BAB III

PELABELAN KOMBINASI

3.1 Konsep Pelabelan Kombinasi

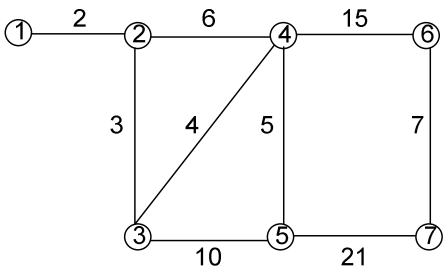
Pelabelan kombinasi dari suatu graf dengan p titik dan q sisi, $(p,q)-$ graf G, disebut graf kombinasi jika terdapat fungsi bijektif dari $V(G)$ (himpunan titik di G) ke $\{1,2,3,\dots,p\}$ sehingga nilai setiap sisi yang diperoleh dari kombinasi nilai titik ujung yang lebih besar ke nilai titik ujung yang lebih kecil berbeda satu sama lainnya.

Definisi 3.1.1

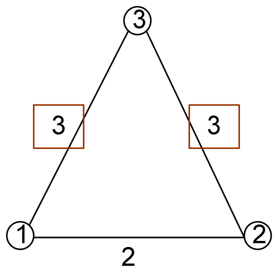
Sebuah graf G dengan banyak titik p dan banyak sisi q disebut graf kombinasi jika terdapat fungsi bijektif $f: V(G) \to \{1,2,3,\dots,p\}$ sehingga menghasilkan pelabelan sisi $g_f: E(G) \to \mathbb{N}$ yang didefinisikan sebagai

$$g_f(uv) = \begin{cases} C_{f(v)}^{f(u)} & \text{jika } f(u) > f(v) \\ C_{f(u)}^{f(v)} & \text{jika } f(v) > f(u) \end{cases}$$

merupakan fungsi injektif dengan $C_{f(v)}^{f(u)}$ menyatakan kombinasi dari sejumlah $f(u)$ sebanyak $f(v)$, dengan $V(G)$ merupakan himpunan titik pada G dan $E(G)$ adalah himpunan sisi pada G, dan $u, v \in V(G)$ yang saling berdampingan (*adjacent*). Pelabelan f tersebut dinamai pelabelan kombinasi dari G. Gambar 3.1.1 merupakan contoh graf kombinasi dan Gambar 3.1.2 bukan merupakan suatu graf kombinasi.



Graf G
Gambar 3.1.1 Graf Kombinasi



Graf H
Gambar 3.1.2 Bukan graf kombinasi

Graf G terdiri dari 7 titik dan 9 sisi, dari graf G tersebut diperoleh $f: V(G) \rightarrow \{1,2,3,\dots,7\}$, $E(G) = \{1,2,3,\dots,9\}$, dan $g_f = \{2,3,4,5,6,7,10,15,21\}$. Sedangkan dari graf H diperoleh $f: V(H) \rightarrow \{1,2,3\}$, $E(H) = \{1,2,3\}$, dan $g_f = \{2,3,3\}$.

3.2 Konsep Pelabelan Kombinasi Pada Graf Khusus.

Pada bagian ini akan dijelaskan mengenai pelabelan kombinasi pada sebuah graf dengan p titik dan q sisi, graf lengkap dengan n titik, yang dinotasikan dengan K_n, *cycle* (graf lingkaran) dengan n titik, dinotasikan dengan C_n, dan graf bipartit lengkap dengan titik disetiap partisi r, dinotasikan dengan $K_{r,r}$.

Teorema 3.2.1

Misal G adalah graf dengan p titik q sisi. Jika G merupakan graf kombinasi, maka berlaku

$$4q \leq \begin{cases} p^2 & \text{jika } p \text{ genap} \\ p^2 - 1 & \text{jika } p \text{ ganjil} \end{cases}$$

Bukti:

Misalkan f adalah fungsi pelabelan kombinasi untuk G, maka terdapat himpunan titik $V(G) = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_p\}$, sehingga $f(v_1) = 1, f(v_2) = 2, f(v_3) = 3, \ldots, f(v_p) = p$. Karena $C_k^p = C_{p-k}^p$, banyak nilai yang berbeda di antara $C_1^p, C_2^p, C_3^p, \ldots, C_{p-1}^p$ tidak lebih dari $\left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor$, di mana $\lfloor x \rfloor$ merupakan bilangan bulat terbesar yang sama atau kurang dari x.

