BAB III

SIFAT-SIFAT INTEGRAL *RIEMANN-STIELTJES*

3.1 Integral *Riemann-Stieltjes* dari Fungsi Bernilai *Real*

Pada bab sebelumnya telah dibahas mengenai beberapa konsep dasar, dimana konsep-konsep ini merupakan salah satu teori pendukung yang nantinya akan berperan sebagai salah satu alat bantu untuk membuktikan beberapa teorema baik yang ada pada pembahasan bab ini maupun pada bab selanjutnya. Adapun pada bab ini secara garis besar akan dibahas mengenai definisi dari integral *Riemann – Stieltjes* beserta sifat-sifat umumnya.

Seperti pada pembahasan integral *Riemann,* untuk menunjukkan keberadaan integral *Riemann-Stieltjes* dari suatu fungsi yang berkaitan dengan jumlah atas dan jumlah bawah serta integral atas dan integral bawah dari fungsi tersebut, diperlukan kondisi perlu dan cukup sebagai berikut.

Definisi 3.1.1

Misalkan f adalah suatu fungsi yang terbatas dan terdefinisi pada interval tutup $I \coloneqq [a, b]$, α adalah suatu fungsi monoton naik yang tedefinisi pada interval tutup I, dan P merupakan partisi dari I. Jika

$$M_i = \sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

dan

$$m_i = \inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

maka

jumlah ***Riemann-Stieltjes atas*** *dari f terhadap α pada I dinotasikan dengan $U(P;f,\alpha)$ dan didefinisikan sebagai*

$$U(P;f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} M_i\Delta\alpha_i$$

dan jumlah ***Riemann-Stieltjes bawah*** *dari f terhadap α pada I dinotasikan dengan $L(P;f,\alpha)$ dan didefinisikan sebagai*

$$L(P;f,\alpha)=\sum_{i=1}^{n} m_i\Delta\alpha_i$$

dimana $\Delta\alpha_i=\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})$.

Dalam hal ini perlu diingat bahwa berdasarkan definisi di atas jelas bahwa $m_i\le M_i$ dan α adalah fungsi monoton naik pada I, sehingga $\Delta\alpha_i\ge 0$.

Oleh karena itu, seperti pada integral *Riemann* yang telah di bahas pada bab II, pada integral *Riemann-Stieltjes* juga berlaku

$$L(P;f,\alpha)\le U(P;f,\alpha)$$

Pernyataan ini secara lebih formal akan dibuktikan dalam teorema setelah definisi berikut.

Definisi 3.1.2

Misalkan P^* dan P merupakan sembarang partisi dari interval $I\coloneqq[a,b]$. Partisi P^* disebut penghalusan (refinement) dari P jika $P\subset P^*$. Selanjutnya jika diberikan dua sebarang partisi lainnya dari interval $I\coloneqq[a,b]$ katakanlah P_1 dan P_2, maka P^*disebut penghalusan bersama dari P_1 dan P_2 jika $P^*=P_1\cup P_2$.

Pernyataan bahwa partisi P^*disebut penghalusan dari partisi P mengandung arti bahwa partisi P^* *lebih halus* atau dengan kata lain *lebih baik* dari partisi P. Dalam hal ini maksudnya adalah bahwa setiap titik partisi dari P juga merupakan suatu titik dari partisi P^*.

Teorema 3.1.3

Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang terbatas dan terdefinisi pada $I := [a, b]$ dan α adalah fungsi monoton naik pada I.

a) *Jika P partisi dari I, maka*

$$m\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) \leq L(P; f, \alpha) \leq U(P; f, \alpha) \leq M\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big)$$

b) *Jika partisi P^*adalah penghalusan dari partisi P, maka*

$$L(P; f, \alpha) \leq L(P^*; f, \alpha) \leq U(P^*; f, \alpha) \leq U(P; f, \alpha)$$

Bukti :

a) Diketahui f adalah fungsi bernilai *real* yang terbatas dan terdefinisi pada $I := [a, b]$, ini berarti f terbatas di atas dan terbatas di bawah pada I.

Misalkan $M = \sup \{f(x) | x \in [a, b]\}$ dan $m = \inf \{f(x) | x \in [a, b]\}$.

Jika I_i , $i = 1,2, \dots, n$ adalah sebarang subpartisi dari partisi P pada I, misalkan $M_i = \sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ dan $m_i = \inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$, maka $I_i \subset I$, $\forall\, i = 1,2, \dots, n$.

Sehingga diperoleh

$$m \leq m_i \leq M_i \leq M$$

Perhatikan

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i = \big(\alpha(x_1) - \alpha(x_0)\big) + \big(\alpha(x_2) - \alpha(x_1)\big) + \cdots$$

$$+\big(\alpha(x_n) - \alpha(x_{n-1})\big)$$

$$= \alpha(x_n) - \alpha(x_0)$$

$$= \alpha(b) - \alpha(a)$$

karena α adalah fungsi monoton naik pada I, maka

$$\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) \geq 0, \forall\ i = 1,2, \dots, n.$$

akibatnya

$$m\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) = \sum_{i=1}^{n} m\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} m_i\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big)$$

$$= L(P; f, \alpha)$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} M_i\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big)$$

$$= U(P; f, \alpha)$$

$$\leq M\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big)$$

dengan demikian

$$m\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) \leq L(P; f, \alpha) \leq U(P; f, \alpha) \leq M\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) \qquad \blacksquare$$

b) Misalkan partisi P^* adalah penghalusan dari partisi P di $[a, b]$ dimana P^* hanya memuat satu titik lebih banyak dari partisi P, katakanlah titik itu adalah x^*, dimana $x_{i-1} < x^* < x_i$ serta x_{i-1} dan x_i merupakan titik dari partisi P yang saling berdekatan.

selanjutnya misalkan

$$m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

dimana

$$m_i' = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x^*]\}$$

$$m_i'' = \inf \{f(x) \mid x \in [x^*, x_i]\}$$

dengan demikian jelas bahwa

$$m_i' \geq m_i \text{ dan } m_i'' \geq m_i$$

perhatikan

$$L(P; f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{j-1} m_i [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]\right] + m_j [\alpha(x_j) - \alpha(x_{j-1})]$$

$$+ \sum_{i=j+1}^{n} m_i [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{j-1} m_i [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]\right] + m_j [\alpha(x^*) - \alpha(x_{j-1})]$$

$$+ m_j [\alpha(x_j) - \alpha(x^*)] + \sum_{i=j+1}^{n} m_i [\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

$$\leq \left[\sum_{i=1}^{j-1} m_i\,[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]\right] + m_j^{'}\left[\alpha(x^*) - \alpha\big(x_{j-1}\big)\right]$$

$$+m_j^{''}\left[\alpha\big(x_j\big) - \alpha(x^*)\right] + \sum_{i=j+1}^{n} m_i\,[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

$$= L(P^*; f, \alpha)$$

dengan menggunakan argumentasi induksi matematika terhadap banyaknya titik tambahan pada partisi penghalusan P^*, maka dapat disimpulkan bahwa

$$L(P; f, \alpha) \leq L(P^*; f, \alpha) \qquad (1)$$

selanjutnya misalkan

$$M_i = \sup\ \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

dimana

$$M_i^{'} = \sup\ \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x^*]\}$$

$$M_i^{''} = \sup\ \{f(x) \mid x \in [\,x^*, x_i]\}$$

dengan demikian jelas bahwa

$$M_i^{'} \leq M_i \text{ dan } M_i^{''} \leq M_i$$

perhatikan

$$U(P; f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{j-1} M_i\,[\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})]\right] + M_j\left[\alpha\big(x_j\big) - \alpha\big(x_{j-1}\big)\right]$$

$$+\sum_{i=j+1}^{n} M_i\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{j-1} M_i\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]\right]+M_j\left[\alpha(x^*)-\alpha\left(x_{j-1}\right)\right]$$

$$+M_j\left[\alpha\left(x_j\right)-\alpha(x^*)\right]+\sum_{i=j+1}^{n} M_i\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]$$

$$\geq\left[\sum_{i=1}^{j-1} M_i\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]\right]+M_j'\left[\alpha(x^*)-\alpha\left(x_{j-1}\right)\right]$$

$$+M_j''\left[\alpha\left(x_j\right)-\alpha(x^*)\right]+\sum_{i=j+1}^{n} M_i\,[\alpha(x_i)-\alpha(x_{i-1})]$$

$$=U(P^*;f,\alpha)$$

dengan argumentasi induksi matematika terhadap banyaknya titik tambahan pada partisi penghalusan P^*, maka dapat disimpulkan bahwa

$$U(P;f,\alpha)\geq U(P^*;f,\alpha) \qquad (2)$$

berdasarkan *a)*, (1), dan (2), maka dapat disimpulkan bahwa

$$L(P;f,\alpha)\leq L(P^*;f,\alpha)\leq U(P^*;f,\alpha)\leq U(P;f,\alpha) \qquad \blacksquare$$

