BAB V

KETERKAITAN INTEGRAL PERRON DENGAN INTEGRAL HENSTOCK

Pada bab sebelumnya telah ditunjukkan bahwa integral Perron merupakan perluasan dari integral Riemann. Salah satu integral lain yang merupakan perluasan dari integral Riemann adalah integral Henstock. Pada bab ini akan ditunjukkan bahwa kedua integral tersebut saling terhubung satu sama lainnya. Pertama-tama akan ditunjukkan jika suatu fungsi terintegral Perron mengakibatkan fungsi tersebut terintegral Henstock dan selanjutnya kebalikannya.

Teorema 5.1

Jika $f \in \mathrm{P}^*[a,b]$, *maka* $f \in R^*[a,b]$ *dengan nilai yang sama.*

Bukti :

Diketahui f terintegral-P* pada interval $[a,b]$, artinya untuk setiap $\varepsilon > 0$ terdapat fungsi mayor ψ dan fungsi minor φ dari fungsi f yang memenuhi $\psi(a) = \varphi(a) = 0$ dan $0 \le \psi(b) - \varphi(b) < \varepsilon$. Berdasarkan definisi 3.1.1 dan 3.1.2 dapat dituliskan

$$\underline{D}\psi(x) \ge f(x) > f(x) - \varepsilon$$
$$\overline{D}\varphi(x) \le f(x) < f(x) + \varepsilon$$

Berdasarkan teorema 4.3.2, maka terdapat fungsi F yang memenuhi

$$\varphi \le F \le \psi \qquad \text{......(1)}$$

dan F merupakan primitif dari f. Berdasarkan ilustrasi pada bagian 2.8 maka terdapat gauge $\delta > 0$ pada $[a,b]$ sehingga dengan menggunakan teorema 2.8.2, terdapat $\delta -$ *fine* $\dot{P}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga jika

$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset \left(\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i)\right)$ dengan $i = 1, 2, ..., n$,

akan berlaku :

a) Berdasarkan $\underline{D}\psi(x) \ge f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ didapatkan

$$f(\xi_i) \le \underline{D}\psi(\xi_i) = \liminf_{x \to \xi_i} \frac{\psi(x) - \psi(\xi_i)}{x - \xi_i} \le \lim_{x \to \xi_i} \frac{\psi(x) - \psi(\xi_i)}{x - \xi_i}$$

sehingga

$$f(\xi_i) \le \frac{\psi(x) - \psi(\xi_i)}{x - \xi_i}$$

$$\left(f(\xi_i) - \varepsilon\right)\left(x - \xi_i\right) \le \psi(x) - \psi(\xi_i)$$

$$\left(f(\xi_i) - \varepsilon\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) \le \psi(x_i) - \psi(x_{i-1})$$

$$f(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) - \varepsilon\left(x_i - x_{i-1}\right) \le \psi(x_i) - \psi(x_{i-1}) = \psi(x_{i-1}, x_i) \qquad \text{.......(2)}$$

b) $\overline{D}\varphi(x) \le f(x)$ untuk setiap $x \in [a,b]$ didapatkan

$$\varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = \varphi(x_{i-1}, x_i) \le f(\xi_i)\left(x_i - x_{i-1}\right) + \varepsilon\left(x_i - x_{i-1}\right) \qquad \text{.........(3)}$$

Sekarang berdasarkan (1), (2) dan (3) , didapatkan

$$\varphi(x_{i-1}, x_i) \le F(x_{i-1}, x_i) \le \psi(x_{i-1}, x_i)$$

$$\begin{aligned}\varphi(x_{i-1}, x_i) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) &\le F(x_{i-1}, x_i) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \varepsilon(x_i - x_{i-1}) \\ &\le F(x_{i-1}, x_i) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}),\end{aligned}$$

sedangkan

$$F(x_{i-1},x_i)-f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\leq\psi(x_{i-1},x_i)-\varphi(x_{i-1},x_i)+\varepsilon(x_i-x_{i-1}).$$

