BAB III

RUANG SEMIMETRIK $\boldsymbol{D[a,b]}$

Himpunansemuafungsi yang terintegralkanDarbouxpadaselangtutup$[a,b]$ dinotasikan dengan $D[a,b]$.Pada Bab IIIiniakandibahasbagaimanasemimetrikpada$D[a,b]$ dibentuk,sehingga$D[a,b]$ bersama dengan semimetriknya merupakanruangsemimetrik.Kemudianpembahasandilanjutkandengankonsephimpunanbukadanhimpunantutuppadaruangsemimetrik$D[a,b]$, dantopologipada$D[a,b]$.

3.1 PembentukkanRuangSemimetrik$\boldsymbol{D[a,b]}$

Padasubbab 3.1 ini, untukmembahasbagaimanaruangsemimetrik$D[a,b]$ dibentuk sebelumnya akan didefinisikan terlebih dahulu jarak antara dua buah fungsi pada $D[a,b]$.

Misalkan$f,g \in D[a,b]$, didefinisikan jarak d_D antara $f$dan$g$ yaitu fungsi $d_D : D[a,b] \times D[a,b] \to \mathbb{R}$ sebagai

$$d_D(f,g) \coloneqq D\int_a^b |f-g|.$$

Selanjutnyaakanditunjukkanbahwad_D adalah semimetrik pada $D[a,b]$ yaitu jika semua kondisi dari Definisi 2.6.1 dipenuhiolehd_D.

Teorema 3.1.1

Jika d_D *adalah jarak antara* f *dan* g *dengan* $d_D(f,g) \coloneqq D\int_a^b |f-g|$, *maka* d_D *adalah semimetrik pada* $D[a,b]$.

Bukti

Ambilsembarang $f,g,h \in D[a,b]$.

1. Diberikanselangtertutup $[a,b]$ dan misalkan $P = \{[x_{i-1},x_i]\}_{i=1}^{n}$ adalah sembarang partisi dari $[a,b]$. Karena $|f(x)-g(x)| \geq 0$ untuk setiap $x \in [a,b]$, maka

$$m_i = \inf\{|f(x)-g(x)| : x \in [x_{i-1},x_i]\} \geq 0,$$

dan

$$M_i = \sup\{|f(x)-g(x)| : x \in [x_{i-1},x_i]\} \geq 0.$$

Dengandemikian, berdasarkanDefinisi 2.5.1.1 jumlahDarbouxbawahdari $|f-g|$ adalah

$$L(|f-g|;\ P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0,$$

danjumlahDarbouxatasdari $|f-g|$ adalah

$$U(|f-g|;\ P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \geq 0.$$

Akibatnya,

$$D\int_{\underline{a}}^{b} |f(x)-g(x)|\ dx = \sup\{L(|f-g|;\ P) : P \in \pi[a,b]\} \geq 0,$$

dan

$$D\int_a^{\overline{b}} |f(x)-g(x)|\ dx = \inf\{U(|f-g|;\ P) : P \in \pi[a,b]\} \geq 0.$$

Karena$f$dan$g$ terintegralkanDarboux, makaberdasarkanTeorema 2.5.3.3 danTeorema 2.5.3.10$|f-g|$ terintegralkan Darboux. Sehingga,

$$D\int_a^b |f(x)-g(x)|dx = D\int_{\underline{a}}^b |f(x)-g(x)|\,dx = D\int_a^{\overline{b}} |f(x)-g(x)|\,dx \geq 0$$

untuk$x \in [a,b]$ dan akibatnya

$$d_D(f,g) = D\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx \geq 0.$$

Jadi, $d_D(f,g) \geq 0$ untuk setiap $f,g \in D[a,b]$.

2. Untuksembarang$f \in D[a,b]$ dan $x \in [a,b]$, berlaku

$$d_D(f,f) = D\int_a^b |f(x)-f(x)|\,dx$$

$$= D\int_a^b 0\,dx = c|_a^b = c - c = 0,$$

untuksuatukonstanta$c$. Jadi, $d_D(f,f) = 0$ untuk setiap $f \in D[a,b]$ dan $x \in [a,b]$.

