BAB III

KONSEP DASAR TEORI GRAF

Teori graf adalah salah satu cabang matematika yang terus berkembang dengan pesat. Teori ini sangat berguna untuk mengembangkan model-model terstruktur dalam berbagai keadaan. “Struktur-struktur yang terdiri atas kumpulan objek-objek yang berkaitan satu sama lain dapat dibuat modelnya dengan sebuah graf, dengan simpul sebagai representasi objeknya, dan sisi sebagai representasi kaitan atau hubungan di antara objek itu” (Kusumah, 1998 : 1).

“Sebuah graf adalah sebuah himpunan terhingga tak kosong yang memuat objek-objek yang disebut simpul dan himpunan pasangan tak urut antara simpul-simpul yang berlainan yang disebut sisi” (Kusumah, 1998 : 8).

Teori graf sering digunakan dalam studi tentang jaringan transportasi, jaringan komunikasi, jaringan listrik, struktur senyawa kimia, pewarnaan peta, desain arsitektur, penjodohan dan bidang yang lainnya. Perkembangan teori graf tidak terlepas dari permasalahan-permasalahan yang harus dipecahkan pada berbagai bidang tersebut, bahkan seringkali sebuah teori lahir dari suatu permasalahan sederhana yang selanjutnya berkembang dengan pesat menjadi teori yang mapan.

3.1 Graf

Definisi 3.1 Graf

Suatu **graf** (*graph*) G adalah sebuah pasangan tak-terurut dari V dan E;

yaitu $G = \{V(G), E(G)\} = \{V, E\}$dengan :

1. V adalah himpunan simpul (*vertex*).
2. E adalah himpunan sisi (*edge*); yaitu pasangan (tak-terurut) dari dua simpul (Kusumah, 1998 : 8).

Mulai saat ini dan seterusnya dalam makalah ini, istilah “simpul” akan diganti dengan “titik” dan “sisi” akan diganti dengan “garis”. Penggantian istilah ini karena dalam kehidupan nyata istilah “titik” dan “garis” lebih sering digunakan dari pada istilah “simpul” dan “sisi”. Dengan begitu orang yang belum pernah belajar atau baru belajar teori graf akan mudah memahami.

Definisi 3.2 Orde

Orde dari graf G, ditulis $|V(G)| = n$, adalah banyaknya titik pada graf.

Definisi 3.3 Ukuran

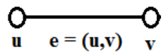
Ukuran dari graf G, ditulis $|E(G)| = m$, adalah banyaknya garis pada graf.

Definisi 3.4 Derajat

Derajat dari suatu titik pada graf G adalah banyaknya titik lain yang terhubung (secara langsung) ke titik tersebut.

Definisi 3.5 Titik Ujung

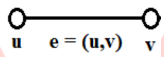
Dua titik pada graf yang dihubungkan oleh suatu garis disebut **titik-titik ujung** (Bondy and Murty, 1976: 3).



Gambar 3.1
u dan *v* adalah titik-titik ujung dari garis *e* = (*u*,*v*) = (*v*,*u*)

Definisi 3.6 Insiden

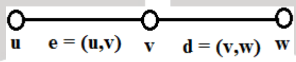
Suatu garis dan suatu titik sebagai titik ujung pada garis tersebut dikatakan saling **berinsiden** atau **bersentuhan** (Bondy and Murty, 1976: 3).



Gambar 3.2
u dan *v* berinsiden dengan garis *e* = (*u*,*v*) = (*v*,*u*)

Definisi 3.7 Garis Ajasen

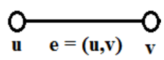
Dua garis pada graf dikatakan saling **berajasen** atau **bertetangga** (secara langsung) jika kedua garis tersebut berinsiden dengan satu titik yang sama (Bondy and Murty, 1976: 3).



Gambar 3.3
garis *e* dan garis *d* saling berajasen

Definisi 3.8 Titik Ajasen

Dua titik pada graf dikatakan saling **berajasen** atau **bertetangga** (secara langsung) jika kedua titik tersebut berinsiden dengan satu garis yang sama (Bondy and Murty, 1976: 3).



Gambar 3.4
titik *u* dan titik *v* saling berajasen

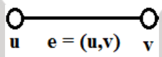
3.2 Penyajian Graf

Graf dapat disajikan dalam 3 cara yang berlainan, yaitu dengan menggunakan himpunan pasangan tak-terurut, diagram dan matriks. Sebuah graf yang dinyatakan dalam bentuk himpunan dapat dinyatakan dalam bentuk diagram atau matriks, dan sebaliknya.

