

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang Masalah

Integral adalah salah satu konsep penting dalam Matematika yang dikemukakan pertama kali oleh Isac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz pada akhir abad ke-17. Selanjutnya konsep ini pada tahun 1850 diteliti secara lebih mendalam oleh Bernhard Riemann. Riemann mendefinisikan integral suatu fungsi pada domain berupa interval tertutup dan terbatas pada  $\mathbb{R}$  sebagai luas daerah di bawah kurva dari fungsi tersebut. Untuk menentukan luas daerah tersebut diawali dengan membagi interval dimana fungsi terdefinisi menjadi subinterval-subinterval yang banyaknya berhingga. Kemudian dibentuk poligon-poligon dengan lebar  $[x_{i-1}, x_i]$  dan tinggi  $f(x)$  untuk  $x \in [x_{i-1}, x_i]$  pada daerah di bawah kurva dari fungsi tersebut. Selanjutnya ditentukan luas poligon-poligon di atas kurva yang dinotasikan dengan  $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$  dan luas poligon-poligon di bawah kurva yang dinotasikan dengan  $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$  dimana  $M_i = \sup\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ ,  $m_i = \inf\{f(x) | x \in [x_{i-1}, x_i]\}$ , dan  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ . Dengan penghampiran bahwa poligon tersebut banyaknya menuju tak hingga, maka luas daerah di bawah kurva atau dengan kata lain integral dari suatu fungsi dapat ditentukan jika limit dari jumlah poligon di atas kurva dan limit dari jumlah poligon di bawah kurva ini bernilai sama. Cara Riemann mendefinisikan integral seperti cara di atas disebut pendefinisian integral secara konstruktif.

Fungsi yang terintegralkan dengan cara di atas disebut fungsi yang terintegralkan *Riemann*. Adapun untuk himpunan semua fungsi yang terintegralkan *Riemann* dinotasikan dengan  $\mathcal{R}$ , lebih khususnya himpunan semua fungsi yang terintegralkan *Riemann* pada interval  $[a, b]$  dinotasikan dengan  $\mathcal{R}[a, b]$ .

Selanjutnya dikembangkan suatu teori pengintegralan lainnya yang merupakan generalisasi dari konsep integral *Riemann* dan mampu menyelesaikan persoalan yang tidak dapat diselesaikan oleh integral *Riemann*, yakni integral *Riemann-Stieltjes*, yang mana integral ini pertama kali ditemukan oleh Thomas Joannes Stieltjes pada periode 1856-1894. Pada Integral *Riemann-Stieltjes* selalu melibatkan dua fungsi, yaitu fungsi bernilai real  $f$  yang terdefinisi pada interval  $[a, b]$  dan fungsi  $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  yang merupakan integrator dari fungsi  $f$  dimana integrator ini adalah suatu fungsi yang monoton naik pada interval  $[a, b]$ . Adapun  $\sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$  dan  $\sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$  pada integral *Riemann* dipandang sebagai  $\sum_{i=1}^n M_i \Delta \alpha_i$  dan  $\sum_{i=1}^n m_i \Delta \alpha_i$  pada Integral *Riemann-Stieltjes* dengan  $\Delta \alpha_i = \alpha(x_i) - \alpha(x_{i-1})$ . Sehingga jika integrator ini merupakan fungsi identitas, maka hal ini dapat menyebabkan integral *Riemann-Stieltjes* ekuivalen dengan integral *Riemann*.

Himpunan semua fungsi yang terintegralkan *Riemann-Stieltjes* terhadap fungsi  $\alpha$  dinotasikan dengan  $\mathcal{R}_\alpha$ , lebih khususnya himpunan semua fungsi yang terintegralkan *Riemann-Stieltjes* pada interval  $[a, b]$  terhadap fungsi  $\alpha$  dinotasikan dengan  $\mathcal{R}_\alpha[a, b]$ .

Pada skripsi ini akan dikaji sifat-sifat dari integral *Riemann-Stieltjes* serta keterkaitan antara integral *Riemann* dan integral *Riemann-Stieltjes* jika turunan

integratornya  $\alpha'$  terintegralkan *Riemann*. Sehingga nantinya memunculkan bagaimana memanfaatkan konsep integral *Riemann-Stieltjes* ini untuk mengkonstruksi integral *Riemann-Stieltjes* dari fungsi yang bernilai vektor. Kemudian selanjutnya akan diselidiki beberapa sifat yang berlaku pada integral *Riemann-Stieltjes* dari fungsi bernilai vektor ini.