3. Karena$|f(x)-g(x)| = |g(x)-f(x)|$ untuk $x \in [a,b]$, maka

$$d_D(f,g) = D\int_a^b |f(x)-g(x)|\,dx = D\int_a^b |g(x)-f(x)|\,dx = d_D(g,f).$$

Jadi, $d_D(f,g) = d_D(g,f)$ untuk setiap $f,g \in D[a,b]$.

4. Perhatikanbahwa

$$|f(x)-g(x)| = |f(x)-h(x)+h(x)-g(x)|$$

$$\leq |f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|$$

untuk$x \in [a, b]$. Dengan demikian,

$$d_D(f, g) = D \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$= D \int_a^b |f(x) - h(x) + h(x) - g(x)|\, dx.$$

SelanjutnyadariTeorema 2.5.3.3 danTeorema 2.5.3.4 diperoleh

$$d_D(f, g) \leq D \int_a^b [|f(x) - h(x)| + |h(x) - g(x)|]\, dx$$

$$\leq D \int_a^b |f(x) - h(x)|\, dx + D \int_a^b |h(x) - g(x)|\, dx$$

$$= d_D(f, h) + d_D(h, g)$$

Jadi, $d_D(f, g) \leq d_D(f, h) + d_D(h, g)$ untuk setiap $f, g, h \in D[a, b]$.

KarenasemuakondisidariDefinisi 2.6.1 dipenuhiolehd_D, maka d_D adalah suatu semimetrik pada $D[a, b]$. ■

Karenad_D adalah semimetrik pada $D[a, b]$, maka $D[a, b]$bersamadengansemimetrik$d_D$merupakanruangsemimetrikdandinotasikandengan$(D[a, b], d_D)$. Perludiketahuibahwa$D[a, b]$ bukanlah ruang metrik, karena jarak d_D tidak memenuhi kondisi: jika $d_D(f, g) = 0$ maka $f = g$ untuk setiap $f, g \in D[a, b]$. Hal tersebut ditunjukkan pada contoh berikut.

Contoh 3.1.2

Diberikanfungsi$F: [0,1] \to \mathbb{R}$ dan $G: [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan $F(x) \coloneqq 0$ untuk $x \in [0,1] \backslash \frac{1}{2}$ dan $F(x) \coloneqq 1$untuk $= \frac{1}{2}$,dan$G(x) \coloneqq 0$ untuk setiap $x \in [0,1]$. Jelas bahwa terdapat $x \in [0,1]$ sedemikian sehingga $f(x) \neq g(x)$, sehingga $f \neq g$. Akan ditunjukkan untuk $f, g \in D[0,1]$, $D\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = 0$.

Fungsi$f$ kontinu pada selang $[0,1]$ kecuali di $= \frac{1}{2}$, maka berdasarkan Teorema 2.5.3.6$f \in D[0,1]$. Fungsi g juga kontinu pada selang$[0,1]$, makaberdasarkanTeorema 2.5.3.5$g \in D[0,1]$. Dengan demikianberdasarkanTeorema 2.5.3.7diperoleh

$$D\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = D\int_0^{\frac{1}{2}} |f(x) - g(x)|\, dx + D\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$+ D\int_{\frac{1}{2}}^{1} |f(x) - g(x)|\, dx$$

$$= D\int_0^{\frac{1}{2}} |0 - 0|\, dx + D\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} |1 - 0|\, dx + D\int_{\frac{1}{2}}^{1} |0 - 0|\, dx$$

$$= c_1\Big|_0^{\frac{1}{2}} + x\,\Big|_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + c_2\Big|_{\frac{1}{2}}^{1} = 0 + 0 + 0 = 0$$

untukkonstantac_1 dan c_2. Jadi$D\int_0^1 |f(x) - g(x)|\, dx = 0$, namun$f(x) \neq g(x)$.