Definisi 3.1.4

Misalkan f adalah fungsi bernilai real yang terbatas dan terdefinisi pada $I \coloneqq [a,b]$, P adalah sebarang partisi dari I, dan α adalah fungsi monoton naik yang terdefinisi pada I. Maka integral Riemann-Stieltjes atas dan bawah secara bersamaan didefinisikan sebagai berikut

$$\int_{a}^{\overline{b}} f\, d\alpha = inf\ U(P; f, \alpha)$$

dan

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha = sup\ L(P; f, \alpha)$$

Jika $\int_{a}^{\overline{b}} f\, d\alpha = \int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha$, *maka* f *dikatakan* ***terintegralkan Riemann-Stieltjes terhadap*** $\boldsymbol{\alpha}$ ***pada I*** *dan nilai integralnya dinotasikan dengan*

$$A = \int_{a}^{b} f\, d\alpha \qquad \text{atau} \qquad A = \int_{a}^{b} f(x)\, d\alpha(x)$$

Hal ini secara tidak langsung menyatakan bahwa jika f terintegralkan *Riemann-Stieltjes* terhadap α pada I, maka berlaku

$$\int_{a}^{\overline{b}} f\, d\alpha = \int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha = \int_{a}^{b} f\, d\alpha$$

Selain itu persamaan di atas juga menyatakan bahwa nilai dari integralnya bersifat tunggal. Dalam hal ini, fungsi *f* disebut *integran* dan fungsi α disebut *integrator*.

Dengan demikian jika dibandingkan dengan integral *Riemann* yang telah dibahas pada bab II, maka integral *Riemann-Stieltjes* merupakan perumuman dari bentuk integral *Riemann*. Atau dengan kata lain integral *Riemann* adalah kasus khusus dari integral *Riemann-Stieltjes*, yakni dimana saat fungsi f dikatakan terintegralkan *Riemann-Stieltjes* terhadap fungsi α pada I, ini tiada lain mengatakan bahwa fungsi f dikatakan terintegralkan *Riemann-Stieltjes* terhadap x pada I. Sehingga ketika didefinisikan $\alpha(x) = x$, maka

$$\alpha(x_i) = x_i \qquad \text{dan} \qquad \alpha(x_{i-1}) = x_{i-1}$$

akibatnya

$$\Delta\alpha_i(x) = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$$

Oleh karena itu, dalam kasus ini integral *Riemann-Stieltjes* dan integral *Riemann* adalah ekivalen.

Beranjak dari pembahasan mengenai keterkaitan antara integral *Riemann-Stieltjes* dan integral *Riemann*, perlu ditegaskan bahwa jika dilihat kembali isi dari teorema *3.1.3 a)* dan definisi *3.1.4* di atas, ini menjamin bahwa jumlah *Riemann-Stieltjes* atas dan jumlah *Riemann-Stieltjes* bawah secara bersama-sama terbatas di atas dan terbatas di bawah, selain itu juga menjamin bahwa *supremum* dan *infimum* dari jumlah *Riemann-Stieltjes* ada, unik, dan memenuhi pertidaksamaan

$$m\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) \leq \int_a^{\overline{b}} f\, d\alpha \leq M\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big)$$

dan

$$m\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) \leq \int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha \leq M\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big)$$

Kemudian sebagai alasan keringkasan agar tidak selalu disebutkan dalam setiap pembahasan, maka f akan diasumsikan sebagai fungsi bernilai *real* yang terbatas dan terdefinisi pada *I* dan α adalah fungsi monoton naik pada *I*.

Selain itu, himpunan semua fungsi yang terintegralkan *Riemann-Stieltjes* katakanlah terhadap fungsi α pada *I* akan dinotasikan dengan $\mathcal{R}_\alpha[a, b]$.

3.2 Sifat-Sifat Integral *Riemann-Stieltjes* dari Fungsi yang Bernilai *Real*

Di bawah ini adalah beberapa sifat dari integral *Riemann-Stieltjes* yang akan dituangkan ke dalam teorema sebagai berikut.

Teorema 3.2.1

Jika f fungsi bernilai real yang terbatas dan terdefinisi pada I, dan α adalah fungsi monoton naik pada I, maka

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha \leq \int_{a}^{\overline{b}} f\, d\alpha$$

Bukti :

Misalkan partisi P^* adalah *penghalusan* dari partisi P_1 dan P_2.

Berdasarkan teorema *3.1.3 b)* diperoleh

$$L(P_1; f, \alpha) \leq L(P^*; f, \alpha) \leq U(P^*; f, \alpha) \leq U(P_1; f, \alpha)$$

dan

$$L(P_2; f, \alpha) \leq L(P^*; f, \alpha) \leq U(P^*; f, \alpha) \leq U(P_2; f, \alpha)$$

akibatnya

$$L(P_1; f, \alpha) \leq U(P_2; f, \alpha) \qquad (1)$$

selanjutnya pilih titik-titik supremum dari f pada partisi P_1 sedemikian sehingga

$$L(P_1; f, \alpha) = \sup\ L(P_1; f, \alpha)$$

dan pilih titik-titik infimum dari f pada partisi P_2 sedemikian sehingga

$$U(P_2; f, \alpha) = \inf\ U(P_2; f, \alpha)$$

karena

$$\sup\ L(P_1; f, \alpha) = \int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha \qquad (2)$$

dan

$$\inf U(P_2; f, \alpha) = \overline{\int_a^b} f \, d\alpha \qquad (3)$$

maka berdasarkan (1), (2), dan (3) diperoleh

$$\underline{\int_a^b} f \, d\alpha \leq \overline{\int_a^b} f \, d\alpha \qquad \blacksquare$$

Selanjutnya berikut adalah teorema yang akan sering digunakan untuk membuktikan apakah suatu fungsi yang bernilai *real* terintegralkan *Riemann-Stieltjes* atau tidak. Dengan kata lain, teorema ini bisa disebut sebagai alat alternatif lain selain definisi untuk mendeteksi kondisi suatu fungsi apakah terintegralkan *Riemann-Stieltjes* atau tidak.

Teorema 3.2.2 (Kriteria Pengintegralan)

Misal f fungsi bernilai real yang terbatas dan terdefinisi pada I, dan α adalah fungsi monoton naik pada I, maka $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$, *ada partisi P dari I sedemikian sehingga*

$$U(P\,; f, \alpha) - L(P\,; f, \alpha) < \varepsilon$$

Bukti :

($\Longrightarrow$) Misalkan $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ dan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$. Jika $\wp$ adalah himpunan semua partisi dari I, maka

$$\int_a^b f \, d\alpha = \inf_{\mathrm{p} \in \wp} U(P\,; f, \alpha)$$

$$\int_a^b f \, d\alpha = \sup_{\mathrm{p} \in \wp} L(P\,; f, \alpha)$$

dengan demikian ada $P_1 \in \wp$ sedemikian sehingga

$$\int_a^b f\,d\alpha < U(P_1\,;f,\alpha) < \int_a^b f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

dan ada $P_2 \in \wp$ sedemikian sehingga

$$\int_a^b f\,d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < L(P_2\,;f,\alpha) < \int_a^b f\,d\alpha$$

sehingga diperoleh

$$U(P_1\,;f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha \ < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

$$\int_a^b f\,d\alpha \ - \ L(P_2\,;f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

selanjutnya misalkan P^* adalah partisi penghalusan dari P_1 dan P_2. Jika digunakan teorema *3.1.3 b)* terhadap ketidaksamaan (1) dan (2), maka diperoleh

$$U(P^*; f,\alpha) \leq U(P_1\,;f,\alpha) < \int_a^b f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$U(P^*\,;f,\alpha) - \int_a^b f\,d\alpha \ < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

dan diperoleh

$$\int_a^b f\,d\alpha \ < L(P_2\,;f,\alpha) + \frac{\varepsilon}{2} \leq L(P^*; f,\alpha) + \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$\int_a^b f\,d\alpha - L(P^*; f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

dengan demikian

$$U(P^*; f, \alpha) - L(P^*; f, \alpha) = \left(U(P^* ; f, \alpha) - \int_a^b f \, d\alpha \right)$$

$$+ \left(\int_a^b f \, d\alpha - L(P^*; f, \alpha) \right)$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

jadi terbukti bahwa

$$U(P^*; f, \alpha) - L(P^*; f, \alpha) < \varepsilon$$

($\Longleftarrow$) Misalkan f terbatas pada *I* dan α adalah fungsi monoton naik pada *I*.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, maka ada partisi *P* dari *I* sedemikian sehingga

$$U(P ; f, \alpha) - L(P ; f, \alpha) < \varepsilon \tag{1}$$

berdasarkan teorema *3.1.3* dan *3.2.1*, maka diperoleh

$$L(P; f, \alpha) \leq \int_{\underline{a}}^{b} f \, d\alpha \leq \int_a^{\overline{b}} f \, d\alpha \leq U(P; f, \alpha)$$

karena (1) akibatnya

$$0 \leq \int_a^{\overline{b}} f \, d\alpha - \int_{\underline{a}}^{b} f \, d\alpha < \varepsilon, \qquad \forall\, \varepsilon > 0$$

ini berarti

$$\int_a^{\overline{b}} f \, d\alpha - \int_{\underline{a}}^{b} f \, d\alpha = 0$$

sehingga

$$\int_a^{\overline{b}} f \, d\alpha = \int_{\underline{a}}^{b} f \, d\alpha$$

dengan demikian dapat disimpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$. ■

