

BAB V

PENUTUP

V.1 Kesimpulan

Dari pembahasan yang telah kita bahas pada bab-bab sebelumnya, kita dapat menyimpulkan beberapa hal:

1. Dengan menggunakan suatu pemetaan $f: V^n \rightarrow \mathbb{C}^n \otimes V$ di mana $f(v) = \sum_{finite} \varepsilon_i \otimes v_i$, $\forall v = (v_i) \in V^n, 1 \leq i \leq n$ kita dapatkan bahwa $V^n \cong \mathbb{C}^n \otimes V$. Melalui isomorfisma tersebut, V^n dapat dipandang sebagai suatu ruang hasilkali tensor dari ruang kompleks n -tuple dengan ruang vektor V .
2. Jika V suatu ruang vektor, dan $\mathbf{M}_{m,n}$ suatu ruang matriks atas ruang $\mathbb{C}$, maka $\mathbf{M}_{m,n}(V) \cong \mathbf{M}_{m,n} \otimes V \cong V \otimes \mathbf{M}_{m,n}$. Dengan demikian $\mathbf{M}_{m,n}(V)$ yaitu suatu ruang matriks dari ruang vektor V dapat dipandang sebagai suatu ruang hasilkali tensor dari ruang matriks atas ruang kompleks $\mathbf{M}_{mn}$ dengan ruang vektor V .
3. Sifat-sifat dari ruang matriks sebagai suatu ruang hasilkali tensor terkait sifat-sifat pada ruang hasilkali tensor sebagai berikut:

- a) Jika $\varepsilon_{i,j} \otimes v_0 \in \mathbf{M}_{m,n} \otimes V$ dan $\varepsilon_{k,l}^{[p,q]} \otimes v_0' \in \mathbf{M}_{p,q} \otimes V$, maka jumlah langsungnya:

$$\left(\varepsilon_{i,j}^{[m,n]} \otimes v_0\right) \oplus \left(\varepsilon_{k,l}^{[p,q]} \otimes v_0'\right) = \left(\varepsilon_{i,j}^{[m+p,n+q]} \otimes v_0\right) + \left(\varepsilon_{m+k,n+l}^{[m+p,n+q]} \otimes v_0'\right) \in \mathbf{M}_{m+p,n+q} \otimes V$$

Dengan kata lain jumlah langsung dari ruang hasil kali tensor ruang matriks dan ruang vektor merupakan representasi dari jumlah langsung pada ruang matriks.

b) Jika $\alpha \in \mathbf{M}_{m,p}$, $\beta \in \mathbf{M}_{q,n}$, $v_0 \in V$ dan $\gamma \in \mathbf{M}_{p,q}$ maka

$$\alpha(\gamma \otimes v_0)\beta = \alpha\gamma\beta \otimes v_0.$$

c) Diberikan suatu ruang matriks $\mathbf{M}_r$ kemudian kita gunakan suatu identifikasi $\mathbf{M}_m(\mathbf{M}_r) \cong \mathbf{M}_m \otimes \mathbf{M}_r$, maka untuk

$$\alpha \in \mathbf{M}_m, \gamma \in \mathbf{M}_m(\mathbf{M}_r) \quad \text{dan} \quad \beta \in \mathbf{M}_m \quad \text{diperoleh}$$

$$\alpha\gamma\beta = (\alpha \otimes I_r)\gamma(\beta \otimes I_r).$$

d) Jika $v = [v_{i,j}] \in \mathbf{M}_{m,n}(V)$, maka $v = \sum \varepsilon_{i,j} \otimes v_{i,j} = \sum E_i * v_{i,j} E_j$.

4. Dengan menggunakan isomorfisma kanonik* dari ruang matriks $\mathbf{M}_n(B(H))$ pada ruang operator terbatas $B(H^n)$, kita dapatkan struktur dari $\mathbf{M}_n(B(H))$ sama dengan $B(H^n)$ (dalam arti norm operator dan operator adjoint di $\mathbf{M}_n(B(H))$ sama dengan di $B(H^n)$). Karena $\mathbf{M}_n(B(H))$ dapat dipandang sebagai ruang operator terbatas sebagaimana $B(H^n)$ maka ruang matriks $\mathbf{M}_n(B(H))$ adalah suatu aljabar-C*.

V.2 Saran

Untuk pengembangan lebih lanjut, ada beberapa hal yang dapat penulis sarankan.

1. Suatu matriks n kali n atas ruang linear V dapat dipandang sebagai kombinasi linear dari bentuk $v = \sum \alpha_i \otimes v_i$, dengan $v_i \in V$, dan α_i matriks skalar n kali n . Kita harap itu akan menjadi gagasan yang lazim pada teori ruang Banach, siapapun yang menemukannya akan sangat berguna untuk mempelajari norm dari kombinasi linear $v = \sum \alpha_i \otimes v_i$, dengan α_i sebagai variabel acak.
2. Karena pembahasan dalam tugas akhir ini masih terbatas ruang operator hasilkali tensor dari ruang Hilbert n -tuple, maka untuk pengembangan selanjutnya dapat dilakukan terhadap ruang operator hasilkali tensor dari ruang Hilbert yang lebih umum.
3. Dapat dikaji lebih lanjut lagi sifat-sifat hasilkali tensor dari aljabar operator sebagai aljabar- C^* .