3.2 HimpunanBukadanHimpunanTutuppadaRuangSemimetrik$\boldsymbol{D[a,b]}$

Setelahditunjukkanbahwad_D merupakan semimetrik pada $D[a,b]$ sehingga $(D[a,b], d_D)$ adalah ruang semimetrik, selanjutnyapadasubbabiniakandibahasmengenaihimpunanbukadanhimpunantutup nya.Sebelumnya,akandidefinisikanterlebihdahulu bola buka, bola tutupdankulit bola dariruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$.Pada Bab II telahdiberikandefinisi bola buka, bola tutupdankulit bola dariruangsemimetrikumum, dengancara yang samaberikutinidiberikandefinisi bola buka, bola tutupdankulit bola dariruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$.

Definisi 3.2.1 (Bola Buka)

Diberikanruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$. *Jika* $f \in D[a,b]$*dan* $r > 0$, *maka himpunan* $B_r(f) \coloneqq \{g \in D[a,b] : d_D(f,g) < r\}$ *disebut bola buka yang berpusat di f dengan radius r.*

Definisi 3.2.2 (Bola Tutup)

Diberikanruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$. *Jika* $f \in D[a,b]$*dan* $r > 0$, *maka himpunan* $\overline{B_r}(f) \coloneqq \{g \in D[a,b] : d_D(f,g) \leq r\}$ *disebut bola tutup yang berpusat di f dengan radius r.*

Definisi 3.2.3 (Kulit Bola)

Diberikanruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$. *Jika* $f \in D[a,b]$*dan* $r > 0$, *maka himpunan* $B_r{}'(f) \coloneqq \{g \in D[a,b] : d_D(f,g) = r\}$ *disebut kulit bola yang berpusat di f dengan radius r.*

Selanjutnyahimpunanbukapadaruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$ didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.2.4 (HimpunanBuka)

Diberikanruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$. *Himpunan* $A \subseteq D[a,b]$ *dikatakan buka pada ruang semimetrik* $(D[a,b], d_D)$ *jika dan hanya jika untuk setiap* $f \in A$ *terdapat* $r > 0$ *sedemikian sehingga* $B_r(f) \subseteq A$.

Misalkan$\mathcal{A}$ adalah koleksi semua himpunan buka pada ruang semimetrik$(D[a,b], d_D)$, kemudian pada $\mathcal{A}$ diberlakukan operasi himpunan yakni gabungan dan irisan, maka teorema berikut menyatakan ketertutupan sifat operasihimpunanpada$\mathcal{A}$.

Teorema 3.2.5

Misalkan$\mathcal{A} \coloneqq \{A_\alpha \subseteq D[a,b] : A_\alpha \text{ buka untuk setiap } \alpha \in I\}$.

1. $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ *adalah buka pada ruang semimetrik* $(D[a,b], d_D)$ *untuk sembarang* I *himpunan indeks.*
2. $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$ *adalah buka pada ruang semimetrik*$(D[a,b], d_D)$ *untuk himpunan* I *yang berhingga.*

Bukti

1. Misalkan$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ untuk sembarang$I$ himpunan indeks. Ambil sembarang $f \in \mathcal{A}$, makaterdapat$A_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ untuk suatu $\alpha \in I$ sehingga $f \in A_\alpha \subseteq \mathcal{A}$. Karena A_α buka maka terdapat bola buka $B_r(f) \subseteq A_\alpha$

sedemikian sehingga $f \in B_r(f) \subseteq A_\alpha$, di lain pihak $A_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ dengan demikian diperoleh

$$f \in B_r(f) \subseteq A_\alpha \subseteq \mathcal{A}$$

sehingga$f \in B_r(f) \subseteq \mathcal{A}$, kemudian dari Definisi 3.2.4 dapatdisimpulkanbahwa$\mathcal{A}$ buka.