3.2.1 Bentuk Diagram

Dalam bentuk diagram, setiap titik pada graf digambarkan dengan sebuah lingkaran kecil dan setiap garis pada graf digambarkan dengan segmen garis yang menghubungkan 2 titik.

Diameter lingkaran, terisi atau kosong di bagian dalam lingkaran, panjang segmen garis serta kelengkungan segmen garis tidak perlu diperhatikan atau dipermasalahkan.



Gambar 3.5
Bentuk diagram suatu graf

3.2.2 Bentuk Himpunan

Dalam bentuk notasi himpunan, sebuah graf dinyatakan dengan pasangan terurut dari dua himpunan; yaitu himpunan titik dan himpunan garis. Himpunan garisnya merupakan kumpulan dari pasangan tak-terurut dari dua titik.

Contoh 3.1 :

Graf $G = \{V, E\}$ dengan $V = \{u, v\}$ dan $E = \{e = (u, v)\}$.

3.2.3 Bentuk Matriks

Matriks yang digunakan untuk menyajikan sebuah graf adalah matriks ajasensi (*adjacency matrix*) dan matriks insidensi (*incidence matrix*).

Definisi 3.9 Matriks Ajasensi

Matriks ajasensi $A(G) = [a_{jk}]$ dari sebuah graf G didefinisikan dengan

$$a_{jk} \begin{cases} a_{jk} = 1 \text{ , jika } (v_j, v_k) \in E(G) \\ a_{jk} = 0 \text{ , jika } (v_j, v_k) \notin E(G) \end{cases}$$

Definisi 3.10 Matriks Insidensi

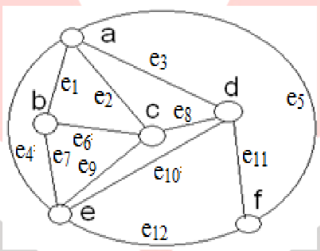
Matriks insidensi $I(G) = [i_{jk}]$ dari sebuah graf G didefinisikan dengan

$$i_{jk} \begin{cases} i_{jk} = 1 \text{ , jika garis } j \text{ berinsiden dengan titik } k \\ i_{jk} = 0 \text{ , jika garis } j \text{ tidak berinsiden dengan titik } k \end{cases}$$

Contoh 3.2 :

Misalkan penulis mengundang 6 teman untuk pesta ulang tahun penulis, mereka memiliki inisial nama a, b, c, d, e, dan f. Diketahui bahwa a saling mengenal dengan b, c, d, e dan f; sedangkan b saling mengenal dengan c dan e; sedangkan c saling mengenal dengan d dan e; sedangkan d saling mengenal dengan e, f; sedangkan e saling mengenal dengan f.

Penulis ingin mengetahui bentuk graf yang terbentuk. Dengan “inisial nama” menyatakan “titik” dan “hubungan saling kenal” menyatakan “garis” maka dapat dibuat graf berikut :



Gambar 3.6

$G = \{V, E\}$ dengan
$V = \{$ a, b , c, d, e, f$\}$ dan
$E = \{e_1=(a,b),\ e_2=(a,c),\ e_3=(a,d),\ e_4=(a,e),\ e_5=(a,f),\ e_6=(b,c),\ e_7=(b,e),\ e_8=(c,d),\ e_9=(c,e),\ e_{10}=(d,e),\ e_{11}=(d,f),\ e_{12}=(e,f)\}$

Matriks Ajasensi

$$A(G)=\left[a_{jk}\right]=\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline a & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ b & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ c & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ d & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ e & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ f & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

Matriks Insidensi

$$I(G)=\left[i_{jk}\right]=\begin{array}{c|cccccc} & a & b & c & d & e & f \\ \hline e_1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e_2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ e_4 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e_5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ e_6 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ e_7 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ e_8 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ e_9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ e_{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ e_{11} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ e_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

3. 3 Pelabelan Pada Graf

Pelabelan pada graf adalah pemberian kode pada komponen graf, yaitu titik dan garis. Pelabelan pada graf biasanya menggunakan warna.

Definisi 3.11 Pewarnaan Sejati (*Proper Colouring*)

Titik-titik atau garis-garis yang saling ajasen tidak diperbolehkan diberi kode yang sama :

1. v_i dan v_j saling ajasen dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$; $i \neq j$ dan $|V| = n$ maka tidak diperbolehkan $cv_i = cv_j$.
2. e_i dan e_j saling ajasen dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, m$; $i \neq j$ dan $|E| = m$ maka tidak diperbolehkan $ce_i = ce_j$ (Bondy and Murty, 1976: 91).

cv_i dan cv_j adalah code warna pada v_i dan v_j.