Sehingga

$$-\left(\psi(x_{i-1},x_i)-\varphi(x_{i-1},x_i)+\varepsilon(x_i-x_{i-1})\right)\leq F(x_{i-1},x_i)-f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\leq\psi(x_{i-1},x_i)-\varphi(x_{i-1},x_i)+\varepsilon(x_i-x_{i-1})$$

$$\left|F(x_{i-1},x_i)-f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right|\leq\psi(x_{i-1},x_i)-\varphi(x_{i-1},x_i)+\varepsilon(x_i-x_{i-1}).$$

dengan menjumlahkannya pada $\dot{P}$ diperoleh

$$\begin{aligned}\left|F(a,b)-\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})\right| &\leq\psi(a,b)-\varphi(a,b)+\varepsilon(b-a)\\ &<\varepsilon+\varepsilon(b-a)\end{aligned}$$

karena untuk setiap $\varepsilon>0$ ada gauge $\delta>0$ sedemikian sehingga untuk sebarang partisi $\delta-fine$ $\dot{P}$ pada $[a,b]$ berlaku $\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})-F(a,b)\right|<\varepsilon$ jadi dapat disimpulkan bahwa f terintegral Henstock dengan nilai yang sama yaitu $F(a,b)=F(b)-F(a)$.■

Berikut ini akan diberikan contoh fungsi yang memenuhi teorema 5.1.

Contoh 5.2

Misalkan $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, didefinisikan sebagai

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & \text{jika } x=\dfrac{1}{k} \text{ dengan } k\in\mathbb{N}\\ 0 & \text{jika } x\in[0,1]-\left\{\dfrac{1}{k}:k\in\mathbb{N}\right\}\end{cases}$$

Akan ditunjukkan f terintegral Perron dan juga terintegral Henstock pada $[0,1]$.

Bukti :

Pertama-tama akan dibuktikan bahwa f terintegral Perron pada $[0,1]$ dan selanjutnya akan dibuktikan juga fungsi f terintegral Henstock pada $[0,1]$.

Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan contoh 2.6.2 bahwa Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}_1$ pada $[0,1]$ merupakan null set, akibatnya menurut 2.6.3 akan ada fungsi mayor dan fungsi minor dari f pada $[0,1]$. Misalkan didefinisikan fungsi

$$F(x) = \begin{cases} \ln x & \text{jika } x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{jika } x \in [0,1] - \left\{ x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\} \end{cases}$$

karena F diferensiabel untuk setiap $x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$ sehingga berlaku

$$\overline{D}F(x) = \underline{D}F(x) = F'(x) = \frac{1}{x}.$$

Akan ditentukan fungsi mayor dan fungsi minor dari f pada $[0,1]$. Misalkan

$$\psi(x) = \begin{cases} F(x) - F(0) & \text{jika } x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{jika } x \in [0,1] - \left\{ x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\} \end{cases}$$

dan

$$\varphi(x)=\begin{cases} F(x)-F(0) & \text{jika } x=\dfrac{1}{k},k\in\mathbb{N} \\ 0 & \text{jika } \; x\in[0,1]-\left\{x=\dfrac{1}{k},k\in\mathbb{N}\right\} \end{cases}$$

berdasarkan definisi kedua fungsi tersebut, diketahui bahwa ψ dan φ kontinu pada $[0,1]$, dan $\psi(0)=\varphi(0)=0$, selanjutnya diberikan sembarang $\varepsilon>0$ sehingga berlaku kondisi $\psi(1)-\varphi(1)=\left[\left(F(1)-F(0)\right)-\left(F(1)-F(0)\right)\right]=0<\varepsilon$. Akibatnya f terintegral Perron pada $[0,1]$. Karena F terdefinisi dan terdiferensialkan hampir disetiap $[0,1]$ sehingga berdasarkan teorema 4.3.13 berlaku

$$(P^*)\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=\ln(1)-0=0\ .$$

Berikut ini akan ditunjukkan fungsi $f\in R^*[0,1]$ dan nilai $(R^*)\int_0^1 f(x)dx=0$.

Diberikan sembarang $\varepsilon>0$, dan didefinisikan gauge pada $[0,1]$ sebagai :

$$\delta_\varepsilon(x)=\begin{cases} \dfrac{\varepsilon x}{2^{\frac{2x+1}{x}}} & \text{jika } x=\dfrac{1}{k},k\in\mathbb{N} \\ 1 & \text{jika } \; x\in[0,1]-\left\{x=\dfrac{1}{k},k\in\mathbb{N}\right\} \end{cases}$$

Jika $\dot{P}$ merupakan $\delta-$ *fine* pada $[0,1]$, maka $x_i-x_{i-1}\le 2\delta_\varepsilon(\xi_i)$. Berikutnya, karena hanya $x=\dfrac{1}{k}$ yang berpengaruh terhadap jumlah Riemann, sehingga dipilih $\xi_i=\dfrac{1}{k}$.