2. Misalkan$\{A_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah himpunan buka pada ruang semimetrik $(D[a,b], d_D)$ dan $\mathcal{G} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$untuk $n \in \mathbb{N}$, dengan demikian jika diambil sembarang $f \in \mathcal{G}$, maka $f \in A_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Karena A_i buka pada ruang semimetrik $(D[a,b], d_D)$ berarti terdapat bola buka $B_{r_i}(f)$ sedemikian sehingga $f \in B_{r_i}(f) \subseteq A_i$untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Sekarang pilih $r \coloneqq \min\{r_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ sedemikian sehingga

$$f \in B_r(f) \subseteq B_{r_i}(f) \subseteq A_i$$

untuk$i = 1, 2, \dots, n$, dan diperoleh

$$f \in B_r(f) \subseteq A_i,$$

sehingga

$$f \in B_r(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i.$$

BerdasarkanDefinisi 3.2.4 dapatdisimpulkanbahwa$\mathcal{G} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ buka. ■

Kemudianhimpunantutuppadaruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$ didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.2.6 (Himpunantutup)

Himpunan $B \subseteq D[a,b]$ *dikatakan tutup pada ruang semimetrik* $(D[a,b], d_D)$ *jika* $D[a,b]\backslash B$ *buka pada* $D[a,b]$.

Sepertihalnyapadahimpunanbukaketertutupansifatoperasi pun berlakupadahimpunantutup, haltersebutdinyatakandalamteoremaberikut.

Teorema 3.2.7

Misalkan $\mathcal{B} := \{B_\alpha \subseteq D[a,b] : B_\alpha \text{ tutup untuk setiap } \alpha \in I\}$.

1. $\bigcup_{\alpha \in I} B_\alpha$ *adalah tutup pada ruang semimetrik* $(D[a,b], d_D)$ *untuk himpunan* I *yang berhingga.*
2. $\bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$ *adalah tutup pada ruang semimetrik* $(D[a,b], d_D)$ *untuk sembarang* I *himpunan indeks.*

Bukti

1. Misalkan $\{B_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ adalah himpunan tutup pada ruang semimetrik $(D[a,b], d_D)$ dan $\mathcal{B} := \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ untuk $n \in \mathbb{N}$, dengan demikian jika diambil sembarang $f \in \mathcal{B}$ artinyaterdapat $B_i \subseteq \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $f \in B_i \subseteq \mathcal{B}$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Karena B_i tutup pada $D[a,b]$ berarti $D[a,b]\backslash B_i$ buka pada $D[a,b]$. Perhatikan bahwa

$$D[a,b]\backslash \mathcal{B} = D[a,b]\backslash \bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n} (D[a,b]\backslash B_i),$$

karena $D[a,b]\backslash B_i$ buka pada $D[a,b]$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$ makaberdasarkanTeorema 3.2.5 (b) diperolehbahwa $\bigcap_{i=1}^{n} (D[a,b]\backslash B_i)$ buka pada $D[a,b]$, sehingga $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ tutup pada $D[a,b]$.

2. Misalkan$\mathcal{H} = \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ untuk I sembarang himpunan indeks, dengan demikian jika diambil sembarang $f \in \mathcal{H}$, maka $f \in B_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in I$. Karena B_α tutup pada $D[a,b]$ berarti $D[a,b]\backslash B_\alpha$ buka pada $D[a,b]$ untuk setiap $\alpha \in I$. Perhatikan bahwa

$$D[a,b]\backslash\mathcal{H} = D[a,b]\backslash \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha\in I}(D[a,b]\backslash B_\alpha),$$

karena$D[a,b]\backslash B_\alpha$ buka pada $D[a,b]$ untuk setiap $\alpha \in I$makaberdasarkanTeorema 3.2.5 (a) diperolehbahwa$\bigcup_{\alpha\in I} D[a,b]\backslash B_\alpha$ buka pada $D[a,b]$, sehingga $\mathcal{H} = \bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ tutup pada $D[a,b]$ untuk I sembarang himpunan indeks. ■

3.3 RuangTopologi$D[a,b]$

Selanjutnyapadasubbab 3.3 iniakandikajibahwasuatutopologidapatdibentukdarisemimetrikd_D sehingga $D[a,b]$bersamadengantopologinyamerupakanruangtopologi. Misalkanτ_D adalah koleksigabungandari bola-bola bukapadaruangsemimetrik$(D[a,b], d_D)$, akan ditunjukkanbahwaτ_d merupakan topologi pada $D[a,b]$ yaitu jika τ_D memenuhi kondisi pada Definisi 2.7.1.