Definisi 3.12 Pewarnaan Tak Sejati (*Improper Colouring*)

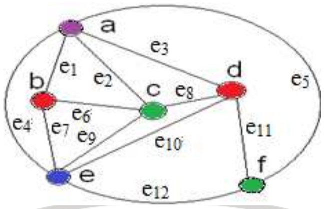
Titik-titik atau garis-garis yang saling ajasen diperbolehkan diberi kode yang sama :

1. v_i dan v_j saling ajasen dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, n$; $i \neq j$ dan $|V| = n$ maka diperbolehkan $cv_i = cv_j$.
2. e_i dan e_j saling ajasen dengan $i, j = 1, 2, 3, \dots, m$; $i \neq j$ dan $|E| = m$ maka diperbolehkan $ce_i = ev_j$ (Bondy and Murty, 1976: 91).

cv_i dan cv_j adalah code warna pada v_i dan v_j.

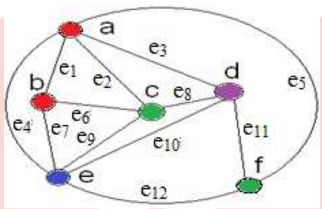
Contoh 3.3 :

1. Pewarnaan Sejati :



Gambar 3.7

2. Pewarnaan Tak Sejati :



Gambar 3.8

Definisi 3.13

Bilangan kromatik titik $\chi(G)$ menyatakan total warna minimum untuk mewarnai titik-titik dengan syarat dua titik yang berajasen harus mempunyai warna yang berbeda (Bondy and Murty, 1976: 117).

Definisi 3.14

Bilangan kromatik garis $\chi'(G)$ menyatakan total warna minimum untuk mewarnai garis-garis dengan syarat dua garis yang berajasen harus mempunyai warna yang berbeda (Bondy and Murty, 1976: 91).

3.4 Graf Khusus

Definisi 3.15 Graf tak Berarah (*Undirected Graph*)

Graf tak-berarah $G = \{V,E\}$ adalah graf dengan syarat :

1. V adalah suatu himpunan yang anggotanya disebut *vertex* atau titik.
2. E adalah suatu himpunan dari pasangan (tak-terurut) dari dua titik, disebut *edge* atau garis (Bondy and Murty, 1976: 1).

Gambar 3.9
$e = (v_1,v_2) = (v_2,v_1)$

Definisi 3.16 Graf Berarah (*Directed Graph*)

Graf berarah $G = \{V,A\}$ adalah graf dengan syarat :

1. V adalah suatu himpunan yang anggotanya disebut *vertex* atau titik.
2. A adalah suatu himpunan dari pasangan (terurut) dari titik disebut *directed edges*, *arcs* atau anak panah karena memiliki arah yang menunjukan awal dan akhir.

Suatu *arc* e = *arc* (x,y) dianggap berarah dari x ke y ; dengan x disebut ekor dan y disebut kepala dari anak panah. *arc* e' = *arc* (y,x) kebalikan dari *arc* e = *arc* (x,y) (Bondy and Murty, 1976: 171).

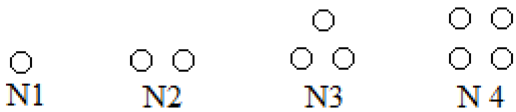
Gambar 3.10
Arc e_1 = arc (v_1,v_2)

Gambar 3.11
Arc e_2 = arc (v_2,v_1)

Jika suatu graf tidak memiliki keterangan apakah graf berarah atau graf tidak berarah maka diasumsikan graf yang dimaksud adalah graf tidak berarah.

Definisi 3.17 Graf Kosong (*Null Graph*)

Graf nol atau graf kosong adalah graf yang tidak memiliki garis. Notasinya adalah N_n dengan n banyaknya titik dari N (Kusumah, 1998 : 13).

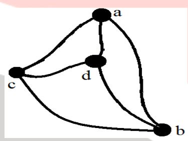


Gambar 3.12

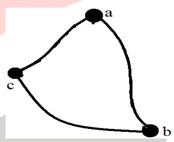
Definisi 3.18 Graf Bagian (*Subgraph*)

Graf bagian H dari graf $G = \{V,E\}$ adalah pasangan tak-terurut dari W dan F yaitu $H = \{W,F\}$ dengan $W \subseteq V$ dan $F \subseteq E$, dinotasikan dengan $H \subseteq G$

(Bondy and Murty, 1976: 8).