Selain dari teorema kriteria pengintegralan di atas, berikut juga terdapat beberapa teorema yang akan menjamin bahwa fungsi bernilai *real* yang memiliki sifat tertentu yakni sifat yang nantinya akan dibahas pada teorema-teorema selanjutnya, akan terintegralkan *Riemann-Stieltjes*. Hal ini dapat dideteksi secara langsung tanpa perlu mengetahui berapa nilai dari integral tersebut ataupun bagaimana cara menghitungnya.

Teorema 3.2.3

Jika f kontinu pada $[a,b]$ dan α monoton naik pada $[a,b]$, maka $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$.

Bukti :

Karena f kontinu pada selang tutup $[a,b]$, maka berdasarkan teorema *2.4.4* f kontinu seragam pada $[a,b]$. Ini berarti $\forall\, \varepsilon > 0\,, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, sedemikian sehingga jika $x, y \in I$ dengan $|x - y| < \delta$, maka

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}$$

selanjutnya misalkan P sebarang partisi dari $[a,b]$ dengan $x_i - x_{i-1} < \delta$, $M_i = f(s_i)$, dan $m_i = f(t_i)$ untuk $s_i\,, t_i \in [x_{i-1}\,, x_i]$.

Perhatikan

$$U(P;f,\alpha) - L(P;f,\alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big) - \sum_{i=1}^{n} m_i\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(f(s_i) - f(t_i)\right)\left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right)$$

$$< \sum_{i=1}^{n} \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right)$$

$$= \frac{\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)} \left(\alpha(b) - \alpha(a)\right) = \varepsilon$$

hal ini menunjukkan bahwa

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) < \varepsilon$$

sehingga berdasarkan teorema *kriteria pengintegralan 3.2.2*, maka $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$.

■

Teorema 3.2.4

Jika f monoton pada $[a, b]$ dan α kontinu dan monoton naik pada $[a, b]$, maka $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$.

Bukti :

Diketahui f monoton pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ dan α kontinu dan monoton naik pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$.

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan misalkan untuk sebarang bilangan bulat positif n berlaku

$$\left(\alpha(b) - \alpha(a)\right) |f(b) - f(a)| < n\varepsilon$$

karena α kontinu dan monoton naik pada $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$, pilih partisi P dari $[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ sedemikian sehingga

$$\Delta\alpha_i = \left(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\right) = \frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}$$

i) Kasus jika f monoton naik

karena f monoton naik pada $[a, b]$, maka $\forall\ i \in \mathbb{N}$ berlaku

$$f(x_i) = M_i = \sup \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$f(x_{i-1}) = m_i = \inf \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

sehingga

$$\begin{aligned}
U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big)\left(\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}\right) \\
&= \left(\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_i) - f(x_{i-1})\big) \\
&= \left(\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}\right)\big(f(b) - f(a)\big) \\
&< \left(\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}\right)\left(\frac{n\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}\right) = \varepsilon
\end{aligned}$$

ini berarti

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) < \varepsilon$$

i) Kasus jika f monoton turun

karena f monoton turun pada $[a, b]$, maka $\forall\, i \in \mathbb{N}$ berlaku

$$f(x_{i-1}) = M_i = \sup\, \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,, x_i]\}$$

$$f(x_i) = m_i = \inf\, \{f(x) \mid x \in [x_{i-1}\,, x_i]\}$$

sehingga

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta\alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)\, \Delta\alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\big)\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\big)\left(\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}\right)$$

$$= \left(\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}\right)\sum_{i=1}^{n} \big(f(x_{i-1}) - f(x_i)\big)$$

$$= \left(\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}\right)\big(f(a) - f(b)\big)$$

$$< \left(\frac{\alpha(b) - \alpha(a)}{n}\right)\left(\frac{n\varepsilon}{\alpha(b) - \alpha(a)}\right) = \varepsilon$$

ini berarti

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) < \varepsilon$$

berdasarkan i) dan ii) maka diperoleh bahwa

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) < \varepsilon$$

Dengan demikian berdasarkan kriteria pengintegralan dapat disimpulkan bahwa $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ ■

Teorema 3.2.5

Jika diketahui $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, $m \le f \le M$, g *kontinu pada* $[a,b]$, *dan* $h = g(f(x))$ *pada* $[a,b]$ *maka* $h \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$.

Bukti :

Misalkan $h = g \circ f$, akan ditunjukkan bahwa $h \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ karena g kontinu pada $[m,M]$, berdasarkan teorema *2.4.4* maka g kontinu seragam pada$[m,M]$. Oleh karena itu, ada $\delta > 0$ dimana $\delta < \varepsilon$ sedemikian sehingga untuk setiap $s,t \in [m,M]$ dan $|s-t| < \delta$, maka

$$|g(s) - g(t)| < \varepsilon \tag{1}$$

selanjutnya karena $f \in \Re(\alpha)$ pada $[a,b]$, maka berdasarkan kriteria pengintegralan ada partisi P dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(P\,;f,\alpha) - L(P\,;f,\alpha) < \delta^2 \tag{2}$$

misalkan

$$M_i = \sup f(x) \qquad ,(x_{i-1} \le x \le x_i)$$

$$m_i = \inf f(x) \qquad ,(x_{i-1} \le x \le x_i)$$

$$M_i^* = \sup h(x) \qquad ,(x_{i-1} \le x \le x_i)$$

$$m_i^* = \inf\, h(x) \qquad ,(x_{i-1} \le x \le x_i)$$

selanjutnya definisikan

$$A = \{\, i : i \in \{1,2,\dots,n\} \mid M_i - m_i < \delta\}$$

$$B = \{\, i : i \in \{1,2,\dots,n\} \mid M_i - m_i \geq \delta\}$$

berdasarkan sifat urutan bilangan *real 2.1.1 c)* (aturan trikhotomi), jelas bahwa $A \cap B = \emptyset$

selanjutnya perhatikan

* jika $i \in A$, maka untuk sebarang $u, v \in [x_{i-1}, x_i]$ maka $|f(u) - f(v)| < \delta$, akibatnya berdasarkan (1) diperoleh

$$|g(f(u)) - g(f(v))| < \varepsilon$$

dengan kata lain

$$|h(u) - h(v)| < \varepsilon$$

dengan demikian

$$M_i^* - m_i^* < \varepsilon$$

* jika $i \in B$, maka (2) mengakibatkan

$$\begin{aligned}\delta \sum_{i\in B} \Delta\alpha_i &\leq (M_i - m_i) \sum_{i\in B} \Delta\alpha_i \\ &= \sum_{i\in B} (M_i - m_i)\, \Delta\alpha_i \\ &= \sum_{i\in B} M_i \Delta\alpha_i - \sum_{i\in B} m_i\, \Delta\alpha_i \\ &\leq U(P\,; f, \alpha) - L(P\,; f, \alpha) < \delta^2\end{aligned}$$

dengan demikian

$$\delta \sum_{i\in B} \Delta\alpha_i < \delta^2$$

karena $\delta < \varepsilon$, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\sum_{i\in B} \Delta\alpha_i < \varepsilon$$

akibatnya jika $K = \sup\{|g(t)|| \; m \le t \le M\}$ maka diperoleh

$$M_i^* - m_i^* \le 2K \,, \quad \forall\, i \in \{1,2,\dots,n\}$$

sehingga

$$\sum_{i\in B} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i = (M_i^* - m_i^*)\sum_{i\in B} \Delta\alpha_i < 2K\varepsilon$$

selanjutnya pilih $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon}{(\alpha(b)-\alpha(a)+2K)}$

kemudian perhatikan

$$\begin{aligned}
U(P\,;h,\alpha) - L(P\,;h,\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i^*\,\Delta\alpha_i + \sum_{i=1}^{n} m_i^*\,\Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i \\
&= \sum_{i\in A} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i + \sum_{i\in B} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i \\
&= (M_i^* - m_i^*)\sum_{i\in A} \Delta\alpha_i + \sum_{i\in B} (M_i^* - m_i^*)\Delta\alpha_i \\
&< \varepsilon_0\big(\alpha(b) - \alpha(a)\big) + 2K\varepsilon_0 \\
&= \varepsilon_0(\alpha(b) - \alpha(a) + 2K) = \varepsilon
\end{aligned}$$

dengan demikian $U(P\,;h,\alpha) - L(P\,;h,\alpha) < \varepsilon$, ini berarti berdasarkan kriteria pengintegralan dapat disimpulkan bahwa $h \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$.

