BAB III

FUNGSI MAYOR DAN MINOR

Pada bab ini akan dibahas konsep-konsep dasar dari fungsi mayor dan fungsi minor dari suatu fungsi yang terdefinisi pada suatu interval tertutup. Pendefinisian fungsi mayor dan minor tersebut berdasarkan pada konsep derivatif atas dan derivatif bawah yang telah dibahas pada bagian 2.5 definisi 2.5.4. Definisi dari fungsi mayor dan minor digunakan untuk mendefinisikan integral Perron yang akan dibahas pada bab IV. Sajian berikut ini dimulai dengan membahas definisi dan contoh dari fungsi mayor dan minor, kemudian dilanjutkan dengan bahasan tentang sifat monoton dan $\varepsilon -$ *adjoined* dari fungsi mayor dan fungsi minor.

Definisi dan Contoh Fungsi Mayor dan Fungsi Minor

Misalkan fungsi $f:[a,b]\rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty,-\infty\}$ dengan $a,b\in \mathbb{R}$. Berikut ini definisi dari fungsi mayor dan fungsi minor dari fungsi f pada $[a,b]$.

Definisi 3.1.1

Suatu fungsi ψ disebut fungsi mayor untuk f pada interval $[a,b]$ jika

$-\infty \neq \underline{D}\psi(x) \geq f(x)$, *untuk setiap* $x\in [a,b]$.

Definisi 3.1.2

Suatu fungsi φ disebut fungsi Minor untuk f pada interval [a,b] jika

$f(x) \geq \overline{D}\varphi(x) \neq \infty +$ *, untuk setiap* $x \in [a,b]$.

Untuk lebih jelasnya, berikut akan di berikan beberapa contoh fungsi mayor dan fungsi minor dari suatu fungsi f .

Contoh 3.1.3

Misalkan $E := \left\{ x \mid 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2} \right\}$ dan $f : E \to \mathbb{R}$ dengan definisi $f(x) = \sin x$.

Dipilih $\psi(x) = -\cos x$ dan $\varphi(x) = -\cos x - \sin x$, maka diperoleh

$-\infty \neq \underline{D}\psi(x) = \sin x$ dan $+\infty \neq \overline{D}\varphi(x) = \sin x - \cos x$, untuk setiap $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Selanjutnya dipenuhi kondisi-kondisi sebagai berikut :

$-\infty \neq \underline{D}\psi(x) = \sin x \geq f(x)$ dan $+\infty \neq \overline{D}\varphi(x) = \sin x - \cos x \leq f(x)$ untuk setiap $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Berdasarkan definisi 3.1.1 dan 3.1.2 fungsi ψ adalah fungsi mayor dari f dan φ adalah fungsi minor dari f pada $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Contoh 3.1.4

Misalkan E = [1,3], $f: E \to \mathbb{R}$ dengan $f(x) = 2x$. Dipilih $\psi(x) = x^2 - 1$ dan $\varphi(x) = x^2 - 1$, maka diperoleh $-\infty \neq \underline{D}\psi(x) = 2x$ dan $+\infty \neq \overline{D}\varphi(x) = 2x$, untuk setiap $x \in [1,3]$. Selanjutnya dipenuhi kondisi-kondisi $-\infty \neq \underline{D}\psi(x) = 2x \geq f(x)$ dan $+\infty \neq \overline{D}\varphi(x) = 2x \leq f(x)$, untuk setiap $x \in [1,3]$. Berdasarkan definisi 3.1.1 dan 3.1.2 fungsi ψ adalah fungsi mayor dari f dan φ adalah fungsi minor dari f pada $[1,3]$.

Sifat Monoton dan $\varepsilon - adjoined$ dari Fungsi Mayor dan Minor

Berikut akan dibahas kemonoton dari fungsi mayor dan minor, kemudian dilanjutkan dengan sifat $\varepsilon - adjoined$ dari fungsi mayor dan minor suatu fungsi f pada interval tertutup [a,b].

Teorema 3.2.1

Jika ψ fungsi Mayor dan φ fungsi minor dari f pada interval $[a,b]$ dan ψ, φ masing-masing terdiferensiabel hampir disetiap $x \in [a,b]$ kecuali pada himpunan denumerabel, maka fungsi $\psi - \varphi$ monoton naik pada interval $[a,b]$.

***Bukti** :*

Diberikan sembarang fungsi mayor ψ dan fungsi minor φ dari f pada interval [a,b] yang terdiferensial hampir disetiap $x \in [a,b]$. Berdasarkan teorema 2.5.7 dan teorema 2.5.2 berlaku

$$\underline{D}\left(\psi(x)-\varphi(x)\right)\geq \underline{D}\psi(x)+\underline{D}(-\varphi(x))\geq \underline{D}\psi(x)-\overline{D}\varphi(x)\geq \psi'(x)-\varphi'(x) \qquad \ldots\ldots(1)$$

hampir disetiap $x\in[a,b]$. Selanjutnya berdasarkan definisi 3.1.1 dan 3.1.2 diketahui bahwa

$$\underline{D}\psi(x)\geq f(x)\geq \overline{D}\varphi(x),$$

tetapi berdasarkan definisi 2.5.5 (c) diperoleh

$$\psi'(x)\geq f(x)\geq \varphi'(x) \qquad \ldots\ldots.(2)$$

Akibatnya dari (1) dan (2) diperoleh

$$\underline{D}\left(\psi(x)-\varphi(x)\right)\geq \psi'(x)-\varphi'(x)\geq 0$$

Jadi dapat disimpulkan bahwa $\psi-\varphi$ merupakan fungsi yang monoton naik hampir disetiap $x\in[a,b]$. ■