Akibatnya $0 < f\left(\frac{1}{k}\right)\left(x_i - x_{i-1}\right) = k\left(x_i - x_{i-1}\right) \leq k 2\delta_{\varepsilon}(\xi_i) = 2k \dfrac{\varepsilon \xi_i}{2^{\frac{2\xi_i + 1}{\xi_i}}} = \dfrac{\varepsilon}{2^{k+1}}$, dengan menjumlahkan pada $\dot{P}$, didapatkan :

$$0 \leq S(f;\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k\left(x_i - x_{i-1}\right) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon \, .$$

Dapat disimpulkan bahwa $f \in R^*[0,1]$ dan $(R^*)\int_0^1 f(x)dx = 0$.

Teorema 5.3

Jika $f \in R^*[a,b]$, maka $f \in \mathrm{P}^*[a,b]$ dan nilainya sama.

Bukti :

Diketahui f terintegralkan Henstock pada interval $[a,b]$, misalkan F merupakan primitif dari f, berdasarkan teorema 2.8.4 untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada gauge $\delta > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang partisi $\delta -$ *fine* $\dot{P} = \{[x_i, x_{i-1}];\xi_i\}$ pada $[a,b]$ berlaku $\sum_{i=1}^{n}\left|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})\right| < \varepsilon$, dengan $F(x_{i-1}, x_i) = F(x_i) - F(x_{i-1})$ menyatakan nilai integral pada sembarang partisi $[x_{i-1,} x_i] \subseteq [a,b]$. Ambil sembarang $x \in [a,b]$ dan untuk sebarang partisi $\delta -$ *fine* $\dot{P} = \{[x_i, x_{i-1}];\xi_i\}$ pada $[a,x]$ didefinisikan

$$G(x) = \sup \sum_{i=1}^{n} \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - F(x_{i-1}, x_i) \right|$$

dengan $G(a) = 0$ dan $G(b) < \varepsilon$.

Akan ditunjukkan terdapat fungsi mayor dan fungsi minor pada interval $[a,b]$. Misalkan $G(x,y) = G(y) - G(x)$ dan $x < y$, $x, y \in [a,b]$. Sekarang untuk setiap $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \subset (\xi_i - \delta(\xi_i), \xi_i + \delta(\xi_i))$ dapat ditulis

$$G(x) = \sup \sum_{i=1}^{n} \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - F(x_{i-1}, x_i) \right|, \quad \text{dengan } x_i \in [a, x]$$

$$G(y) = \sup \sum_{j=1}^{n} \left| f(\xi_j)(y_j - y_{j-1}) - F(y_{j-1}, y_j) \right|, \quad \text{dengan } \mathrm{y}_j \in [a, y]$$

dengan mengurangkan $G(y) - G(x)$ didapatkan

$$\begin{aligned} G(y) - G(x) &= \sup \sum_{j=1}^{n} \left| f(\xi_j)(y_j - y_{j-1}) - F(y_{j-1}, y_j) \right| - \sup \sum_{i=1}^{n} \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - F(x_{i-1}, x_i) \right| \\ &\geq \sum_{j=1}^{n} \left| f(\xi_j)(y_j - y_{j-1}) - F(y_{j-1}, y_j) \right| - \sum_{i=1}^{n} \left| f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - F(x_{i-1}, x_i) \right| \\ &\geq \left| f(\xi_j)(y - a) - F(a, y) \right| - \left| f(\xi_i)(x - a) - F(a, x) \right| \\ &\geq \left| f(\xi)(y - x) - F(x, y) \right| \end{aligned}$$

atau dengan kata lain $\left| f(\xi)(y - x) - F(x, y) \right| \leq G(x, y)$. Sehingga berlaku

$$F(x, y) - G(x, y) \leq f(\xi)(y - x) \leq F(x, y) + G(x, y)$$

Kemudian ketaksamaan tersebut dibagi dengan $y - x$ dan ditentukan nilai limitnya, sehingga didapatkan

$$\lim_{y \to x} \left(\frac{F(x, y) - G(x, y)}{y - x} \right) \leq \lim_{y \to x} \left(\frac{f(\xi)(y - x)}{y - x} \right) \leq \lim_{y \to x} \left(\frac{F(x, y) + G(x, y)}{y - x} \right)$$

$$\lim_{y\to x}\left(\frac{F(x,y)-G(x,y)}{y-x}\right)\leq f(\xi)\leq\lim_{y\to x}\left(\frac{F(x,y)+G(x,y)}{y-x}\right)$$

Berdasarkan definisi derivatif dan sifat derivatif atas dan bawah, nilai limit tersebut akan memenuhi $\overline{D}\left(F(x)-G(x)\right)\leq f(\xi)\leq \underline{D}\left(F(x)+G(x)\right)$ untuk setiap $x\in[a,b]$.