Sifat lainnya yang dimiliki oleh integral *Riemann Stieltjes* adalah sifat aljabar sebagai berikut.

Teorema 3.2.6

Jika $f, g \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, *maka* $f + g \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ *dan*

$$\int_a^b (f+g)\, d\alpha = \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha$$

Sifat ini disebut dengan sifat linear.

Bukti :

Ambil sebarang partisi P dari $[a,b]$

karena f dan g adalah fungsi yang terbatas pada I, maka f dan g terbatas di atas dan di bawah pada I.

Selanjutnya misalkan

$$M(f) = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

$$M(g) = \sup\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

$$M_i(f) = sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(g) = sup\{g(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

karena $M_i \leq M$, maka berlaku

$$f(x) + g(x) \leq M_i(f) + M_i(g), \forall\, x \in [x_{i-1}, x_i]$$

sehingga jika

$$M_i(f+g) = sup\{f(x) + g(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

maka berdasarkan teorema *2.2.7 a)*

$M_i(f+g) = sup\{f(x)+g(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$\leq sup\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} + sup\{g(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$= M_i(f) + M_i(g)$

dengan demikian $\forall$ P partisi dari $[a,b]$ berlaku

$$U(P\,;f+g,\alpha) \leq U(P\,;f,\alpha) + U(P\,;g,\alpha) \tag{1}$$

selanjutnya misalkan

$$m(f) = \inf\{f(x)|x \in [a,b]\}$$

$$m(g) = \inf\{g(x)|x \in [a,b]\}$$

$$m_i(f) = inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(g) = inf\{g(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

karena $m \leq m_i$, maka diperoleh

$$m_i(f) + m_i(g) \leq f(x) + g(x), \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

sehingga jika

$$m_i(f+g) = \inf\{f(x)+g(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

maka berdasarkan teorema *2.2.7 b)* diperoleh

$m_i(f+g) = inf\{f(x)+g(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$\geq inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\} + inf\{g(x)|x \in [x_{i-1}, x_i]\}$

$= m_i(f) + m_i(g)$

dengan demikian $\forall$ P partisi dari $[a,b]$ berlaku

$$L(P\,;f,\alpha) + L(P\,;g,\alpha) \leq L(P\,;f+g,\alpha) \tag{2}$$

kemudian ambil sebarang $\varepsilon > 0$, karena $f, g \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ maka ada partisi P_f dan P_g dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(P_f\,; f,\alpha) - L(P_f\,; f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

$$U(P_g\,; g,\alpha) - L(P_g\,; g,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2}$$

selanjutnya misalkan $P^* = P_f \cup P_g$, ini berarti P^* adalah partisi *penghalusan* dari P_f dan P_g. Dengan demikian berdasarkan teorema *3.1.3*

$$U(P^*\,; f,\alpha) \le U(P_f\,; f,\alpha)$$

$$U(P^*\,; f,\alpha) \le U(P_g\,; g,\alpha)$$

dan

$$L(P_f\,; f,\alpha) \le L(P^*\,; f,\alpha)$$

$$L(P_g\,; g,\alpha) \le L(P^*\,; f,\alpha)$$

sehingga diperoleh

$$U(P^*\,; f,\alpha) - L(P^*\,; f,\alpha) \le U(P_f\,; f,\alpha) - L(P_f\,; f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3)$$

$$U(P^*\,; g,\alpha) - L(P^*\,; g,\alpha) \le U(P_g\,; g,\alpha) - L(P_g\,; g,\alpha) < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (4)$$

perhatikan berdasarkan (1), (2), (3), dan (4), maka

$$\begin{aligned}
&U(P^*\,; (f+g),\alpha) - L(P^*\,; (f+g),\alpha) \\
&\qquad = \left[U(P_f\,; (f+g),\alpha) + U(P_g\,; (f+g),\alpha)\right] \\
&\qquad\quad - \left[L(P_f\,; (f+g),\alpha) + L(P_g\,; (f+g),\alpha)\right] \\
&\qquad \le \left[U(P_f\,; f,\alpha) + U(P_g\,; g,\alpha)\right] - \left[L(P_f\,; f,\alpha) + L(P_g\,; g,\alpha)\right] \\
&\qquad = \left[U(P_f\,; f,\alpha) - L(P_f\,; f,\alpha)\right] + \left[U(P_g\,; g,\alpha) - L(P_g\,; g,\alpha)\right] \\
&\qquad < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

dengan demikian $f + g \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$.

Selanjutnya perhatikan karena $f, g \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, maka berdasarkan definisi *3.1.4* berarti

$$\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} f\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha$$

dan

$$\underline{\int_a^b} g\,d\alpha = \overline{\int_a^b} g\,d\alpha = \int_a^b g\,d\alpha$$

karena (3) dan (4), maka

$$\begin{aligned} U(P^*; f, \alpha) &< L(P^*; f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sup\ L(P^*; f, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \underline{\int_a^b} f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_a^b f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sehingga

$$U(P^*; f, \alpha) < \int_a^b f\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

begitu pula

$$\begin{aligned} U(P^*; g, \alpha) &< L(P^*; g, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \sup\ L(P^*; g, \alpha) + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \underline{\int_a^b} g\,d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

$$= \int_a^b g\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$U(P^*\,; g, \alpha) < \int_a^b g\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} \tag{6}$$

perhatikan

$$\int_a^b (f+g)\, d\alpha = \inf U(P^*\,; (f+g), \alpha)$$

$$< U(P^*\,; (f+g), \alpha)$$

$$\leq U(P^*\,; f, \alpha) + U(P^*\,; g, \alpha)$$

$$< \int_a^b f\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b g\, d\alpha + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha + \varepsilon$$

dengan demikian

$$\int_a^b (f+g)\, d\alpha \leq \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha + \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka berdasarkan teorema *2.1.4* diperoleh

$$\int_a^b (f+g)\, d\alpha \leq \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha \tag{7}$$

selanjutnya jika (3) dan (4) dikalikan (-1), maka diperoleh

$$L(P^*\,; f, \alpha) > U(P^*\,; f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$> inf\;\; U(P^*\,; f, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \int_a^{\overline{b}} f\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$$

$$= \int_a^b f\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$$

sehingga

$$L(P^*\,; f, \alpha) > \int_a^b f\, d\alpha - \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{8}$$

begitu pula

$$\begin{aligned} L(P^*\,; g, \alpha) &> U(P^*\,; g, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &> \inf U(P^*\,; g, \alpha) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_a^{\overline{b}} g\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_a^b g\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

sehingga

$$L(P^*\,; g, \alpha) > \int_a^b g\, d\alpha - \tfrac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

perhatikan

$$\begin{aligned} \int_a^b (f+g)\, d\alpha &= \sup\ L(P^*\,; (f+g), \alpha) \\ &> L(P^*\,; (f+g), \alpha) \\ &\geq L(P^*\,; f, \alpha) + L(P^*\,; g, \alpha) \\ &> \int_a^b f\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} + \int_a^b g\, d\alpha - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \int_a^b f\, d\alpha + \int_a^b g\, d\alpha - \varepsilon \end{aligned}$$

dengan demikian

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha > \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha - \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka berdasarkan teorema *2.1.3* diperoleh

$$\int_a^b (f+g)\,d\alpha \geq \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha \qquad (10)$$

karena (9) dan (10), maka diperoleh

$$\int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha \leq \int_a^b f + g\,d\alpha \leq \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha$$

dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\int_a^b f + g\,d\alpha = \int_a^b f\,d\alpha + \int_a^b g\,d\alpha$$ ■

Teorema 3.2.7

Jika $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, maka $cf \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ untuk sebarang konstan c, dan

$$\int_a^b cf\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha$$

Bukti :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan dengan tidak mengurangi keumuman diambil $c > 0$.

Karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, maka berdasarkan kriteria pengintegralan ada partisi P dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(P\,;f,\alpha) - L(P\,;f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{c}$$

selanjutnya misalkan

$$M_i = \sup\,\{f(x)|x \in [x_{i-1}\,, x_1]\}$$

$$m_i = \inf\{f(x)|x \in [x_{i-1}\,, x_1]\}$$

$$M_i^{'} = \sup\,\{cf(x)|x \in [x_{i-1}\,, x_1]\}$$

$$m_i{}' = \inf\{cf(x) | x \in [x_{i-1}, x_1]\}$$

maka berdasarkan teorema *2.2.4* diperoleh

$$M_i{}' = \sup\ \{cf(x) | x \in [x_{i-1}, x_1]\} = c \sup\ \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_1]\} = cM_i$$

$$m_i{}' = \inf\{cf(x) | x \in [x_{i-1}, x_1]\} = c \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_1]\} = cm_i$$

perhatikan

$$\begin{aligned} U(P\,; cf, \alpha) - L(P\,; cf, \alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i{}' \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i{}' \Delta\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} cM_i\ \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} cm_i\ \Delta\alpha_i \\ &= c\sum_{i=1}^{n} M_i\ \Delta\alpha_i - c\sum_{i=1}^{n} m_i\ \Delta\alpha_i \\ &= c\ \big(U(P\,; f, \alpha)\big) - c\ \big(L(P\,; f, \alpha)\big) \\ &= c\big(U(P\,; f, \alpha) - L(P\,; f, \alpha)\big) \\ &< c\ \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon \end{aligned}$$

dengan demikian

$$U(P\,; cf, \alpha) - L(P\,; cf, \alpha) < \varepsilon$$

jadi $cf \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$.

Selanjutnya karena $cf \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ berarti

$$\sup\ L(P\,; cf, \alpha) = \int_{\underline{a}}^{b} cf\ d\alpha = \int_{a}^{b} cf\ d\alpha = \int_{a}^{\overline{b}} cf\ d\alpha$$

$$= \inf\ U(P\,; cf, \alpha)$$

perhatikan karena

$$L(P\,;cf,\alpha) = c\big(L(P\,;f,\alpha)\big)$$

akibatnya

$$\underline{\int_a^b} cf\,d\alpha = \sup\ L(P\,;cf,\alpha) = \sup\ c\big(L(P\,;f,\alpha)\big)$$

$$= c\ \sup\ L(P\,;f,\alpha) = c\underline{\int_a^b} f\,d\alpha$$

dengan demikian diperoleh

$$\underline{\int_a^b} cf\,d\alpha = c\underline{\int_a^b} f\,d\alpha \tag{1}$$

begitu pula karena

$$U(P\,;cf,\alpha) = c\big(U(P\,;f,\alpha)\big)$$

akibatnya

$$\overline{\int_a^b} cf\,d\alpha = \inf\ U(P\,;cf,\alpha) = \inf\ c\big(U(P\,;f,\alpha)\big)$$

$$= c\ \inf\ U(P\,;f,\alpha) = c\overline{\int_a^b} f\,d\alpha$$

dengan demikian diperoleh

$$\overline{\int_a^b} cf\,d\alpha = c\overline{\int_a^b} f\,d \tag{2}$$

berdasarkan (1) dan (2), maka diperoleh

$$\underline{\int_a^b} cf\,d\alpha = c\underline{\int_a^b} f\,d\alpha = \overline{\int_a^b} cf\,d\alpha = c\overline{\int_a^b} f\,d$$

ini berarti

$$\int_a^b cf\,d\alpha = c\int_a^b f\,d\alpha \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.8

Jika $f \in \mathcal{R}_{\alpha_1}[a,b]$ *dan* $f \in \mathcal{R}_{\alpha_2}[a,b]$, *maka* $f \in \mathcal{R}_{(\alpha_1+\alpha_2)}[a,b]$ *dan*

$$\int_a^b f\, d(\alpha_1 + \alpha_2) = \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2$$

Sifat ini disebut dengan sifat semi linear.

Bukti :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, karena $f \in \mathcal{R}_{\alpha_1}[a,b]$ maka berdasarkan kriteria pengintegralan ada partisi P_1 dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(P_1; f, \alpha_1) - L(P_1; f, \alpha_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

begitu pula karena $f \in \mathcal{R}_{\alpha_2}[a,b]$, maka berdasarkan kriteria pengintegralan ada partisi P_2 dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(P_2\,; f, \alpha_2) - L(P_2\,; f, \alpha_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

selanjutnya misalkan $P^* = P_1 \cup P_2$ dan P^* partisi dari $[a,b]$, maka P^* adalah partisi penghalusan dari P_1 dan P_2.

Dengan demikian berlaku

$$U(P^*; f, \alpha_1) - L(P^*; f, \alpha_1) < \frac{\varepsilon}{2}$$

dan

$$U(P^*; f, \alpha_2) - L(P^*; f, \alpha_2) < \frac{\varepsilon}{2}$$

selanjutnya misalkan

$$\Delta\alpha_i = \Delta(\alpha_1 + \alpha_2)_i = \Delta(\alpha_1)_i + \Delta(\alpha_2)_i\,, \forall\, i \in \mathbb{N}$$

maka perhatikan

$$
\begin{aligned}
U(P^*;f,\alpha) - L(P^*;f,\alpha) &= U(P^*;f,\alpha_1+\alpha_2) - L(P^*;f,\alpha_1+\alpha_2) \\
&= \big(U(P^*;f,\alpha_1) + U(P^*;f,\alpha_2)\big) \\
&\quad -\big(L(P^*;f,\alpha_1) + L(P^*;f,\alpha_2)\big) \\
&= \big(U(P^*;f,\alpha_1) - L(P^*;f,\alpha_1)\big) \\
&\quad +\big(U(P^*;f,\alpha_2) - L(P^*;f,\alpha_2)\big) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}
$$

dengan demikian

$$U(P^*;f,\alpha_1+\alpha_2) - L(P^*;f,\alpha_1+\alpha_2) < \varepsilon$$

ini berarti $f \in \mathcal{R}_{(\alpha_1+\alpha_2)}[a,b]$

selanjutnya perhatikan karena

$$
\begin{aligned}
L(P^*;f,\alpha_1+\alpha_2) &= L(P^*;f,\alpha_1) + L(P^*;f,\alpha_2) \\
&\le \int_a^b f\,d\alpha_1 + \int_a^b f\,d\alpha_2 \\
&\le U(P^*;f,\alpha_1) + U(P^*;f,\alpha_2) \\
&= U(P^*;f,\alpha_1+\alpha_2)
\end{aligned}
$$

akibatnya

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\,d(\alpha_1+\alpha_2) \le \int_a^b f\,d\alpha_1 + \int_a^b f\,d\alpha_2 \le \int_a^{\overline{b}} f\,d(\alpha_1+\alpha_2)$$

dan karena $f \in \mathcal{R}_{(\alpha_1+\alpha_2)}[a,b]$, maka

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\,d(\alpha_1+\alpha_2) = \int_a^b f\,d(\alpha_1+\alpha_2) = \int_a^{\overline{b}} f\,d(\alpha_1+\alpha_2)$$

sehingga

$$\int_a^b f\, d(\alpha_1+\alpha_2) \le \int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2 \le \int_a^b f\, d(\alpha_1+\alpha_2)$$

dengan demikian dapat disimpulkan bahwa

$$\int_a^b f\, d\alpha_1 + \int_a^b f\, d\alpha_2 = \int_a^b f\, d(\alpha_1+\alpha_2) \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.9

Jika $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ *dan* c *adalah konstan positif, maka* $f \in \mathcal{R}_{(c\alpha)}[a,b]$ *dan*

$$\int_a^b f d(c\alpha) = c\int_a^b f\, d\alpha$$

Bukti :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ maka berdasarkan kriteria pengintegralan ada partisi P dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(P;f,\alpha) - L(P;f,\alpha) < \frac{\varepsilon}{c}$$

dimana c adalah konstan positif.

Kemudian misalkan

$$\Delta c\alpha_i = (c\alpha_i - c\alpha_{i-1}) = c(\alpha_i - \alpha_{i-1}) = c\Delta\alpha_i \ \ , \forall\, i \in \mathbb{N}$$

perhatikan

$$\begin{aligned} U(P;f,c\alpha) - L(P;f,c\alpha) &= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta c\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta c\alpha_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} M_i\, c\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i\, c\Delta\alpha_i \\ &= c\sum_{i=1}^{n} M_i\, \Delta\alpha_i - c\sum_{i=1}^{n} m_i\, \Delta\alpha_i \end{aligned}$$

$$= c\ \big(U(P\,;f,\alpha)\big) - c\ \big(L(P\,;f,\alpha)\big)$$

$$= c\big(U(P\,;f,\alpha) - L(P\,;f,\alpha)\big)$$

$$< c\ \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon$$

dengan demikian

$$U(P;f,c\alpha) - L(P;f,c\alpha) < \varepsilon$$

ini berarti $f \in \mathcal{R}_{(c\alpha)}[a,b]$.

