ditemukan bahwa biasanya model multiplikatif yang paling cocok menyediakan titik awal yang baik dari model-model non multiplikatif yang dapat dibangun.