Gambar 3.13
Graf $G = (V,E)$
$V = (a, b, c, d)$
$E = \{(a,b), (a,c), (a,d), (b,d), (c,d)\}$



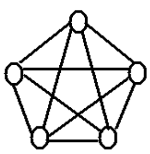
Gambar 3.14
Graf $H = (W,F)$
$W = (a, b, c)$
$F = \{(a,b), (b,c), (c,a)\}$

Definisi 3.19 Graf Teratur (*Regular Graph*)

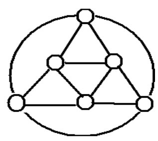
Graf teratur adalah graf yang setiap titiknya mempunyai derajat yang sama. Notasinya adalah R_d dengan d sebagai derajat setiap titiknya.

Banyaknya garis pada graf teratur adalah $m = \frac{n.d}{2}$

(Kusumah, 1998 : 13).



Gambar 3.15
R_4



Gambar 3.16
R_3

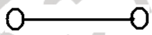
Definisi 3.20 Graf Lengkap (*Complete Graph*)

Graf lengkap adalah graf yang setiap titiknya ajasen dengan semua titik lainnya pada graf tersebut. Simbolnya adalah K_n dengan n banyaknya titik.

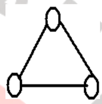
K_n adalah graf teratur berderajat (n - 1)

Banyaknya garis pada K_n adalah $m = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$

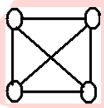
(Kusumah, 1998 : 13).



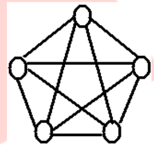
Gambar 3.17
K_2



Gambar 3.18
K_3



Gambar 3.19
K_4



Gambar 3.20
K_5

Misalkan titik-titik $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ adalah titik-titik pada K_n.

Terdapat garis antara x_1 dengan $x_2, x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ jadi ada n-1 garis.

Terdapat garis antara x_2 dengan $x_3, \ldots, x_{n-1}, x_n$ jadi ada n-2 garis.

Terdapat garis antara x_3 dengan $x_4, \ldots, x_{n-1}, x_n$ jadi ada n-3 garis.

Terdapat garis antara x_{n-2} dengan x_{n-1} dan x_n jadi ada 2 garis.

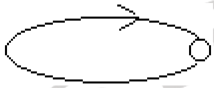
Terdapat garis antara x_{n-1} dengan x_n jadi ada 1 garis.

Jadi total garis ada (n-1) +(n-2) + (n-3) + … + 2 + 1 = $\frac{n(n-1)}{2}$

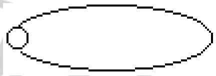
3.5 Peristilahan Pada Graf

Definisi 3.21 (*Loop*)

Loop pada graf berarah adalah garis yang bermula dan berakhir pada titik yang sama. Sedangkan *loop* pada graf tak-berarah adalah garis dengan dua titik ujung yang sama (Bondy and Murty, 1976: 3).



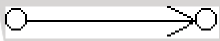
Gambar 3.21
Loop pada graf berarah



Gambar 3.22
Loop pada graf tak-berarah

Definisi 3.22 (*Link*)

Link pada graf berarah adalah garis yang bermula dan berakhir pada titik yang berbeda. Sedangkan *link* pada graf tak-berarah adalah garis dengan dua titik ujung yang berbeda (Bondy and Murty, 1976: 3).

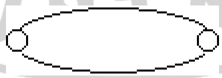


Gambar 3.23
Link pada graf berarah

Gambar 3.24
Link pada graf tak-berarah

Definisi 3.23 *Link* Rangkap (*Multi Link*)

Link rangkap adalah dua *link* berbeda yang sama-sama menghubungkan dua titik ujung berbeda yang sama (Bondy and Murty, 1976: 3).



Gambar 3.25
Link rangkap

Jika suatu graf tidak memuat *loop* atau *link* rangkap maka graf tersebut disebut graf sederhana.

3.6 Jalan, Jejak, Lintasan dan Siklus

Definisi 3.24 Jalan

Sebuah **jalan** dalam graf G adalah urutan tak nol $W = v_0e_1v_1 \ldots v_{i-1}e_iv_i \ldots v_{k-1}e_kv_k$ yang suku-sukunya bergantian antara titik dan garis, demikian sehingga ujung dari e_i adalah v_{i-1} dan v_i untuk $1 \leq i \leq k$. Banyaknya garis pada W adalah panjang jalan tersebut.