Selanjutnya karena $f \in \mathcal{R}_{(c\alpha)}[a,b]$ berarti

$$\sup\ L(P\,;f,c\alpha) = \int_{\underline{a}}^{b} f\,d(c\alpha) = \int_{a}^{b} f\,d(c\alpha) = \int_{a}^{\overline{b}} f\,d(c\alpha)$$

$$= \inf\ U(P\,;f,c\alpha)$$

perhatikan karena

$$L(P\,;f,c\alpha) = c\big(L(P\,;f,\alpha)\big)$$

akibatnya berdasarkan teorema *2.2.4 a)* maka diperoleh

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\,d(c\alpha) = \sup\ L(P\,;f,c\alpha) = \sup\ c\big(L(P\,;f,\alpha)\big)$$

$$= c\ \sup\ L(P\,;f,\alpha) = c\int_{\underline{a}}^{b} f\,d\alpha$$

dengan demikian diperoleh

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\,d(c\alpha) = c\int_{\underline{a}}^{b} f\,d\alpha \qquad (1)$$

begitu pula karena

$$U(P\,;f,c\alpha) = c\big(U(P\,;f,\alpha)\big)$$

akibatnya

$$\overline{\int_a^b} f\, d(c\alpha) = \inf U(P\,; f, c\alpha) = \inf c\big(U(P\,; f, \alpha)\big)$$

$$= c\ \inf U(P\,; f, \alpha) = c\,\overline{\int_a^b} f\, d\alpha$$

dengan demikian diperoleh

$$\overline{\int_a^b} f\, d(c\alpha) = c\,\overline{\int_a^b} f\, d\alpha \qquad (2)$$

berdasarkan (1) dan (2), maka diperoleh

$$\underline{\int_a^b} f\, d(c\alpha) = c\,\underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \overline{\int_a^b} f\, d(c\alpha) = c\,\overline{\int_a^b} f\, d\alpha$$

ini berarti

$$\int_a^b f\, d(c\alpha) = c\int_a^b f\, d\alpha \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.10

Jika $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ *dan* $a < c < b$, *maka* $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, c]$ *dan* $f \in \mathcal{R}_\alpha[c, b]$. Dalam hal ini

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^c f\, d\alpha + \int_c^b f\, d\alpha$$

***Bukti** :*

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$. Karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$, maka berdasarkan kriteria pengintegralan ada partisi P dari $[a, b]$ sedemikian sehingga

$$U(P\,; f, \alpha) - L(P\,; f, \alpha) < \varepsilon$$

selanjutnya misalkan

$$P_1 = P \cap [a, c]$$

dan

$$P_2 = P \cap [c, b]$$

dimana

P_1 adalah partisi dari $[a, c]$ dan P_2 adalah partisi dari $[c, b]$

sehingga diperoleh

$$U(P_1\,; f, \alpha) - L(P_1\,; f, \alpha) \leq U(P\,; f, \alpha) - L(P\,; f, \alpha) < \varepsilon$$

dan

$$U(P_2\,; f, \alpha) - L(P_2\,; f, \alpha) \leq U(P\,; f, \alpha) - L(P\,; f, \alpha) < \varepsilon$$

dengan demikian

$$f \in \mathcal{R}_\alpha[a, c] \;\; dan\; f \in \mathcal{R}_\alpha[c, b] \tag{1}$$

kemudian untuk sebarang P partisi dari $[a, b]$, jika $P = P_1 \cup P_2$

maka berdasarkan teorema *2.2.7 b)* maka diperoleh

$$\begin{aligned} U(P\,; f, \alpha) &\geq \inf U(P\,; f, \alpha) \\ &= \inf \big(U(P_1\,; f, \alpha) + U(P_2\,; f, \alpha)\big) \\ &\geq \inf U(P_1\,; f, \alpha) + \inf U(P_2\,; f, \alpha) \\ &= \int_a^{\bar{c}} f\, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f\, d\alpha \end{aligned}$$

dengan demikian

$$\inf U(P\,; f, \alpha) \geq \int_a^{\bar{c}} f\, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f\, d\alpha$$

dengan kata lain

$$\int_a^{\bar{b}} f\, d\alpha \geq \int_a^{\bar{c}} f\, d\alpha + \int_c^{\bar{b}} f\, d\alpha$$

karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ akibatnya

$$\int_a^b f\,d\alpha \geq \int_a^{\overline{c}} f\,d\alpha + \int_c^{\overline{b}} f\,d\alpha \qquad (2)$$

begitu pula berdasarkan teorema *2.2.6 a)* maka diperoleh

$$\begin{aligned} L(P\,;f,\alpha) &\leq \sup\ L(P\,;f,\alpha) \\ &= \sup\ \big(U(P_1\,;f,\alpha) + U(P_2\,;f,\alpha)\big) \\ &\leq \sup\ U(P_1\,;f,\alpha) + \sup\ U(P_2\,;f,\alpha) \\ &= \int_{\underline{a}}^{c} f\,d\alpha + \int_{\underline{c}}^{b} f\,d\alpha \end{aligned}$$

dengan demikian

$$\sup\ L(P\,;f,\alpha) \leq \int_{\underline{a}}^{c} f\,d\alpha + \int_{\underline{c}}^{b} f\,d\alpha$$

dengan kata lain

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\,d\alpha \leq \int_{\underline{a}}^{c} f\,d\alpha + \int_{\underline{c}}^{b} f\,d\alpha$$

karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ akibatnya

$$\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_{\underline{a}}^{c} f\,d\alpha + \int_{\underline{c}}^{b} f\,d\alpha \qquad (3)$$

berdasarkan (1), (2),dan (3), maka diperoleh

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^c f\,d\alpha + \int_c^b f\,d\alpha \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.11

Jika $f \leq g$ *pada* $[a,b]$ *dan* $f, g \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, *maka*

$$\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b g\,d\alpha$$

Bukti :

Ambil sebarang P partisi dari $[a, b]$

kemudian misalkan

$$M_i(f) = \sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(g) = \sup \{g(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(f) = \inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(g) = \inf \{g(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

karena $f \leq g$ pada $[a, b]$, akibatnya

$$M_i(f) \leq M_i(g)$$

$$m_i(f) \leq m_i(g)$$

sehingga

$$U(P\,; f, \alpha) \leq U(P\,; g, \alpha)$$

$$L(P\,; f, \alpha) \leq L(P\,; g, \alpha)$$

dengan demikian

$$\inf U(P\,; f, \alpha) \leq \inf U(P\,; g, \alpha)$$

$$\sup\, L(P\,; f, \alpha) \leq \sup\, L(P\,; g, \alpha)$$

dengan kata lain

$$\int_a^{\bar{b}} f\, d\alpha \leq \int_a^{\bar{b}} g\, d\alpha$$

dan

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha \leq \int_{\underline{a}}^{b} g\, d\alpha$$

karena $f, g \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$, maka

$$\int_{a}^{\bar{b}} f\,d\alpha = \int_{\underline{a}}^{b} f\,d\alpha \le \int_{\underline{a}}^{b} g\,d\alpha = \int_{a}^{\bar{b}} g\,d\alpha$$

Ini berarti

$$\int_a^b f\,d\alpha \le \int_a^b g\,d \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.12

Jika $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ dan $|f(x)| \le M$ pada $[a,b]$, maka

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \le M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

Bukti

Misalkan

$$M_i(f) = sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

karena $|f(x)| \le M$ pada $[a,b]$, maka

$$M_i(f) \le M\ , \forall\ i \in \mathbb{N}$$

selanjutnya, karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, maka

untuk sebarang P partisi dari $[a,b]$ berlaku

$$\int_a^b f\,d\alpha = \int_a^{\bar{b}} f\,d\alpha = \inf U(P\,; f, \alpha) \le U(P\,; f, \alpha)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i \le \sum_{i=1}^{n} M \Delta\alpha_i = M \sum_{i=1}^{n} \Delta\alpha_i$$

$$= M[\alpha(b) - \alpha(a)]$$

dengan demikian

$$\int_a^b f\,d\alpha \le M[\alpha(b) - \alpha(a)] \qquad (1)$$

selanjutnya subtitusikan f oleh $-f$

sehingga berdasarkan *3.2.7* diperoleh

$$\int_a^b -f\, d\alpha = -\int_a^b f\, d\alpha$$

dengan demikian dari (1) diperoleh

$$-\int_a^b f\, d\alpha \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)] \qquad (2)$$

sehingga berdasarkan (1) dan (2) dapat disimpukan bahwa

$$\left|\int_a^b f\, d\alpha\right| \leq M[\alpha(b) - \alpha(a)] \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.13

Jika $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, *maka* $|f| \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ *dan* $\left|\int_a^b f\ \ d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\, d\alpha$

