BAB I

PENDAHULUAN

1.1 LatarBelakangMasalah

Integral merupakansalahsatucabangdarimatematika yang banyakdiaplikasikanpadabidangmatematikalainnyamaupunbidangilmu yang lain. Dasarpengintegralantelahdikemukakanoleh Isaac Newton dan Gottfried Wilhelm Leibniz padaakhirabad ke-17.Lebihtajamlagidefinisi integral dikemukakanoleh Bernhard Riemann padatahun 1850. Riemann mendefinisikan integral denganmengaproksimasiluasdaerah yang dibatasiolehsuatukurvadengancaramembagidaerahtersebutmenjadipoligon-poligon. Denganpenghampiranpadakasuspoligontersebut yang banyaknya menujutakhingga, makaluasdaerah di bawahkurvamenyatakan integral yang dicari.Jadi, Riemann mendefinisikan integral sebagai limit jumlahdariluaspotongan-potongankurva. Cara Riemann mendefinisikan integral disebutdengancarakonstruktif, sedangkancara yang digunakanoleh Newton dan Leibniz dimanapendefinisiannyamenggunakan anti derivatifdisebutdengancaradeskriptif.

Padapenggunaannyauntukmemperlihatkanbahwasemuafungsimonotonadalahterintegralkandanmenunjukkanbahwahasildarifungsi yang terintegralkanadalahterintegralkanjugasangatsulitdibuktikansecaralangsungdengan menggunakandefinisi integral Riemann.Berawaldarikesulitanini, padatahun 1875 matematikawan I.G. Darbouxsecarakonstruktifmemodifikasidefinisi integral

Riemann menjadilebihsederhanayaitudenganterlebihdahulumendefinisikanjumlahDarbouxatasdanjumlahDarbouxbawah, selanjutnyamendefinisikan integral Darbouxatasdan integral Darbouxbawah. Jikanilaidari integral Darbouxatassamadengannilaidari integral Darbouxbawah, makafungsitersebutterintegralkanDarboux. HimpunansemuafungsiterintegralkanDarbouxdinotasikandengan$D$, secara khusus himpunan semua fungsiterintegralkanDarbouxpadaselangtutup$[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ dimana $\mathbb{R}$ adalah himpunan bilangan real dinotasikan dengan $D[a,b]$. Kemudianapabiladikenakanaturan-aturanpada$D[a,b]$, maka $D[a,b]$ merupakan suatu ruang.Padatulisaniniakanditunjukkanbahwa$D[a,b]$ adalahsuaturuangsemimetrik. Kemudiandarisemimetriknyatersebutdapatdibentuksuatutopologipada$D[a,b]$,sehingga$D[a,b]$ bersama topologinyamerupakanruangtopologi.

Salah satuhalmenarik yang dapatdibahasdariruangsemimetrik$D[a,b]$ adalah tentang kekonvergenan barisannya yang berbedadenganruangmetrik.Secaraumum,kekonvergenanbarisan di ruangsemimetrikberbedadengankekonvergenanbarisan di ruangmetrik.Padaruangsemimetrik limit daribarisannyatidakperlutunggaldanhalinidapatditunjukkanpadaruangsemimetrik $D[a,b]$. Lebih lanjut, limittersebutdapatmenjaditunggaljikakondisitertentudipenuhiolehsemimetriknya.

Selanjutnyapadakajianiniakandiperlihatkanbahwasetiapbarisan yangkonvergen di ruangsemimetrik$D[a,b]$ adalah barisan Cauchy, namumhaltersebutbelumtentuberlakusebaliknyasehinggaakandiselidikikondisi yang harusdipenuhi agar barisan Cauchymerupakanbarisan yang konvergen,danuntukselanjutnyabarisantersebutdapatmemiliki limit lebihdarisatu.Kemudianpadabagianakhirtulisaniniakandibahassifatkelengkapandar iruangsemimetrik$D[a, b]$.

1.2 RumusandanBatasanMasalah

Berdasarkanuraianpadalatarbelakangmasalah, secararingkasrumusanmasalah yang akandibahasdalamskripsiiniadalah

1. Bagaimanapembentukkanruangsemimetrik$D[a, b]$?
2. Bagaimanapembentukkanruangtopologi$D[a, b]$?
3. Bagaimanakekonvergenanbarisan diruangsemimetrik$D[a, b]$?
4. Kondisiapakah yang harusdipenuhi agar barisan Cauchy di ruangsemimetrik$D[a, b]$ menjadi barisan yang konvergen?
5. Bagaimanakelengkapanpadaruangsemimetrik$D[a, b]$?

Pembahasanpadaskripsiinidibatasihanyapada integral Darbouxpadaselangtutup$[a, b]$.

1.3 TujuanPenulisan

Tujuanpenulisanskripsiiniuntuk:

1. Mengetahuipembentukkanruangsemimetrik$D[a, b]$.
2. Mengetahuipembentukkanruangtopologi$D[a, b]$.
3. Mengetahuikekonvergenanbarisan diruangsemimetrik$D[a, b]$.

4. Mengetahuikondisi yang harusdipenuhi agar barisan Cauchy di ruangsemimetrik$D[a, b]$ menjadi barisan yang konvergen.
5. Mengetahuikelengkapanpadaruangsemimetrik$D[a, b]$.

1.4 SistematikaPenulisan

Adapunsistematikapenulisandalamskripsiiniadalah:

1. BAB I (Pendahuluan), merupakanpengantarskripsiini. Padababinidibahasmengenailatarbelakangmasalah, rumusanmasalah, tujuanpenulisandansistematikapenulisan.
2. BAB II (TeoriPendukung), padababiniakandibahasmengenaiteori-teori yang dapatmendukungdalampembahasanruangsemimetrik$D[a, b]$. Adapun materi-materi yang dibahas pada bab ini diantaranya, sistem bilangan real, supremum dan infimum, fungsi kontinu, barisan fungsi, integral Darboux, semimetrik dan metrik, dan topologi.
3. BAB III (RuangSemimetrik$D[a, b]$), pada bab ini dibahas bagaimana ruang semimetrik $D[a, b]$ dan ruang topologi $D[a, b]$dibentuk, dankonsephimpunanbukadanhimpunantutuppadaruangsemimetrik$D[a, b]$ danpadaruangtopologi$D[a, b]$.
4. BAB IV (KekonvergenanBarisan di RuangSemimetrik$D[a, b]$), setelah ruang semimetrik $D[a, b]$ dibentuk, padababinimembahasmengenaikekonvergenanbarisan di ruangsemimetrik$D[a, b]$ dan barisan Cauchy yang kemudian dilanjutkan dengan kelengkapan pada ruang semimetrik $D[a, b]$.

5. BAB V (Kesimpulandan Saran), menyajikankesimpulandarikeseluruhanskripsiini, dan saran untukbahasanselanjutnya yang berkaitandenganruangsemimetrik$D[a, b]$.