Karena ξ juga sembarang dan memenuhi $\delta-$ *fine* $\dot{P}=\{[x_i,x_{i-1}];\xi_i\}$ sehingga dapat dituliskan

$$\overline{D}\left(F(\xi)-G(\xi)\right)\leq f(\xi)\leq \underline{D}\left(F(\xi)+G(\xi)\right);$$

dari ketaksaman tersebut didapatkan fungsi minor $F-G$ dan fungsi mayor $F+G$ yang memenuhi

$$F(a)+G(a)=\left(\left(F(a)-F(a)\right)+0\right)=0=\left(\left(F(a)-F(a)\right)-G(a)\right)=F(a)-G(a)$$

dan

$$0\leq\left(F(b)+G(b)\right)-\left(F(b)-G(b)\right)=2G(b)<2\varepsilon$$

akibatnya, f terintegral Perron pada interval $[a,b]$. ■

Contoh 5.4

Misalkan f *fungsi Dirichlet yang didefinisikan oleh* $f(x)=1$, *jika* x *bilangan rasional dan* $f(x)=0$, *jika* x *bilangan irrasional. Akan dibuktikan fungsi* f *terintegral Henstock pada* $[0,1]$ *ke* 0.

Bukti:

Misalkan bilangan-bilangan rasional pada $[0,1]$ disebut sebagai $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Diberikan $\varepsilon > 0$ didefinisikan $\delta(r_k) = \dfrac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ dan $\delta(x) = 1$, untuk x bilangan irrasional. Diketahui $\delta > 0$ adalah gauge pada $[0,1]$ dan jika partisi $\dot{P} = \{([x_{i-1}, x_i], \xi_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah $\delta - fine$, maka $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta(\xi_i)$. Karena nilai $f(r_k)(x_i - x_{i-1})$ tak nol hanya pada bilangan rasional dengan label $\xi_i = r_k$, maka

$$0 < f(r_k)(x_i - x_{i-1}) = 1.(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Dan karena setiap label dapat terjadi dalam setiap dua subinterval

$$0 < \sum_{k=1}^{n} f(r_k)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon.$$

Dengan demikian untuk untuk ξ_i bilangan rasional maupun irrasional berlaku

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 \right| < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka f terintegral Henstock pada $[0,1]$ dan $(R^*)\int_0^1 f = 0$.

Berikut ini akan ditunjukkan bahwa $f \in P^*[0,1]$ dan $(P^*)\int_0^1 f = 0$. Diberikan sembarang $\varepsilon > 0$. Berdasarkan contoh 2.6.2 bahwa Himpunan bilangan rasional $\mathbb{Q}_1$

pada $[0,1]$ merupakan null set, akibatnya menurut 2.6.3 akan ada fungsi mayor dan fungsi minor dari f pada $[0,1]$. Misalkan didefinisikan fungsi

$$F(x)=\begin{cases} x & \text{jika } x\in[0,1] \text{ dan } x\in \mathbb{Q}_1 \\ 1 & \text{jika } x=0 \\ 0 & \text{jika } x\in[0,1] \text{ dan } x\notin \mathbb{Q}_1 \end{cases}$$

karena F diferensiabel untuk setiap x bilangan Rasional pada [a,b] sehingga berlaku

$$\overline{D}F(x)=\underline{D}F(x)=F'(x)=1,$$

selanjutnya akan ditentukan fungsi mayor dan fungsi minor dari f pada $[0,1]$. Misalkan

$$\psi(x)=\begin{cases} F(x)-F(0) & \text{jika } x\in \mathbb{Q}_1 \\ 0 & \text{jika } x\in[0,1]-\mathbb{Q}_1 \end{cases}$$

dan

$$\varphi(x)=\begin{cases} F(x)-F(0) & \text{jika } x\in \mathbb{Q}_1 \\ 0 & \text{jika } x\in[0,1]-\mathbb{Q}_1 \end{cases}$$

berdasarkan definisi tersebut di atas, diketahui bahwa ψ dan φ kontinu pada $[0,1]$, dan $\psi(0)=\varphi(0)=0$, selanjutnya diberikan sembarang $\varepsilon>0$ sehingga berlaku kondisi $\psi(1)-\varphi(1)=\left[\left(F(1)-F(0)\right)-\left(F(1)-F(0)\right)\right]=0<\varepsilon$. Berdasarkan teorema 4.2.1, maka dapat disimpulkan bahwa fungsi f terintegral Perron pada $[0,1]$. Karena F terdefinisi dan terdiferensialkan hampir disetiap $[0,1]$ sehingga berdasarkan teorema 4.3.13 berlaku $(P^*)\int_0^1 f(x)dx=F(1)-F(0)=1-1=0$.