Contoh 3.2.2

Misalkan fungsi- fungsi pada contoh 3.1.2 yaitu $\psi(x)=-\cos x$ dan $\varphi(x)=-\cos x-\sin x$ yang berturut-turut merupakan fungsi Mayor dan fungsi minor untuk fungsi $f(x)=\sin x$ pada interval $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$. Misalkan pula :

$$\begin{aligned} g(x) &= \psi(x)-\varphi(x) \\ &= (-\cos x)-(-\cos x-\sin x) \\ &= \sin x \qquad\qquad \text{untuk setiap } x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

Karena $g'(x) = \cos x \geq 0$ untuk setiap $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, ini berarti $\psi - \varphi$ monoton naik pada interval $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Berikut ini definisi dari fungsi mayor dan fungsi minor yang $\varepsilon - adjoined$ ke suatu fungsi f. Fungsi-fungsi $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$, dan φ^4 berturut-turut akan disebut fungsi mayor kanan, mayor kiri, minor kiri, dan minor kanan dari fungsi f.

Definisi 3.2.3

Misalkan f suatu fungsi yang terdefinisi pada interval $[a,b]$. Fungsi-fungsi $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$, dan φ^4 disebut $\varepsilon - adjoined$ ke f *pada interval* $[a,b]$ *jika :*

a) $\varphi^i(x)$ *kontinu pada interval [a,b] dan* $\varphi^i(a) = 0$ *untuk* $i, j = 1, 2, 3, 4$ *;*

b) kecuali mungkin untuk suatu himpunan yang denumerable kondisi-kondisi berikut berlaku

$$-\infty \neq D_+\varphi^1 \geq f\ , \qquad -\infty \neq D_-\varphi^2 \geq f$$

$$+\infty \neq D^-\varphi^3 \leq f\ , \qquad +\infty \neq D^+\varphi^4 \leq f$$

c) *fungsi* $\varphi^i(x)$ *memenuhi kondisi* $\left|\varphi^i(b) - \varphi^j(b)\right| < \varepsilon$ *untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *dengan* $i, j = 1, 2, 3, 4$.

Contoh 3.2.4

Misalkan f adalah fungsi yang didefinisikan pada contoh 3.1.4. Dipilih $\varphi^i(x) = x^2 - 1$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$, maka diperoleh kondisi-kondisi sebagai berikut:

a) Fungsi-fungsi $\varphi^i(x) = x^2 - 1$ kontinu pada interval [1,3], dan $\varphi^i(1) = 1 - 1 = 0$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$.

b) Fungsi-fungsi $\varphi^i(x)$ untuk $i = 1, 2, 3, 4$ merupakan fungsi polinom maka fungsi-fungsi tersebut akan terdiferensialkan di $\mathbb{R}$, selanjutnya akan berlaku

$$-\infty \neq D_+\varphi^1(x) = 2x \geq f(x), \qquad -\infty \neq D_-\varphi^2(x) = 2x \geq f(x)$$

$$+\infty \neq D^-\varphi^3(x) = 2x \leq f(x), \qquad +\infty \neq D^+\varphi^4(x) = 2x \leq f(x)$$

c) Untuk setiap $\varepsilon > 0$ berlaku $\left|\varphi^i(3) - \varphi^i(3)\right| = \left|3^2 - 1 - 3^2 + 1\right| = 0 < \varepsilon$

Jadi berdasarkan definisi 3.2.3, fungsi-fungsi $\varphi^i(x) = x^2 - 1$ merupakan fungsi-fungsi yang $\varepsilon - adjoined$ ke f pada interval [1,3], untuk $i = 1, 2, 3, 4$.

Berikut ini akan bahas satu sifat dari fungsi-fungsi yang $\varepsilon - adjoined$ ke suatu fungsi f pada interval [a,b] yang akan digunakan untuk menunjukkan sifat dari integral Perron pada bab V.

Teorema 3.2.5

Jika fungsi $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ $\varepsilon - adjoined$ *ke* f *pada* $[a,b]$, *maka fungsi* $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ *juga* $\varepsilon - adjoined$ *ke* f *pada* $[a,x]$ *untuk setiap* $x \in (a,b]$.

Bukti :

Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$ dan $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ yang $\varepsilon - adjoined$ ke f pada interval [a,b]. Berdasarkan definisi 3.2.3 diketahui bahwa $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ kontinu pada interval [a,b] dengan $\varphi^i(a) = 0$ untuk $i, j = 1, 2, 3, 4$, dan fungsi-fungsi $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ berturut-turut merupakan fungsi mayor kanan, mayor kiri, minor kiri, dan minor kanan dari fungsi f pada interval [a,b]. Akan ditunjukkan bahwa $0 \le \varphi^1(x) - \varphi^3(x) < \varepsilon$. Misalkan $\varphi^1 > \varphi^2$ dan $\varphi^3 < \varphi^4$, berdasarkan definisi 3.2.3 nilai maksimum dari $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x), \varphi^4(x)$ adalah nilai $\varphi^1(x)$, dan nilai minimum dari $\varphi^1(x), \varphi^2(x), \varphi^3(x), \varphi^4(x)$ adalah nilai $\varphi^3(x)$. Ambil sembarang $x \in [a,b]$ dan pandang selang $[a,x]$. Berdasarkan teorema 3.2.1 fungsi $\varphi^1 - \varphi^3$ merupakan fungsi yang monoton naik sehingga untuk $x \le b$ berlaku

$$0 \le \varphi^1(x) - \varphi^3(x) \le \varphi^1(b) - \varphi^3(b) < \varepsilon \ .$$

Akibatnya $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3, \varphi^4$ akan $\varepsilon - adjoined$ ke f pada $[a,x]$ ■