

BAB III

PETA KENDALI KUALITAS MULTIVARIAT *Z-chart*

UNTUK PROSES AUTOKORELASI

Salah satu fungsi dari pengendalian kualitas statistik adalah mengurangi variasi yang terjadi dalam suatu proses. Sementara itu, salah satu prosedur kontrol untuk mendeteksi adanya variasi atau penyimpangan dalam proses adalah dengan menggunakan peta pengendalian (*control chart*). Peta pengendalian (*control chart*) memiliki tiga garis mendatar, yaitu *lower control limit* (LCL) dan *upper control limit* (UCL), serta garis tengah yang terletak di antara LCL dan UCL yang disebut sebagai garis pusat (*center line*), dimana suatu proses bisa dikatakan stabil dan sesuai dengan standar yang telah ditentukan (*in statistical control*) jika terletak di antara LCL dan UCL.

Saat ini, dari sekian banyak peta pengendalian yang telah ada, beberapa diantaranya mensyaratkan bahwa data yang diobservasi harus bersifat independen, yaitu tidak adanya korelasi dari masing-masing data variabel. Sedangkan dalam beberapa pengamatan asumsi ini tidak selalu terpenuhi dan menyebabkan autokorelasi pada data, sehingga jika hal ini tidak diatasi maka akan mempengaruhi kemampuan dari peta pengendalian tersebut.

Beberapa metode *Multivariate Quality Control* telah dikembangkan untuk mengatasi masalah autokorelasi yang terdapat pada data variabel. Namun metode-metode ini masih memiliki kelemahan, yaitu ketika data observasi berada dalam kondisi di luar kendali, metode-metode tersebut tidak mampu mendeteksi variabel

mana yang menyebabkan proses tidak terkendali. Sementara itu, metode *Multivariate Quality Control* yang disebut dengan *Z-chart* memiliki kemampuan untuk mengatasi permasalahan autokorelasi maupun ketika data observasi berada dalam kondisi di luar kendali, metode yang akan dikaji secara mendalam pada tugas akhir ini mampu mendeteksi variabel mana yang menyebabkan hal tersebut. Namun sebelum menggunakan peta kendali *Z-chart*, data harus memenuhi asumsi proses stasioner dan berdistribusi normal multivariat.

3.1 Peta Kendali Kualitas Multivariat *Z-chart*

Misalkan \mathbf{Y}_t merupakan variable acak p -variat pada waktu t dan memenuhi proses VAR(1) seperti pada persamaan (2.10) dan

$$\mathbf{Y}_t = N_p(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Gamma}(0))$$

Asumsikan ketika proses berada dalam kondisi terkendali, \mathbf{Y}_t berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata $\boldsymbol{\mu}_0 = (\mu_{10}, \mu_{20}, \dots, \mu_{p0})'$ dan matriks kovarians $\boldsymbol{\Gamma}(0)$, dimana $\boldsymbol{\mu}_0$ adalah nilai target dari vektor rata-rata. Untuk mempermudah dalam penerapan metode ini, maka nilai dari setiap data observasi akan diubah ke dalam bentuk sebagai berikut,

$$Z_{it} = \frac{y_{it} - \mu_{i0}}{\gamma_i(0)}, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (3.1)$$

dimana $\gamma_i(0)$ adalah akar kuadrat dari $\gamma_{ii}(0)$. Ketika $\mu_i = \mu_{i0}$, Z_{it} memenuhi distribusi normal baku. Ketika proses *in statistical control*, diperoleh

$$P[|Z_{it}| \leq C_{\rho(0), \alpha}, i = 1, 2, \dots, p] = 1 - \alpha \quad (3.2)$$

dimana $C_{\rho(0), \alpha}$ merupakan sebuah konstanta yang bergantung pada matriks korelasi dari \mathbf{Y}_t dan memenuhi persamaan (3.2) untuk suatu nilai α .

