BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Sampai pada tahun 1970-an ilmu aljabar selalu berkonsentrasi pada metode-metode konstruktif. Akan tetapi setelah penemuan komputer dan perkembangannya, algoritma-algoritma yang bersifat aljabar memegang peranan penting dalam ilmu komputer (Ajwa 2003).

Beberapa tahun kemudian, konsep-konsep baru telah dikembangkan pada bidang komputer aljabar. Hasil-hasil penelitian ahli komputer aljabar memiliki kontribusi penting untuk perkembangan Ilmu Matematika dan Ilmu Komputer. Di antara kontribusi-kontribusi tersebut yang paling popular adalah teori dan algoritma Gröbner (Ajwa 2003).

Konsep dari basis Gröbner adalah penggunaan cara-cara komputasi untuk mencari penyelesaian masalah-masalah dalam ilmu matematika, ilmu komputer, ilmu teknik dan ilmu sains lainnya. Basis Gröbner pertama kali diperkenalkan oleh Bruno Buchberger dalam tesisnya pada tahun 1965. Nama "Basis Gröbner" dipilih oleh Buchberger sebagai penghargaan kepada W. Gröbner sebagai pembimbing tesisnya.

Misalkan diberikan himpunan semua polinomial variabel banyak $K[x_1, \dots, x_n]$ dan ideal polinomial $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ yang dibangun oleh polinomial-polinomial $f_1, \dots, f_s \in K[x_1, \dots, x_n]$. Suatu polinomial

$f \in K[x_1, \dots, x_n]$ dikatakan elemen dari I jika polinomial f dapat dibangun oleh $f_1, \dots, f_s$ atau dapat ditulis $f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s$ dengan $a_1, \dots, a_s, r \in K[x_1, \dots, x_n]$. Untuk mengubah f ke bentuk $f = a_1 f_1 + \cdots + a_s f_s$ digunakan algoritma pembagian pada polinomial variabel banyak, yaitu dengan syarat sisa pembagian f oleh $f_1, \dots, f_s$ adalah nol. Akan tetapi, berbeda dengan algoritma pembagian di polinomial variabel satu, yaitu sisa pembagiannya selalu unik. Pada polinomial variabel banyak sisa pembagiannya tidak unik, artinya jika sisa pembagiannya nol, maka dengan cara merubah urutan dari $f_1, \dots, f_s$ akan dihasilkan sisa pembagian yang bukan nol. Oleh karena itu, akan dicari pembangun yang lain dari I yang menghasilkan sisa nol jika membagi f. Himpunan tersebut dinamakan basis Gröbner.

Misalkan I ideal di $K[x_1, \dots, x_n]$ dan relasi urutan monomial pada $K[x_1, \dots, x_n]$. Himpunan $G = \{g_1, \dots, g_t\} \subset K[x_1, \dots, x_n]$ disebut basis Gröbner untuk ideal I terhadap relasi urutan monomial yang digunakan jika dan hanya jika $\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), \dots, LT(g_t) \rangle$. Untuk mencari basis Gröbner dari suatu ideal digunakan suatu algoritma, algoritma yang digunakan disebut algoritma Buchberger.

Atas dasar itulah, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai Algoritma Basis Gröbner dan mengangkat kajian itu sebagai bahan penyusunan Tugas Akhir.

Selanjutnya tugas akhir ini akan diberi judul "**Algoritma Basis Gröbner**." Pada Tugas Akhir ini, penulis mencoba untuk menelaah beberapa definisi, teorema, algoritma, dan memberikan contoh yang berhubungan dengan teorema-teorema tersebut.

B. Rumusan Masalah

Rumusan masalah pada tugas akhir ini adalah sebagai berikut:

1. Apakah jika setiap $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ yang dapat dibagi habis oleh himpunan pembangun dari ideal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset K[x_1, \dots, x_n]$, maka mengakibatkan $f \in I$?
2. Apakah untuk setiap ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ memiliki basis Gröbner?
3. Bagaimana menjamin $f \in I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle$ dengan menggunakan basis Gröner?
4. Bagaimana mencari basis Gröbner dari suatu ideal polinomial yang diberikan dengan menggunakan Algoritma Buchberger?

C. Batasan Masalah

Untuk mengkaji bahasan tentang algoritma basis Gröbner secara keseluruhan, diperlukan materi yang cukup luas dan mendalam. Oleh karena itu pada Tugas Akhir ini kajian dibatasi pada bagaimana mencari basis Gröbner dengan menggunakan algoritma Buchberger.

D. Tujuan Penulisan

Tujuan penulisan Tugas Akhir ini adalah:

1. Untuk mengetahui apakah jika setiap $f \in K[x_1, \dots, x_n]$ dapat dibagi habis oleh himpunan $\{f_1, \dots, f_s\}$ yang merupakan himpunan pembangun dari ideal $I = \langle f_1, \dots, f_s \rangle \subset K[x_1, \dots, x_n]$, maka mengakibatkan $f \in I$.

2. Untuk mengetahui apakah untuk setiap ideal $I \subset K[x_1, \dots, x_n]$ memiliki basis Gröbner.
3. Untuk mengetahui cara menjamin $f \in I$ dengan menggunakan basis Gröner.
4. Untuk mencari basis Gröbner dari suatu ideal polinomial yang diberikan dengan menggunakan Algoritma Buchberger.

E. Manfaat Penulisan

Melalui penyusunan Tugas Akhir ini, diharapkan dapat memperkaya dan memperluas pengetahuan penulis dan para pembaca pada umumnya mengenai teori ideal di aljabar komutatif.

F. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan (studi literatur). Studi dengan mempelajari teori-teori dari sumber-sumber kepustakaan, seperti buku-buku, catatan, jurnal, dan referensi lainnya yang relevan dengan permasalahan yang sedang dibahas pada Tugas Akhir ini.