Teorema 3.3.1

Jikakoleksiτ_D adalah himpunan-himpunan bagian dari $D[a,b]$ dan didefinisikan dengan $\tau_D \coloneqq \{\mathcal{U} \subset D[a,b] : \mathcal{U} = \bigcup B_r(f)\}$ dimana $B_r(f)$ adalah *bola buka pada ruang semimetrik*$(D[a,b],d_D)$, *maka*τ_D *adalah topologi pada* $D[a,b]$.

Bukti

Akan dibuktikanbahwaτ_D memenuhi Definisi 2.7.1, sehinggaτ_D adalah topologi pada $D[a,b]$.

1. Akan ditunjukkanbahwa$\emptyset$ adalah buka. Andaikan $\emptyset$ tidak buka artinya terdapat $f \in \emptyset$ sedemikian sehingga untuk setiap $B_r(f)$ bola buka pada $D[a,b]$, $f \in B_r(f) \nsubseteq \emptyset$. Ini kontradiksi dengan $\emptyset$ tidak memiliki anggota, maka haruslah $\emptyset$ buka.
2. Selanjutnyaakanditunjukkanbahwa$D[a,b]$ adalah buka. Ambil sembarang $f \in D[a,b]$, kemudian pilih $r = 1$. Misalkan $B_r(f) \coloneqq \{g \in D[a,b] : d(f,g) < 1\}$, jelas bahwa $f \in B_r(f)$. Sekarang akan ditunjukkan bahwa $B_r(f) \subseteq D[a,b]$. Ambil sembarang $g \in B_r(f)$, maka berdasarkan definisi $g \in D[a,b]$ akibatnya $B_r(f) \subseteq D[a,b]$ dengan demikianberdasarkanDefinisi 3.2.4 dapatdisimpulkanbahwa$D[a,b]$ buka.
3. Kemudianakanditunjukkanbahwasembaranggabungandarianggotaτ_D adalah buka. Karenauntuksetiapanggota di $\tau_D$adalahgabungandari bola-bola bukapadaruangsemimetrik$(D[a,b],d_D)$, makagabungandarisembaranganggota di τ_D adalah gabungan dari bola-bola bukapadaruangsemimetrik$(D[a,b],d_D)$ juga. Dengan demikian, jika diambil sembarang $g \in \bigcup_{\alpha \in I} B_{r_\alpha}(f)$ untuk I sembarang himpunan indeks, maka terdapat bola buka $B_{r_{\alpha_0}}(f)$ untuk suatu$\alpha_0 \in I$ sedemikian sehingga

$$g \in B_{r_{\alpha_0}}(f) \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} B_{r_\alpha}(f).$$

BerdasarkanDefinisi 3.2.4 diperolehbahwa$\bigcup_{\alpha \in I} B_{r_\alpha}(f)$ adalah buka atau dengan kata lainsembaranggabungandarianggotaτ_D adalah buka.

4. Terakhirakanditunjukkanbahwairisanberhinggadarianggota-anggota di τ_D adalah buka. Misalkan $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2, \dots, \mathcal{U}_n \in \tau_D$untuk $n \in \mathbb{N}$, dengan demikian jika diambil sembarang $f \in \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$, maka $f \in \mathcal{U}_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Karena $\mathcal{U}_i$ adalah gabungan bola-bolabukapadaruangsemimetrik$(D[a, b], d_D)$, maka terdapat bola buka $B_{r_i}(f)$ sedemikian sehingga $f \in B_{r_i}(f) \subseteq \mathcal{U}_i$ untuk $i = 1, 2, \dots, n$. Sekarang pilih $r \coloneqq \min\{r_i : i = 1, 2, \dots, n\}$ sehingga

$$f \in B_r(f) \subseteq B_{r_i}(f) \subseteq \mathcal{U}_i$$

untuk$i = 1, 2, \dots, n$dengandemikian

$$f \in B_r(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} B_{r_i}(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i,$$

akibatnya

$$f \in B_r(f) \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i.$$

BerdasarkanDefinisi 3.2.4 maka$\bigcap_{i=1}^{n} \mathcal{U}_i$ buka atau dengan kata lain irisan berhingga dari anggota-anggota di τ_D adalah buka.

