BAB 3

ALJABAR *MAX-PLUS*

Sebelum membahas Aljabar *Max-Plus*, akan diuraikan terlebih dahulu beberapa sifat khusus yang selanjutnya akan dibuktikan bahwa sifat-sifat tersebut dipenuhi oleh suatu Aljabar *Max-Plus*.

3.1 Semiring

Untuk membahas definisi semiring, diperlukan definisi semigrup yang telah dibahas pada Bab 2 yaitu pada Definisi 2.4.2. Selanjutnya akan dijelaskan definisi semiring.

Definisi 3.1.1: Semiring (Rudhito, 2003: 6)

Suatu semiring $(\boldsymbol{S}, +, \times)$ adalah suatu himpunan tak kosong $\boldsymbol{S}$ yang dilengkapi dengan dua operasi biner $+$ dan $\times$, yang memenuhi aksioma berikut:

1) $(\boldsymbol{S}, +)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral $\mathbf{0}$, yaitu $\forall a, b, c \in \boldsymbol{S}$:
   a) $(a + b) + c = a + (b + c)$, (sifat asosiatif)
   b) $a + b = b + a$, (sifat komutatif)
   c) terdapat elemen netral $\mathbf{0} \in \boldsymbol{S}$ sedemikian sehingga $a + \mathbf{0} = \mathbf{0} + a = a$.
2) $(\boldsymbol{S}, \times)$ adalah semigrup dengan elemen satuan 1, yaitu $\forall a, b, c \in \boldsymbol{S}$:
   a) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, (sifat asosiatif)
   b) terdapat elemen satuan $1 \in \boldsymbol{S}$ sedemikian sehingga $a \times 1 = 1 \times a = a$.
3) Elemen netral $\mathbf{0}$ merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\times$, yaitu $a \times \mathbf{0} = \mathbf{0} \times a = \mathbf{0}, \forall a \in \boldsymbol{S}$.
4) Operasi $\times$ distributif terhadap $+$, yaitu $\forall a, b, c \in \boldsymbol{S}$:

a) $a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$,

b) $(b + c) \times a = (b \times a) + (c \times a)$.

Suatu semiring $(\boldsymbol{S}, +, \times)$ dikatakan komutatif jika operasi $\times$ bersifat komutatif, yaitu $\forall a, b \in \boldsymbol{S}: a \times b = b \times a$.

Definisi 3.1.2: Semiring Idempoten (Rudhito, 2003: 8)

Suatu semiring $(\boldsymbol{S}, +, \times)$ dikatakan idempoten yaitu jika pada operasi $+$ berlaku $a + a = a, \forall a \in \boldsymbol{S}$.

3.2 Semifield

Berdasarkan Definisi 3.1.1 yaitu tentang semiring dan Definisi 2.5.3 tentang *field*, maka selanjutnya akan dibahas definisi semifield.

Definisi 3.2.1: Semifield (Rudhito, 2003: 8)

Suatu semiring komutatif $(\boldsymbol{S}, +, \times)$ disebut semifield jika setiap elemen tak netralnya mempunyai invers terhadap operasi $\times$, yaitu $\forall a \in \boldsymbol{S} \setminus \{\mathbf{0}\}$: $\exists a^{-1} \in \boldsymbol{S}, a \times a^{-1} = \mathbf{1}$.

3.3 Urutan pada Himpunan

Dengan menggunakan konsep pada subbab 2.3, yaitu definisi macam-macam relasi, selanjutnya akan dibahas tentang urutan pada himpunan.

Definisi 3.3.1: Urutan Parsial (Rudhito, 2003: 15)

Relasi " $\preccurlyeq$ " pada himpunan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ disebut urutan parsial pada $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ jika untuk semua $x, y, z \in \boldsymbol{\mathcal{P}}$ berlaku:

1) sifat refleksif, yaitu: $x \preccurlyeq x$,

2) sifat antisimetris, yaitu: jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq x$, maka $x = y$,

3) sifat transitif, yaitu: jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq z$, maka $x \preccurlyeq z$.

Contoh

Relasi "kurang dari atau sama dengan" ($\leq$) adalah urutan parsial pada himpunan bilangan bulat.

Bukti:

Karena $a \leq a$ untuk setiap a di $\mathbb{Z}$, maka $\leq$ refleksif.