Bukti :

Karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ berarti untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada partisi P dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) < \varepsilon$$

selanjutnya misalkan

$$M_i(f) = sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i^*(f) = sup\{|f(x)| | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(f) = inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i^*(f) = inf\{|f(x)| | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

jika untuk sembarang $s, t \in [x_{i-1}, x_i]$ berlaku $\big||s| - |t|\big| \leq |s - t|$, maka

$$M_i^*(f) - m_i^*(f) = sup\left\{\big||s| - |t|\big| \mid s, t \in [x_{i-1}, x_i]\right\}$$

$$\leq sup\{|s-t| \mid s,t \in [x_{i-1},x_i]\}$$

$$= M_i(f) - m_i(f)$$

sehingga

$$M_i^*(f) - m_i^*(f) \leq M_i(f) - m_i(f)$$

ini berarti

$$U(P;|f|,\alpha) - L(P;|f|,\alpha) \leq U(P;f,\alpha) - L(P;f,\alpha) < \varepsilon$$

dengan demikian $|f| \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$

selanjutnya untuk sebarang $x \in [a,b]$ berlak*u*

$$f(x) \leq |f(x)|$$

dan

$$-f(x) \leq |f(x)|$$

maka berdasarkan teorema *3.2.11* diperoleh

$$\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b |f|\,d\alpha$$

dan

$$-\int_a^b f\,d\alpha \leq \int_a^b |f|\,d\alpha$$

ini berarti

$$\left|\int_a^b f\,d\alpha\right| \leq \int_a^b |f|\,d\alpha \qquad \blacksquare$$

Teorema 3.2.14

Jika $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$, *maka* $f^2 \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$

Bukti :

Misalkan

$$M_i(f) = \sup\ \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(f) = \inf\ \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

sehingga

$$M_i(f^2) = \sup\ \{f^2(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \big(M_i(|f|)\big)^2$$

$$m_i(f^2) = \inf\ \{f^2(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\} = \big(m_i(|f|)\big)^2$$

dimana

$$M_i(|f|) = \sup\ \{|f(x)| | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(|f|) = \inf\ \{|f(x)| | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

karena f terbatas pada $[a,b]$, maka ada $M > 0$ sedemikian sehingga

$$|f(x)| \leq M\ , \forall\ x \in [a,b]$$

sehingga diperoleh

$$M_i \leq M \text{ dan } m_i \leq M, \text{ dimana } i \in \mathbb{N}$$

karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ berarti untuk sebarang $\varepsilon > 0$ ada partisi P dari $[a,b]$ sedemikian sehingga

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) < \frac{\varepsilon}{2M}$$

selanjutnya perhatikan

$$M_i(f^2) - m_i(f^2) = \big(M_i(|f|)\big)^2 - \big(m_i(|f|)\big)^2$$

$$= \big(M_i(|f|) + m_i(|f|)\big)\big(M_i(|f|) - m_i(|f|)\big)$$

$$\leq 2M\big(M_i(|f|) - m_i(|f|)\big)$$

dengan demikian

$$U(P; f^2, \alpha) - L(P; f^2, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} [M_i(f^2) - m_i(f^2)]\, \Delta\alpha_i$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \big[2M\big(M_i(|f|) - m_i(|f|)\big)\big]\, \Delta\alpha_i$$

$$= 2M \sum_{i=1}^{n} [M_i(|f|) - m_i(|f|)]\, \Delta\alpha_i$$

$$= 2M \sum_{i=1}^{n} [M_i(f) - m_i(f)]\, \Delta\alpha_i$$

$$= 2M\big(U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha)\big)$$

$$< 2M\ \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

ini berarti $f^2 \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ ■

Selanjutnya berikut akan diberikan beberapa contoh dari fungsi bernilai *real* baik yang terintegralkan *Riemann-Stieltjes* ataupun yang tidak terintegralkan *Riemann-Stieltjes*.

***Contoh 3.2.15*: (Fungsi yang Terintegralkan *Riemann-Stieltjes*)**

Diketahui $a < c \leq b$ dan misalkan $I_c(x) = I(x - c)$ yang didefinisikan sebagai berikut

$$I_c(x) = \begin{cases} 0\,, x < c \\ 1\,, x \geq c \end{cases}$$

Jika f adalah fungsi bernilai *real* yang terbatas pada $[a, b]$ dan kontinu di c, dimana $a < c \leq b$, akan ditunjukkan f terintegralkan *Riemann-Stieltjes* terhadap I_c dan

$$\int_a^b f\, dI_c = \int_a^b f\, dI(x - c) = f(c)$$

Bukti :

Misalkan $\alpha(x) = I_c(x)$, sehingga jelas berdasarkan pendefinisian fungsi di atas $\forall x \in [a, b]$ maka $\alpha(x)$ monoton naik pada $[a, b]$.

selanjutnya misalkan $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sebarang partisi pada $[a, b]$.

karena $a < c \leq b$, maka ada indeks k, dimana $1 \leq k \leq n$ sedemikian sehingga

$$x_{k-1} < c \leq x_k$$

maka $$\Delta\alpha_k = \alpha(x_k) - \alpha(x_{k-1}) = 1 - 0 = 1$$

dan $$\Delta\alpha_i = 0\,, \forall\, i \neq k$$

dengan demikian

$$U(P, f, \alpha) = M_k \Delta\alpha_k = M_k(1) = M_k = \sup\{f(t) | x_{k-1} \leq t \leq x_k\}$$

dan

$$L(P,f,\alpha) = m_k \Delta\alpha_k = m_k(1) = m_k = \inf\{f(t) | x_{k-1} \leq t \leq x_k\}$$

selanjutnya, karena f kontinu di c berarti $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ sedemikian sehingga jika $t \in [a,b]$, $|t - c| < \delta$ maka $|f(t) - f(c)| < \varepsilon$.

dengan kata lain

$$f(c) - \varepsilon < |f(t)| < f(c) + \varepsilon$$

sehingga jika P sebarang partisi dari $[a,b]$ dengan $x_j - x_{j-1} < \delta, \forall\, j$, maka diperoleh

$$f(c) - \varepsilon \leq m_k \leq M_k \leq f(c) + \varepsilon$$

dengan demikian

$$f(c) - \varepsilon \leq L(P,f,\alpha) \leq U(P,f,\alpha) \leq f(c) + \varepsilon$$

dengan kata lain

$$f(c) - \varepsilon \leq \int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha \leq \int_{a}^{\overline{b}} f\, d\alpha \leq f(c) + \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ sebarang, akibatnya

$$\int_{\underline{a}}^{b} f\, d\alpha = \int_{a}^{\overline{b}} f\, d\alpha$$

dengan demikian $f \in \mathcal{R}_\alpha[a,b]$ dengan $\int_a^b f\, d\alpha = f(c)$ ■

Contoh 3.2.16 **: (Fungsi yang Tidak Terintegralkan *Riemann-Stieltjes*)**

Misalkan $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ dan α adalah fungsi monoton naik pada $[a,b]$

akan ditunjukkan bahwa f tidak terintegralkan *Riemann-Stieltjes* terhadap α

Bukti :

$$f(x) = \begin{cases} 1\,, x \in \mathbb{Q} \\ 0\,, x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Misalkan α fungsi yang monoton naik pada $[a, b]$ dengan $a < b$ dan $\alpha(a) \neq \alpha(b)$

ambil $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ sebarang partisi pada $[a, b]$.

jika

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}\,, x_i]\}$$

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}\,, x_i]\}$$

maka $\quad M_i = 1 \text{ dan } m_i = 0 \ \forall\ i = 1,2, \dots, n$

dengan demikian

$$L(P, f, \alpha) = 0$$

dan

$$U(P, f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} (1)\Delta\alpha_i = \alpha(b) - \alpha(a)$$

akibatnya

$$\underline{\int_{a}^{b}} f\, d\alpha \neq \overline{\int_{a}^{b}} f\, d\alpha$$

dengan demikian f tidak terintegralkan *Riemann-Stieltjes* terhadap α. ■

3.3 Keterkaitan Integral *Riemann-Stieltjes* dan Integral *Riemann*

Meskipun pada awal pembahasan telah disinggung mengenai hubungan antara *Integral Riemann-Stieltjes* dan *Integral Riemann*, namun masih ada hubungan diantara keduanya yang belum terbahas, yakni fakta bahwa integralkan *Riemann-Stieltjes* dapat dikonversi ke dalam bentuk integral *Riemann*. Oleh karena itu, berikut akan diberikan suatu teorema yang menyatakan persyaratan yang harus dipenuhi agar pengkonversian ini dapat terjadi.