## 1.2 Rumusan Masalah

Berdasarkan uraian pada latar belakang masalah di atas, maka beberapa permasalahan yang akan di kaji dalam skripsi ini dirumuskan sebagai berikut:

1. Sifat-sifat apakah yang berlaku pada integral *Riemann-Stieltjes* dari fungsi bernilai *real*?
2. Bagaimana hubungan antara integral *Riemann* dan integral *Riemann-Stieltjes*?
3. Bagaimana mengkonstruksi integral *Riemann-Stieltjes* dari fungsi bernilai vektor?
4. Sifat-sifat apakah yang berlaku pada integral *Riemann-Stieltjes* dari fungsi bernilai vektor ?

### 1.3 Batasan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah dan rumusan masalah yang telah diuraikan di atas nampaknya akan banyak hal menarik yang dapat dikembangkan dalam kajian permasalahan ini. Namun karena keterbatasan penulis, maka kajian pada tulisan ini hanya akan dibatasi pada fungsi yang bernilai vektor  $\mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_k): [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k$  dengan  $x \rightarrow (f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x))$ , dimana  $f_i$  merupakan fungsi bernilai *real* yang memetakan  $[a, b]$  ke  $\mathbb{R}$  untuk setiap  $i = 1, 2, \dots, k$ .

### 1.4 Tujuan Penelitian

Adapun tujuan dari penulisan skripsi ini secara garis besar adalah untuk mengetahui bagaimana integral *Riemann-Stieltjes* ini didefinisikan untuk fungsi-fungsi yang bernilai vektor serta sifat apa saja yang berlaku untuk kondisi tersebut.

### 1.5 Manfaat Penelitian

Melalui skripsi ini diharapkan dapat memberikan kontribusi yang berarti, baik bagi penulis maupun bagi pembaca pada umumnya. Serta diharapkan bagi pembaca skripsi ini dapat membuka pikiran dan wawasan serta menambah perbendaharaan pengetahuan mengenai Matematika, khususnya dalam perbendaharaan pengetahuan mengenai integral. Dalam hal ini diharapkan pembaca dapat memanfaatkan konsep pengkonstruksian dan sifat-sifat integral *Riemann-Stieltjes* dari fungsi yang bernilai vektor ini sebagai jembatan untuk meneliti integral lainnya untuk fungsi yang bernilai vektor.

## 1.6 Sistematika Penulisan

Adapun sistematika yang digunakan dalam penyusunan skripsi ini adalah sebagai berikut :

### BAB I : Pendahuluan

Dalam bab ini dikemukakan latar belakang masalah, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan penelitian, manfaat penelitian, serta sistematika penulisan dari skripsi ini.

### BAB II : Teori Pendukung

Dalam bab ini dibahas beberapa konsep tentang Sistem Bilangan *Real*, Sifat Urutan Bilangan *Real*, Sifat Kelengkapan Bilangan *Real*, Barisan Bilangan *Real*, Kekontinuan Fungsi, dan integral *Riemann* dimana nantinya akan digunakan sebagai alat bantu untuk mendukung pembahasan pada bab III dan IV.

### BAB III : Sifat-Sifat Integral *Riemann-Stieltjes*

Dalam bab ini dibahas definisi integral *Riemann-Stieltjes*, kriteria pengintegral untuk integral *Riemann-Stieltjes*, sifat-sifat integral *Riemann-Stieltjes*, hubungan antara integral *Riemann* dan integral *Riemann-Stieltjes*, serta beberapa contoh baik dari fungsi yang terintegralkan *Riemann-Stieltjes* maupun dari fungsi yang tidak terintegralkan *Riemann-Stieltjes*.

#### BAB IV : Sifat-Sifat Integral *Riemann-Stieltjes* dari Fungsi Bernilai Vektor

Bab ini merupakan inti dari skripsi ini, yaitu mengemukakan bagaimana mengkonstruksi integral *Riemann-Stieltjes* dari fungsi bernilai vektor, serta mengemukakan tentang beberapa sifat yang dilahirkan dari kondisi tersebut. Selain itu pada bab ini juga dilengkapi dengan contoh dari fungsi bernilai vektor yang terintegralkan *Riemann-Stieltjes* yang kemudian dilanjutkan dengan pembahasan mengenai keterkaitan antara integral *Riemann* dan integral *Riemann-Stieltjes* dari fungsi bernilai vektor dengan contoh pendukungnya.

#### BAB V : Penutup

Bab ini merupakan bagian terakhir dari skripsi ini, yaitu mengemukakan intisari atau kesimpulan dari seluruh yang menjadi inti permasalahan serta saran penulis bagi pembaca yang tertarik untuk mengembangkan pembahasan tentang integral *Riemann-Stieltjes*.