Jika $a \leq b$ dan $b \leq a$, maka $a = b$. Jadi $\leq$ antisimetris.

Jika $a \leq b$ dan $b \leq c$, maka $a \leq c$. Jadi $\leq$ transitif.

Elemen x dan y dikatakan komparabel (comparable) jika $x \preccurlyeq y$ atau $y \preccurlyeq x$.

Jika $x \preccurlyeq y$ akan dituliskan juga dengan $y \succcurlyeq x$. Jika $x \preccurlyeq y$ dan $x \neq y$ akan dituliskan juga dengan $x \prec y$.

Definisi 3.3.2: Urutan Total (Rudhito, 2003: 16)

Urutan parsial " $\preccurlyeq$ " pada himpunan $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ disebut urutan total pada $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ jika setiap dua elemen dalam $\boldsymbol{\mathcal{P}}$ komparabel.

Berdasarkan konsep tentang idempoten pada Definisi 3.1.2 dan urutan parsial pada Definisi 3.3.1, selanjutnya akan dibahas urutan parsial pada semiring.

Teorema 3.3.3

Jika $(\boldsymbol{S}, +)$ semigrup komutatif idempoten maka relasi " $\preccurlyeq$ " yang didefinisikan pada $\boldsymbol{S}$ dengan $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x + y = y$ merupakan urutan parsial pada $\boldsymbol{S}$.

Bukti:

Ambil sembarang $x, y, z \in \boldsymbol{S}$.

1) Karena berlaku sifat idempoten maka $x + x = x \Leftrightarrow x \preccurlyeq x$.

2) Jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq x$, maka $x + y = y$ dan $y + x = x$. Karena berlaku sifat komutatif maka $x = y$.

3) Jika $x \preccurlyeq y$ dan $y \preccurlyeq z$, maka $x + y = y$ dan $y + z = z$. Berdasarkan Definisi 3.1.1 berlaku sifat asosiatif, maka

   $x + z = x + (y + z) = (x + y) + z = y + z = z$. Sehingga diperoleh $x \preccurlyeq z$.

Jadi, berdasarkan hasil pembuktian pada bagian 1), 2), dan 3), diperoleh bahwa relasi " $\preccurlyeq$ " yang didefinisikan pada $\boldsymbol{S}$ dengan $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow x + y = y$ merupakan urutan parsial pada $\boldsymbol{S}$.

Operasi $+$ dan $\times$ dikatakan konsisten terhadap urutan " $\preccurlyeq$ " dalam $\boldsymbol{S}$ jika dan hanya jika $x \preccurlyeq y$, maka $x + z \preccurlyeq y + z$ dan $x \times z \preccurlyeq y \times z, \forall x, y, z \in \boldsymbol{S}$.

Pada semiring idempoten $(\boldsymbol{S}, +, \times)$ operasi $+$ dan $\times$ konsisten terhadap urutan $\preccurlyeq$ dalam $\boldsymbol{S}$.

3.4 Elemen Pembagi Nol

Berdasarkan Definisi 2.5.2 tentang elemen pembagi nol pada ring, berikut ini akan dibahas semiring yang tidak memuat elemen pembagi nol.

Definisi 3.4.1 (Rudhito et al. 2008: 3)

Semiring $(\boldsymbol{S}, +, \times)$ dengan elemen netral 0 dikatakan tidak memuat elemen pembagi nol jika dan hanya jika $x \times y = 0$ dengan $x = 0$ atau $y = 0$, $\forall x, y \in \boldsymbol{S}$.

3.5 Aljabar *Max-Plus*

Setelah dijelaskan beberapa sifat dalam Aljabar, selanjutnya akan dibahas mengenai pengertian dan sifat Aljabar *Max-Plus*.

Definisi 3.5.1: Aljabar *Max-Plus* (Heidergott et al. 2005: 13)

Diberikan $\Re_\varepsilon := \Re \cup \{\varepsilon\}$ dengan $\Re$ adalah himpunan semua bilangan real dan $\varepsilon := -\infty$. Pada $\Re_\varepsilon$ didefinisikan operasi berikut:

$$\forall a, b \in \Re_\varepsilon, a \oplus b := \max(a, b) \text{ dan } a \otimes b := a + b.$$

Kemudian $(\Re_\varepsilon, \oplus, \otimes)$ disebut dengan Aljabar *Max-Plus*, selanjutnya dinotasikan $\Re_{max}$.