Teorema 3.3.1

Misalkan diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ *dan partisi* P *dari* $[a, b]$. *Jika berlaku*

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) < \varepsilon$$

dan s_i , t_i *adalah sebarang titik di* $I_i = [x_{i-1}, x_1]$, *dimana* I_i *merupakan subinterval dari* $[a, b]$, *maka*

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)|\, \Delta\alpha_i < \varepsilon$$

Bukti :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$ dan partisi P dari $[a, b]$ sedemikian sehingga berlaku

$$U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha) < \varepsilon$$

Misalkan

$$M_i(f) = \sup \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$m_i(f) = \inf \{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

ambil sebarang dua titik $s_i, t_i \in [x_{i-1}, x_1]$, akibatnya $f(s_i), f(t_i) \in [m_i, M_i]$ dengan demikian diperoleh

$$|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i$$

perhatikan

$$|f(s_i) - f(t_i)| \leq M_i - m_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \leq \sum_{i=1}^{n} M_i - m_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i \leq \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i) \, \Delta\alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i - m_i \, \Delta\alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \, \Delta\alpha_i$$

$$= U(P; f, \alpha) - L(P; f, \alpha)$$

$$< \varepsilon$$

dengan demikian diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n} |f(s_i) - f(t_i)| \, \Delta\alpha_i < \varepsilon$$ ■

Teorema 3.3.2

Jika α *merupakan fungsi monoton naik pada* $[a, b]$ *dan* $\alpha' \in \mathcal{R}[a, b]$, *serta jika* f *adalah fungsi bernilai real yang terbatas pada* $[a, b]$, *maka* $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ *jika dan hanya jika* $f\alpha' \in \mathcal{R}[a, b]$, *dalam kasus ini*

$$\int_a^b f \, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x) \, dx$$

Bukti :

Ambil sebarang $\varepsilon > 0$, karena jika $f = 0$ mengakibatkan hasil yang trivial, maka misalkan

$$M = \sup\{|f(x)|| x \in [a, b]\}$$

karena $\alpha' \in \mathcal{R}[a, b]$ maka berdasarkan kriteria pengintegralan dan fakta bahwa integral *Riemann-Stieltjes* ekivalen dengan integral *Riemann* ketika $\Delta\alpha_i = \Delta x_i$ maka ada patisi P dari $[a, b]$ sedemikian sehingga berlaku

$$U(P; \alpha', x) - L(P; \alpha', x) < \varepsilon \tag{1}$$

karena α kontinu pada $[a, b]$ dan terdiferensial pada (a, b) jika digunakan teorema *2.4.7* (*Teorema Nilai Rata-Rata*) pada setiap subinterval $[x_{i-1}, x_i]$, maka ada $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ sedemikian sehingga berlaku

$$\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1}) = \alpha'(x_i - x_{i-1})$$

dengan kata lain

$$\Delta\alpha_i = \alpha' \Delta x_i \ , \ \forall i \in \mathbb{N}$$

selanjutnya jika diambil sebarang $s_i \in [x_{i-1}, x_i]$, maka berdasarkan (1) dan teorema *3.3.1* diperoleh

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} |\alpha'(s_i) - \alpha'(t_i)| \Delta x_i < \varepsilon \tag{2}$$

selanjutnya jika

$$\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \Delta\alpha_i = \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(t_i) \Delta x_i \tag{3}$$

maka berdasarkan (2) dan (3) diperoleh

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(s_i) \Delta x_i \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(t_i) \Delta x_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(s_i) \Delta x_i \right|$$

$$= \left| \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, [\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)] \Delta x_i \right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} |f(s_i) [\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)] \Delta x_i|$$

$$= \sum_{i=1}^{n} |f(s_i)|\, |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)| |\Delta x_i|$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} M |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\, \Delta x_i$$

$$= M \sum_{i=1}^{n} |\alpha'(t_i) - \alpha'(s_i)|\, \Delta x_i$$

$$< M\varepsilon$$

dengan demikian berlaku

$$|\textstyle\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(s_i) \Delta x_i| < M\varepsilon \qquad (4)$$

ini berarti

$$-M\varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(s_i) \Delta x_i < M\varepsilon$$

perhatikan

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(s_i) \Delta x_i < M\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \Delta\alpha_i < \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\, \alpha'(s_i) \Delta x_i + M\varepsilon$$

karena $s_i \in [x_{i-1}\,,\ x_i]$ diambil sebarang, maka

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i < U(P; f\alpha', x) + M\varepsilon$$

ini berarti $U(P; f\alpha', x) + \varepsilon$ adalah batas atas untuk semua penjumlahan dalam bentuk $\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i$, oleh karena itu diperoleh

$$U(P; f, \alpha) < U(P; f\alpha', x) + M\varepsilon \qquad (5)$$

selanjutnya perhatikan

$$-M\varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i - \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(s_i)\Delta x_i$$

$$\Leftrightarrow -\left(M\varepsilon + \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i\right) < -\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(s_i)\Delta x_i$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(s_i)\Delta x_i < \sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\Delta\alpha_i + M\varepsilon$$

karena $s_i \in [x_{i-1}\,,\ x_i]$ diambil sebarang, maka

$$\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(s_i)\Delta x_i < U(P; f, \alpha) + M\varepsilon$$

ini berarti $U(P; f, \alpha) + M\varepsilon$ merupakan batas atas untuk semua penjumlahan dalam bentuk $\sum_{i=1}^{n} f(s_i)\,\alpha'(s_i)\Delta x_i$, oleh karena itu diperoleh

$$U(P; f\alpha', x) < U(P; f, \alpha) + M\varepsilon \qquad (6)$$

berdasaarkan (5) dan (6), maka diperoleh

$$U(P; f\alpha', x) - M\varepsilon < U(P; f, \alpha) < U(P; f\alpha', x) + M\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow -M\varepsilon < U(P; f, \alpha) - U(P; f\alpha', x) < M\varepsilon$$

$$\Leftrightarrow |U(P; f, \alpha) - U(P; f\alpha', x)| < M\varepsilon \qquad (7)$$

selanjutnya karena (1) juga berlaku untuk sebarang partisi penghalusan P^* dari P, maka (7) juga berlaku untuk P^* sehingga mengakibatkan

$$\left| \overline{\int_a^b} f\, d\alpha - \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\, dx \right| < M\varepsilon < \varepsilon$$

karena $\varepsilon > 0$ diambil sebarang, maka dapat disimpulkan bahwa

$$\overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\, dx$$

dengan cara yang analog seperti langkah di atas maka diperoleh

$$\underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\, dx$$

karena $f \in \mathcal{R}_\alpha[a, b]$ maka

$$\overline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\, dx = \overline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f\, d\alpha = \underline{\int_a^b} f(x)\alpha'(x)\, dx$$

ini berarti

$$\int_a^b f\, d\alpha = \int_a^b f(x)\alpha'(x)\, dx \qquad \blacksquare$$

Pada bab sebelumnya telah dibahas bahwa integral *Riemann* merupakan kasus khusus dari integral *Riemann-Stieltjes*, yakni disaat $\alpha = x$ hal ini menyebabkan integral *Riemann* ekivalen dengan integral *Riemann-Stieltjes*. Akan tetapi ketika $\alpha \neq x$ hal ini menyebabkan terdapat fungsi yang terintegralkan *Riemann-Stieltjes* namun tidak terintegralkan *Riemann* seperti fakta pada contoh berikut.

Contoh 3.3.3

Misalkan

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0 & , x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

dan $\alpha(x) = k$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Akan ditunjukkan bahwa $f \notin \mathcal{R}[0,1], \forall\, x \in [0,1]$ namun $f \in \mathcal{R}_\alpha[0,1], \forall\, x \in [0,1]$.

Bukti :

Ambil sebarang partisi P pada $[0,1]$. Berdasarkan latihan 7.1 nomor 12 pada buku edisi ketiga “ Introduction to Real Analysis” karangan Robet G. Barlte dan Donald R. Sherbert telah dinyatakan bahwa $f \notin \mathcal{R}[0,1], \forall\, x \in [0,1]$.

Selanjutnya misalkan

$$M_i = \sup\{f(x) | x \in [0,1]\}$$

$$m_i = \inf\{f(x) | x \in [0,1]\}$$

maka $M_i = 1$ dan $m_i = 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$.

Perhatikan

$$U(P; f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta\alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 1\big(\alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})\big)$$

$$= 1\big(\alpha(1) - \alpha(0)\big)$$

$$= 1(k - k)$$

$$= 0$$

dan

$$L(P; f, \alpha) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta\alpha_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} 0\ \Delta\alpha_i$$

$$= 0$$

Hal ini mengakibatkan

$$\inf U(P; f, \alpha) = 0 = \sup L(P; f, \alpha)$$

Ini berarti $f \in \mathcal{R}_\alpha[0,1], \forall\, x \in [0,1]$. ■