Perhatikan bahwa, jika

$$|Z_{1t}| \leq |Z_{2t}| \leq \dots \leq |Z_{pt}| = Z_t$$

maka

$$Z_t = \text{Maks}_{1 \leq i \leq p}[|Z_{it}|] \quad (3.3)$$

Berdasarkan persamaan (3.2) dan (3.3) diperoleh bahwa suatu proses dikatakan *in statistical control* jika

$$Z_t = \text{Maks}_{1 \leq i \leq p}[|Z_{it}|] \leq C_{\rho(0),\alpha} \quad (3.4)$$

3.2 Batas Pengendalian $C_{\rho(0),\alpha}$

Untuk suatu nilai α dan matriks korelasi $\rho(0)$, nilai $C_{\rho(0),\alpha}$ dapat dihitung dengan cara sebagai berikut:

1. Buatlah vektor dengan jumlah yang cukup besar dari Y_t yang berdistribusi normal dengan rata-rata nol dan matriks kovarians $\rho(0)$.
2. Hitung Z_t untuk setiap vektor tersebut.
3. Persentil ke- $(1 - \alpha)$ dari Z_t merupakan estimasi dari nilai $C_{\rho(0),\alpha}$.

3.3 Langkah-langkah Membuat *Z-chart*

Berikut langkah-langkah dalam membuat peta kendali multivariat *Z-chart*:

1. Y_t merupakan variable acak p -variat selama t waktu dan memenuhi proses VAR(1) serta berdistribusi normal multivariat dengan vektor rata-rata $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p)'$ dan matriks kovarians $\Gamma(0)$.

2. Buatlah batas pengendalian, di mana

$$\text{Lower Control Limit (LCL)} = 0$$

$$\text{Upper Control Limit (UCL)} = C_{\rho(0),\alpha}$$

3. Hitung $Z_t = \text{Maks}_{1 \leq i \leq p}[|Z_{it}|]$

4. Gambarkan plot dari setiap nilai Z_t tersebut

Ketika nilai Z_t berada di antara LCL dan UCL, dapat dikatakan bahwa Y_t berada dalam kondisi terkendali (*in statistical control*). Sementara itu, ketika terdapat nilai Z_t yang melebihi batas pengendalian, hal tersebut mengindikasikan bahwa Y_t berada dalam kondisi di luar kendali, akan tetapi hal ini terjadi seringkali tidak disebabkan oleh semua variabel, biasanya disebabkan oleh hanya beberapa variabel saja.

Oleh karena itu, akan dibangun peta pengendali untuk masing-masing variabel guna mendeteksi variabel mana yang menyebabkan Y_t berada dalam kondisi di luar kendali. Dari persamaan (3.2) diperoleh

$$P \left[\left| \frac{y_{it} - \mu_{i0}}{\gamma_i(0)} \right| \leq C_{\rho(0),\alpha}, i = 1, 2, \dots, p \right] = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P[|y_{it} - \mu_{i0}| \leq C_{\rho(0),\alpha} \gamma_i(0), i = 1, 2, \dots, p] = 1 - \alpha \quad (3.5)$$

Berdasarkan persamaan (3.5), proses suatu variabel berada dalam kondisi terkendali jika

$$\mu_{i0} - C_{\rho(0),\alpha} \gamma_i(0) \leq y_{it} \leq \mu_{i0} + C_{\rho(0),\alpha} \gamma_i(0), i = 1, 2, \dots, p$$

Langkah-langkah membuat peta kendali untuk masing-masing variabel akan dipaparkan sebagai berikut:

1. Buatlah batas pengendalian, di mana

Lower Control Limit variable ke- i (LCL_i) = $\mu_{i0} - C_{\rho(0),\alpha}\gamma_i(0)$

Upper Control Limit variable ke- i (UCL_i) = $\mu_{i0} + C_{\rho(0),\alpha}\gamma_i(0)$

2. Gambar plot dari setiap nilai y_{it} , $i = 1, 2, \dots, p$

Ketika terdapat nilai y_{it} yang melebihi batas pengendalian, hal ini mengindikasikan bahwa variable ke- i berada dalam kondisi di luar kendali.