Karenaτ_D memenuhi Definisi 2.7.1 makaτ_D adalah topologi pada $D[a, b]$ dan teorema terbukti. ■

Selanjutnya, $D[a,b]$ bersama dengan topologi τ_D disebutdenganruangtopologidandinotasikandengan$(D[a,b],\tau_D)$.Salah satukonseppadaruangtopologi yang tidakdibahasdalamruangsemimetrikadalahkonseppersekitaran.Berikutinidiberikansecarasingkatdefinisidaripersekitaranpadaruangtopologi$(D[a,b],\tau_D)$.

Definisi 3.3.2

Diberikanruangtopologi$(D[a,b],\tau_D)$.Himpunan$N \subseteq D[a,b]$ disebut persekitaran dari $f \in D[a,b]$ jika dan hanya jika terdapat himpunan buka $U \in \tau_D$ sedemikian sehingga

$$f \in U \subseteq N.$$

Teorema 3.3.3

JikaN_i untuk $i = 1,2,\dots,n$ adalah persekitaran dari f di ruang $D[a,b]$, maka $\bigcap_{i=1}^{n} N_i$ adalah persekitaran dari f di ruang $D[a,b]$.

Bukti

JikaN_i untuk $i = 1,2,\dots,n$ adalah persekitaran dari f di ruang $D[a,b]$,makaberdasarkanDefinisi 3.3.2terdapathimpunanbukaU_i pada $D[a,b]$ sedemikian sehingga $f \in U_i \subseteq N_i$ untuk $i = 1,2,\dots,n$. Misalkan $N = \bigcap_{i=1}^{n} N_i$dan $U = \bigcap_{i=1}^{n} U_i$, maka diperoleh $f \in U \subseteq N$. Karena $D[a,b]$ merupakan ruang topologi, maka irisan berhingga dari himpunan bukanya adalah buka, dengan demikian dapat disimpulkan bahwa U buka, akibatnya N adalah persekitaran dari f di ruang $D[a,b]$. ■

Sepertihalnyapadaruangtopologiumum,konsephimpunanbukadanhimpunan tutupjugaberlakupadaruangtopologi$(D[a,b],\tau_D)$.Secaraumum, himpunanbukadarisuaturuangtopologiberangkatdaripersekitarannyadimanaperseki tarannyatersebutberangkatdarihimpunanbuka di topologinya.Karenahimpunanbuka di topologiτ_D merupakankonsephimpunanbukapadaruangsemimetrik$(D[a,b],d_D)$, makahimpunanbukapadaruangtopologi$(D[a,b],\tau_D)$ diturunkan dari konsep himpunanbukapadaruangsemimetrik$(D[a,b],d_D)$.

Teorema 3.3.4

Himpunan$A \subseteq D[a,b]$ merupakan himpunanbukajikadanhanyajika$A$ memuat persekitaran dari setiap titik-titiknya.

Bukti

Akan dibuktikanjikahimpunan$A \subseteq D[a,b]$ buka, maka A memuatpersekitarandarisetiaptitik-titiknya.Ambilsembarang$f \in A$, karena A buka maka $A \in \tau_D$sedemikiansehingga$f \in A \subseteq A$, dengan demikian berdasarkan Definisi 3.3.2 diperolehbahwa$A$ merupakan persekitaran dari f. Kemudian$A$ memuat persekitaranyaknidirinyasendiridarisetiaptitik-titiknya.