Secara umum, banyak nilai yang berbeda di antara $C_1^{p-r}, C_2^{p-r}, C_3^{p-r}, \ldots, C_{p-r-1}^{p-r}$, $1 \leq r \leq p-2$ tidak lebih dari $\left\lfloor \frac{p-r}{2} \right\rfloor$. Tetapi nilai-nilai yang berbeda di antara $C_1^p, C_2^p, C_3^p, \ldots C_{p-1}^p$ dan nilai-nilai berbeda di antara $C_1^{p-r}, C_2^{p-r}, C_3^{p-r}, \ldots, C_{p-r-1}^{p-r}$, $1 \leq r \leq p-2$, kemungkinan ada nilai yang sama di antara keduanya. Karena f adalah fungsi pelabelan kombinasi untuk graf G, terdapat q nilai sisi yang berbeda pada sisi graf tersebut, sehingga diperoleh

$$q \leq \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{p-1}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{p-(p-2)}{2} \right\rfloor$$

Kasus 1. Misalkan $p = 2k$, maka, dari persamaan di atas, diperoleh

$$\begin{aligned}
q &\leq \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k-1}{2} \right\rfloor + \cdots + \lfloor 1 \rfloor \\
&= k + (k-1) + (k-1) + (k-2) + (k-2) + \cdots + 1 + 1 \\
&= [k + (k-1) + \cdots + 3 + 2 + 1] + [(k-1) + (k-2) + \cdots + 3 + 2 + 1] \\
&= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{(k-1)k}{2} \\
&= \frac{k(k+1) + k(k-1)}{2} \\
&= \frac{2k^2}{2}
\end{aligned}$$

$$= k^2$$
$$= \frac{p^2}{4}$$

Kasus 2. Misalkan $p = 2k + 1$, maka dari persamaan di atas diperoleh

$$q \leq \left\lfloor \frac{2k+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{2k}{2} \right\rfloor + \cdots + \lfloor 1 \rfloor$$
$$= k + k + (k-1) + (k-1) + (k-2) + (k-2) + \cdots + 1 + 1$$
$$= [k + (k-1) + \cdots + 3 + 2 + 1] + [k + (k-1) + \cdots + 3 + 2 + 1]$$
$$= \frac{k(k+1)}{2} + \frac{k(k+1)}{2}$$
$$= \frac{k(k+1) + k(k+1)}{2}$$
$$= \frac{2k^2 + 2k}{2}$$
$$= k^2 + k$$
$$= \frac{p^2 - 1}{4}$$

Dari kedua kasus tersebut, diperoleh bahwa

$$4q \leq \begin{cases} p^2 & \text{jika } p \text{ genap} \\ p^2 - 1 & \text{jika } p \text{ ganjil} \end{cases}$$

Akibat 3.2.1

Dari Teorema. 3.2.1 graf lengkap dengan n titik, yang dinotasikan dengan K_n adalah graf kombinasi jika dan hanya jika $n \leq 2$.

Bukti:

($\Longrightarrow$) Diketahui bahwa K_n adalah graf kombinasi, maka banyaknya sisi pada K_n adalah $\frac{n(n-1)}{2}$. Dari Teorema 3.2.1 diperoleh

$$4\frac{n(n-1)}{2} \leq \begin{cases} n^2 & \text{, jika } n \text{ genap} \\ n^2 - 1 & \text{, jika } n \text{ ganjil} \end{cases}$$

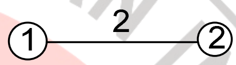
$$2n^2 - 2 \leq \begin{cases} n^2 & , \text{jika } n \text{ genap} \\ n^2 - 1 & , \text{jika } n \text{ ganjil} \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(*)$$

Pertidaksamaan (*) hanya dipenuhi oleh $n = 1$ atau $n = 2$

Jadi, K_n adalah graf kombinasi dengan $n \leq 2$.

($\Leftarrow$) Diketahui $n \leq 2$, maka K_n adalah K_1 dan K_2. K_1 adalah graf lengkap dengan satu titik. Jadi, K_1 adalah graf yang hanya terdiri dari satu titik tanpa sisi. K_2 adala graf lengkap dengan dua titik dan satu sisi.

K_1



K_2

Jadi, untuk $n \leq 2$, K_1 dan K_2 adalah graf kombinasi.

Teorema 3.2.2

Lingkaran C_n merupakan graf kombinasi untuk semua $n > 3$.