Definisi 3.25 Jejak

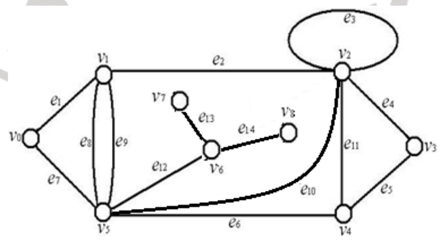
Sebuah **jejak** adalah jalan W yang semua garisnya berlainan, sedangkan **jejak tertutup** adalah jejak yang titik awal dan titik akhirnya sama.

Definisi 3.26 Lintasan dan Siklus

Sebuah **lintasan** P_n adalah jalan W yang semua titiknya berlainan, sedangkan **siklus** C_n adalah lintasan yang titik awal dan titik akhirnya sama. n menyatakan banyaknya titik.

Notasi $C_n = v_0e_1v_1 \ldots v_{i-1}e_iv_i \ldots v_{n-1}e_nv_0$ dapat ditulis $C_n = v_0v_1 \ldots v_{i-1}v_i \ldots v_{n-1}v_0$.

Contoh 3.4 :



Gambar 3.26

Jalan : $v_7e_{13}v_6e_{12}v_5e_7v_0e_1v_1e_8v_5e_9v_1e_2v_2e_3v_2e_{11}v_4e_5v_3e_4v_2e_{10}v_5e_{12}v_6e_{14}v_8$

Jejak : $v_0e_1v_1e_8v_5e_9v_1e_2v_2e_3v_2e_4v_3e_5v_4e_{11}v_2e_{10}v_5e_{12}v_6e_{14}v_8$

Jejak Tertutup : $v_0e_1v_1e_8v_5e_9v_1e_2v_2e_3v_2e_4v_3e_5v_4e_{11}v_2e_{10}v_5e_7v_0$

Lintasan : $v_0e_1v_1e_8v_5e_6v_4e_5v_3 = P_5$

Siklus : $v_0e_1v_1e_2v_2e_{10}v_5e_7v_0 = C_4$

3.7 Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Graf bipartit adalah graf yang titik-titiknya dapat dibagi ke dalam 2 himpunan terpisah V_1 dan V_2 sedemikian sehingga setiap titik pada himpunan V_1 dapat berajasen hanya dengan titik-titik pada himpunan V_2 , begitu pula dengan titik-titik pada himpunan V_2 ; yaitu tidak ada garis yang menghubungkan antara dua titik dalam satu himpunan. Partisi V_1 dan partisi V_2 biasa diringkas menjadi bipartisi (V_1,V_2). Seringkali simbol V_1 ditulis dengan X dan simbol V_2 ditulis dengan Y, sehingga bipartisi (V_1,V_2) ditulis dengan bipartisi (X, Y).

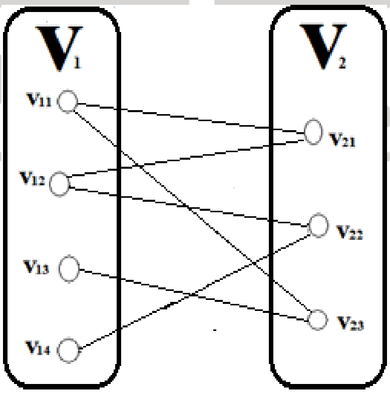
Definisi 3.27 Graf Bipartit (*Bipartite Graph*)

Graf bipartit $G = \{V;E\}$ dengan bipartisi (V_1,V_2) adalah graf dengan syarat :

1. Setiap titik pada himpunan V merupakan anggota dari salah satu himpunan bagian V_1 atau V_2 dengan $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ dan $V_1 \cup V_2 = V$.

2. Setiap garis berbentuk $e = (v_1,v_2)$ dengan $v_1 \in V_1$ dan $v_2 \in V_2$

(Bondy and Murty, 1976: 5).



Gambar 3.27
Graf Bipartit

Berdasarkan **Definisi 3.13**, graf bipartit memiliki bilangan kromatik $\chi(G) = 2$

1. $\forall\ v_{1i}$, $v_{1j} \in V_1$ dengan i, j=1,2,3, … ,n_1 ; $i \neq j$; $|V_1| = n_1$ maka v_{1i} dan v_{1j} tidak akan berajasen. Jadi $\forall\ v_1 \in V_1$ bisa memakai 1 warna.

2. $\forall\ v_{2i}$, $v_{2j} \in V_2$ dengan i, j=1,2,3, … ,n_2 ; $i \neq j$; $|V_2| = n_2$ maka v_{2i} dan v_{2j} tidak akan berajasen. Jadi $\forall\ v_2 \in V_2$ bisa memakai 1 warna.

$\therefore$ Jika sembarang v_1 dan v_2 berajasen maka perlu 2 warna. ■