Selanjutnyaakandibuktikanjika$A$ memuat persekitarandarisetiaptitik-titiknya, maka$A$ adalah himpunan buka. Ambil sembarang $f \in A$,karena$A$ memuat persekitaran dari setiap titik-titiknyamakaterdapatN_f persekitaran dari f sehingga $N_f \subseteq A$. Kemudian N_f persekitaran dari f dengandemikianberdasarkanDefinisi

3.3.2 terdapathimpunanbuka$U_f \in \tau_D$ sedemikian sehingga $f \in U_f \subseteq N_f$. Misalkan $U = \bigcup_{f \in A} U_f$, karena τ_D merupakan topologi pada $D[a,b]$ dan $U_f \in \tau_D$, maka U adalah himpunan buka. Akan ditunjukkan bahwa $U = A$ sehingga A merupakan himpunan buka. Jikadiambilsembarang$g \in U = \bigcup_{f \in A} U_f$, maka terdapathimpunanbukaU_f untuk suatu $f \in A$ sehingga $g \in U_f$, tetapi $U_f \subseteq N_f$ dan $N_f \subseteq A$, dengan demikian dari sini diperoleh $g \in A$ sehingga $U \subseteq A$. Selanjutnya jikadiambilsembarang$g \in A$, maka $g \in U_f \subseteq N_f \subseteq A$, karena $U_f \subseteq \bigcup_{f \in A} U_f = U$ dengan demikian $g \in U$ sehingga $A \subseteq U$. Berdasarkan fakta $U \subseteq A$dan $A \subseteq U$, maka dapat disimpulkan bahwa $U = A$ dan A merupakan himpunan buka. ■

Teorema 3.3.4 dapatjugadituliskansebagai: himpunan$A \subseteq D[a,b]$merupakanbukajikadanhanyajikauntuksetiap$f \in A$terdapatpersekitaran$N$dari$f$ sedemikian sehingga $N \subseteq A$.

Selanjutnyaketertutupanoperasigabungandanirisanpadahimpunanbuka di ruangtopologi$(D[a,b], \tau_D)$ dinyatakan dalam teorema berikut.

Teorema 3.3.5

Misalkan$\mathcal{A} := \{A_\alpha \subseteq D[a,b] : A_\alpha \text{ buka untuk setiap } \alpha \in I\}$.

1. $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$*adalah buka padaruangtopologi*$D[a,b]$ *untuk sembarang I himpunan indeks.*
2. $\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$*adalah buka padaruangtopologi*$D[a,b]$ *untuk himpunan I yang berhingga.*

Bukti

1. Misalkan$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ untuk I sembarang himpunan indeks. Ambil sembarang $f \in \mathcal{A}$, maka terdapat $A_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ untuk suatu $\alpha \in I$ sehingga $f \in A_\alpha \subseteq \mathcal{A}$, karena A_α bukamakaberdasarkanDefinisi 3.3.4terdapat$N$ persekitaran dari f sedemikian sehingga $f \in N \subseteq A_\alpha$. Faktanya bahwa $A_\alpha \subseteq \mathcal{A}$, dengan demikian dari fakta ini diperoleh $f \in N \subseteq A_\alpha \subseteq \mathcal{A}$ sehingga $f \in N \subseteq \mathcal{A}$ untuk setiap $f \in \mathcal{A}$, dari Definisi 3.3.4makadapatdisimpulkan$\mathcal{A} = \bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$ buka pada $D[a,b]$ untuk sembarang I himpunan indeks.
2. Misalkan$\{A_i : i = 1,2,\dots,n\}$ adalah himpunan buka pada ruang topologi $D[a,b]$ dan $\mathcal{G} \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} A_i$untuk $n \in \mathbb{N}$. Ambil sembarang $f \in \mathcal{G}$, maka $f \in A_i$ untuk $i = 1,2,\dots,n$. Karena A_i buka pada $D[a,b]$ berarti terdapat $N_i$persekitarandari$f$ sedemikian sehingga $f \in N_i \subseteq A_i$untuk $i = 1,2,\dots,n$. Misalkan $N \coloneqq \bigcap_{i=1}^{n} N_i$, maka berdasarkanTeorema 3.3.3N adalah persekitaran dari f dengan demikian $f \in N \subseteq N_i \subseteq A_i$, sehingga $f \in N \subseteq A_i$ untuk $i = 1,2,\dots,n$ dan akibatnya $f \in N \subseteq \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \mathcal{G}$. Karena terdapat N persekitaran dari f sedemikian sehingga $f \in N \subseteq \mathcal{G}$ untuk setiap $f \in \mathcal{G}$,makaberdasarkanDefinisi 3.3.4$\mathcal{G}$ buka pada $D[a,b]$. ■

Setelahdefinisidarihimpunanbukapadaruangtopologi$(D[a,b],\tau_D)$ diberikan, berikutnyaakandibahasmengenaihimpunantutuppadaruangtopologi$(D[a,b],\tau_D)$.