Dalam hal urutan pengoperasian (jika tanda kurung tidak dituliskan), operasi $\otimes$ mempunyai prioritas yang lebih tinggi dari pada operasi $\oplus$.

Misalkan:

1) $5 \oplus 7 := max(5, 7) = 7.$

2) $(-6) \otimes 9 := (-6) + 9 = 3.$

3) $17 \oplus 5 \otimes 13 := 17 \oplus (5 + 13) = 17 \oplus 18 = \max(17,18) = 18.$

Teorema 3.5.2

$\Re_{max}$ adalah suatu semiring komutatif dan idempoten.

Bukti:

Berdasarkan Definisi 3.1.1 dan Definisi 3.1.2, akan ditunjukkan bahwa $\Re_{max}$ adalah suatu semiring komutatif dan idempoten.

1) Akan ditunjukkan $\Re_{max}$ adalah suatu semiring.

a) $(\Re \cup \{-\infty\}, \oplus)$ adalah semigrup komutatif dengan elemen netral $-\infty$, yaitu $\forall a, b, c \in \Re \cup \{-\infty\}$:

i) $(a \oplus b) \oplus c = \max(\max(a, b), c)$

$$= \max(a, b, c)$$

$$= \max(a, \max(b, c))$$

$$= a \oplus (b \oplus c).$$

Jadi, operasi $\oplus$ bersifat asosiatif di $\Re \cup \{-\infty\}$.

ii) $a \oplus b = \max(a, b) = \max(b, a) = b \oplus a.$

Jadi, operasi $\oplus$ bersifat komutatif di $\Re \cup \{-\infty\}$.

iii)Terdapat elemen $\varepsilon = -\infty \in \Re \cup \{-\infty\}$, sedemikian sehingga

$a \oplus -\infty = \max(a, -\infty) = \max(-\infty, a) = -\infty \oplus a = a.$

Jadi, $\varepsilon = -\infty$ adalah elemen netral di $\Re \cup \{-\infty\}$.

b) $(\Re \cup \{-\infty\}, \otimes)$ adalah semigrup dengan elemen satuan 0, yaitu $\forall a, b, c \in \Re \cup \{-\infty\}$:

i) $(a \otimes b) \otimes c = (a + b) + c = a + (b + c) = a \otimes (b \otimes c).$

Jadi, operasi $\otimes$ bersifat asosiatif di $\Re \cup \{-\infty\}$.

ii) Terdapat elemen satuan $e = 0$ di $\Re \cup \{-\infty\}$ sedemikian sehingga

$a \otimes e = a + 0 = 0 + a = a.$

c) Elemen netral ε merupakan elemen penyerap terhadap operasi $\otimes$, yaitu $\forall a \in \Re \cup \{-\infty\}$:

$$a \otimes \boldsymbol{\varepsilon} = a + (-\infty) = (-\infty) + a = \boldsymbol{\varepsilon} \otimes a = -\infty.$$

d) Operasi $\otimes$ distributif terhadap $\oplus$, yaitu $\forall a, b, c \in \Re \cup \{-\infty\}$:

i) $(a \oplus b) \otimes c = \max(a, b) + c$

ii) $\qquad = \max(a + c, b + c)$

iii) $= (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$.

iv) $a \otimes (b \oplus c) = a + \max(b, c)$

v) $= \max(a + b, a + c)$

vi) $= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.

Jadi, berdasarkan a), b), c), dan d) diperoleh bahwa $\Re_{max}$ merupakan semiring.

2) Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\Re_{max}$ bersifat komutatif

$\forall a, b \in \Re \cup \{-\infty\}, a \otimes b = a + b = b + a = b \otimes a.$

Jadi, $\Re_{max}$ adalah semiring yang komutatif.

3) Akan ditunjukkan bahwa $\Re_{max}$ bersifat idempoten.

$\forall a \in \Re \cup \{-\infty\},\ a \oplus a = \max(a, a) = a.$

Jadi, $\Re_{max}$ bersifat idempoten.

Dengan demikian berdasarkan hasil pembuktian pada bagian 1), 2), dan 3) diperoleh bahwa $\Re_{max}$ merupakan semiring komutatif dan idempoten.