Bukti:

Namai titik-titik dari C_n secara berurutan sebagai $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n$ dengan v_1 bertetangga dengan v_n dan v_i bertetangga dengan v_{i+1} untuk $1 \leq i \leq n-1$. Kemudian definisikan pelabelan $f: V(C_n) \rightarrow \{1,2,3,\ldots,n\}$ dengan

$$f(v_i) = \begin{cases} n-1, & i = n \\ n, & i = n-1 \\ i, & 1 \leq i \leq n-2 \end{cases}$$

pelabelan f adalah pelabelan dengan nilai-nilai sisinya $g_f\big(E(C_n)\big) = \left\{2,3,\ldots,n-1,n,\frac{n(n-1)}{2}\right\}$. Perhatikan bahwa nilai-nilai sisinya berbeda, jika tidak, untuk suatu $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq r \leq n-2$,

$$\frac{n(n-1)}{2} = n - r$$

$$n^2 - n = 2n - 2r$$

$n^2 - 3n + 2r = 0$

$n = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8r}}{2}$

Sehingga $9 - 8r > 9$ saat $n \geq 4$. Diperoleh $r < 0$, kontradiksi. Karena itu, untuk $n \geq 4$, C_n merupakan graf kombinasi.

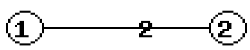
Teorema 3.2.3

Graf bipartit lengkap dengan partisi titik r yang dinotasikan dengan $K_{r,r}$ adalah graf kombinasi jika dan hanya jika $r \leq 2$.

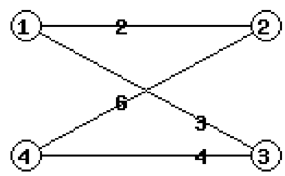
Bukti:

($\Leftarrow$) Diketahui $r \leq 2$, akan dibuktikan $K_{r,r}$ adalah graf kombinasi.

Untuk $r \leq 2$ maka $K_{r,r}$ adalah $K_{1,1}$ dan $K_{2,2}$. Jelas bahwa $K_{1,1}$ dan $K_{2,2}$ adalah graf kombinasi



$K_{1,1}$



$K_{2,2}$

Jadi, $K_{1,1}$ dan $K_{2,2}$ adalah graf kombinasi.

($\Rightarrow$) Misalkan A dan B adalah himpunan label pada graf bipartit. Tanpa mengurangi keumuman, kita asumsikan bahwa $1 \in A$. Misalkan $A = \{1, x_1, x_2, \ldots, x_{r-1}\}$ dengan $1 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{r-1}$. Karena $C_1^{x+1} = C_x^{x+1}$

$1, x \in A \implies 1 + x$ bukan anggota B (1) karena $1 + x_{r-2}$ bukan anggota B, $1 + x_{r-2} \in A$ yang berarti bahwa $1 + x_{r-2} = x_{r-1}$. Begitu pula dengan $1 + x_{r-3} \in A$ yang berarti bahwa $1 + x_{r-3} = x_{r-2}$. Kita dapat melihat bahwa

$$A = \{1, x_1, x_1 + 1, x_1 + 2, \dots, x_1 + r - 2\}$$

misalkan $B = \{y_1, y_2, y_3, \dots, y_r\}$ dengan $y_1 < y_2 < y_3 < \cdots < y_r$. Kita akan mempunyai satu dan hanya satu dari

$$1 < x_1 + 1 < x_1 + 2 < \cdots < x_1 + r - 2 < y_1 < y_2 \qquad (2)$$

atau

$$1 < y_1 < y_2 < \cdots < y_r < x_1 < x_1 + 1 < x_1 + 2 < \cdots < x_1 + r - 2 \qquad (3)$$

atau

terdapat k, $0 < k < r$, sehingga

$$1 < y_1 < y_2 < \cdots < y_k < x_1 < x_1 + 1 < x_1 + 2$$
$$< \cdots < x_1 + r - 2 < y_{k+1} < y_{k+2} < \cdots < y_y \qquad (4)$$

Jika $r \geq 3$ maka, dari (2), 1 dan $x_1 + r - 2$ anggota A. Hal ini berarti bahwa $1 + (x_1 + r - 2) = y_1$ yang anggota B, kontradiksi dengan (1). Dari (3) kita peroleh bahwa $y_1 + y_r = x_1 + 1 \in A$, kontradiksi dengan (1). Karena $1 + (x_1 + r - 2) \in A$, dari (4) kita peroleh $1 + (x_1 + r - 2) = y_{k+1} \in B$, kontradiksi dengan (1). Oleh karena itu $K_{r,r}$ bukan graf kombinasi untuk $r \geq 3$.

Pada bab selanjutnya akan dikemukakan algoritma pelabelan kombinasi pada graf dengan p titik q sisi, graf lengkap K_n , *cycle* (graf lingkaran) C_n , graf bipartit lengkap $K_{r,r}$ yang berdasarkan pada konsep pelabelan pada bab ini dan menampilkan hasil dari program yang telah dibuat.