Teorema3.3.6

Himpunan $B \subseteq D[a,b]$ *merupakantutuppadaruangtopologi* $(D[a,b],\tau_D)$ *jikadanhanyajika* $D[a,b]\backslash B$ *buka pada* $D[a,b]$.

Teorema 3.3.5 mengikutisecaralangsungdariDefinisi 3.2.6.Kemudianketertutupanoperasigabungandanirisanpadahimpunantutup di ruangtopologi$(D[a,b],\tau_D)$ diberikan dalam Teorema 3.3.6.

Teorema 3.3.7

Misalkan $\mathcal{B} \coloneqq \{B_\alpha \subseteq D[a,b] : B_\alpha \text{ tutup untuk setiap } \alpha \in I\}$.

1. $\bigcup_{\alpha\in I} B_\alpha$ *adalah tutup padaruangtopologi* $(D[a,b],\tau_D)$ *untuk himpunan* I *yang berhingga.*
2. $\bigcap_{\alpha\in I} B_\alpha$ *adalah tutup padaruangtopologi* $(D[a,b],\tau_D)$ *untuk sembarang* I *himpunan indeks.*

Bukti

1. Misalkan$\{B_i : i = 1,2,\dots,n\}$ adalah himpunan tutup pada ruang topologi $(D[a,b],\tau_D)$ dan $\mathcal{B} \coloneqq \bigcup_{i=1}^{n} B_i$untuk $n \in \mathbb{N}$. Ambil sembarang $f \in \mathcal{B}$, maka terdapat $B_i \subseteq \mathcal{B}$ sedemikian sehingga $f \in B_i$untuk$i = 1,2,\dots,n$, karena B_i tutup pada $D[a,b]$ berarti $D[a,b]\backslash B_i$ buka pada $D[a,b]$. Perhatikan bahwa

$$D[a,b]\backslash\mathcal{B} = D[a,b]\backslash\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \bigcap_{i=1}^{n}(D[a,b]\backslash B_i),$$

karena$D[a,b]\backslash B_i$ buka pada $D[a,b]$ maka berdasarkan Teorema 3.3.5 (b) diperolehbahwa$\bigcap_{i=1}^{n} D[a,b]\backslash B_i$ buka pada $D[a,b]$, sehingga $\mathcal{B} = \bigcup_{i=1}^{n} B_i$ tutup pada $D[a,b]$.

2. Misalkan$\mathcal{H} = \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$ untuk I sembarang himpunan indeks. Ambil sembarang $f \in \mathcal{H}$, maka $f \in B_\alpha$ untuk setiap $\alpha \in I$. Karena B_α tutup pada $D[a,b]$ berarti $D[a,b]\backslash B_\alpha$ buka pada $D[a,b]$ untuk setiap $\alpha \in I$. Perhatikan bahwa

$$D[a,b]\backslash \mathcal{H} = D[a,b]\backslash \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha = \bigcup_{\alpha \in I} (D[a,b]\backslash B_\alpha),$$

karena$D[a,b]\backslash B_\alpha$ buka pada $D[a,b]$ untuk setiap $\alpha \in I$ maka berdasarkan Teorema 3.3.5 (a) diperolehbahwa$\bigcup_{\alpha \in I} D[a,b]\backslash B_\alpha$ buka pada $D[a,b]$, sehingga $\mathcal{H} = \bigcap_{\alpha \in I} B_\alpha$ tutup pada $D[a,b]$ untuk I sembarang himpunan indeks. ■