Teorema 3.5.3

$\Re_{max}$ adalah suatu semifield.

Bukti:

Akan ditunjukkan bahwa $\Re_{max}$ adalah suatu semifield.

Berdasarkan Teorema 3.5.2, telah dibuktikan bahwa $\Re_{max}$ adalah suatu semiring komutatif. Maka untuk menunjukkan bahwa $\Re_{max}$ merupakan suatu semifield, cukup ditunjukkan bahwa untuk setiap elemen tak netral pada $\Re_{max}$ mempunyai invers terhadap operasi $\otimes$, yaitu $\forall a \in \Re_{max} \setminus \{-\infty\}$:

$\exists\ a^{-1} = -a \in \Re_{max}$, sedemikian sehingga berlaku $a \otimes a^{-1} = a + (-a) = 0$.

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

Jadi, terbukti bahwa $\Re_{max}$ adalah suatu semifield.

Akibat 3.5.4 (dari Teorema 3.3.3)

Relasi " $\preccurlyeq_m$ " yang didefinisikan pada $\Re_{max}$ dengan

$$x \preccurlyeq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$$

merupakan urutan parsial pada $\Re_{max}$. Lebih lanjut relasi ini merupakan urutan total pada $\Re_{max}$.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.5.2, telah dibuktikan bahwa $(\Re \cup \{-\infty\}, \oplus)$ merupakan semigrup komutatif idempoten, sehingga berdasarkan Teorema 3.3.3 relasi " $\preccurlyeq_m$ " yang didefinisikan pada $\Re_{max}$ di atas merupakan urutan parsial pada $\Re_{max}$, yaitu:

Diambil sembarang $x, y, z \in \Re_{max}$.

1) Karena berlaku sifat idempoten maka $x \oplus x = x \Leftrightarrow x \preccurlyeq_m x$.

2) Jika $x \preccurlyeq_m y$ dan $y \preccurlyeq_m x$, maka $x \oplus y = y$ dan $y \oplus x = x$.

   Berdasarkan Teorema 3.5.2 berlaku sifat komutatif, maka $x = y$.

3) Jika $x \preccurlyeq_m y$ dan $y \preccurlyeq_m z$, maka $x \oplus y = y$ dan $y \oplus z = z$.

   Berdasarkan Teorema 3.5.2 berlaku sifat asosiatif, maka

   $x \oplus z = x \oplus (y \oplus z) = (x \oplus y) \oplus z = y \oplus z = z$. Sehingga $x \preccurlyeq_m z$.

Jadi, berdasarkan pembuktian pada bagian 1), 2), dan 3), diperoleh bahwa relasi " $\preccurlyeq_m$ " yang didefinisikan pada $\Re_{max}$ dengan $x \preccurlyeq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y$ merupakan urutan parsial pada $\Re_{max}$.

Selanjutnya diambil $x, y \in \Re_{max}$ maka berlaku

$$x \oplus y = \max(x, y) = x \quad \text{atau} \quad x \oplus y = \max(x, y) = y.$$

Relasi " $\preccurlyeq_m$ " pada $\Re_{max}$ ekuivalen dengan relasi " $\leq$ " pada $\Re \cup \{-\infty\}$. Hal ini dikarenakan $x \preccurlyeq_m y \Leftrightarrow x \oplus y = y \Leftrightarrow \max(x, y) = y \Leftrightarrow x \leq y$. Dengan demikian, relasi " $\preccurlyeq_m$ " merupakan urutan total pada $\Re_{max}$.

Berdasarkan Teorema 3.5.2, $\Re_{max}$ merupakan semiring idempoten, maka operasi $\oplus$ dan $\otimes$ konsisten terhadap urutan $\preccurlyeq_m$, yaitu $\forall a, b, c \in \Re_{max}$, jika $a \preccurlyeq_m b$, maka $a \oplus c \preccurlyeq_m b \oplus c$, dan $a \otimes c \preccurlyeq_m b \otimes c$.

Berdasarkan Definisi 3.4.1, dapat dibuktikan bahwa Aljabar *Max-Plus* $\Re_{max}$ tidak memuat elemen pembagi nol, yaitu $\forall x, y \in \Re_\varepsilon$ berlaku:

jika $x \otimes y = x + y = \varepsilon = -\infty$, maka haruslah $x = \varepsilon$ atau $y = \varepsilon$.