

# BAB I

## PENDAHULUAN

### I.1 Latar Belakang Masalah

Berbagai pendekatan dapat digunakan untuk mempelajari aljabar operator, di antaranya melalui pendekatan sifat-sifat aljabar dan analitik dari matriks-matriks atas ruang linier. Suatu matriks  $n \times n$  atas ruang linier  $\mathbf{R}$  dapat dipandang sebagai suatu transformasi linear dari suatu ruang linear  $n$ -tuple ke dalam ruang linear  $n$ -tuple yang sama, dengan demikian matriks  $n \times n$  merupakan operator linear pada ruang vektor  $n$ -tuple. Selanjutnya suatu matriks  $n \times n$  atas ruang operator  $B(H)$  dapat dipandang sebagai operator pada ruang Hilbert  $n$ -tuple.

Permasalahan yang menarik untuk dibahas apabila matriks tersebut dipandang sebagai kombinasi linier dari elemen tensor  $b = \sum \alpha_i \otimes b_i$ , dengan  $b_i \in B(H)$ , dan  $\alpha_i$  matriks skalar  $n \times n$  elemen dari  $\mathbf{M}_n$  (ruang matriks atas ruang kompleks). Sehingga apabila ruang matriks diperlakukan sebagai ruang operator pada ruang Hilbert, maka hal yang mungkin terjadi hasil kali tensornya juga dapat diperlakukan sama, demikian pula halnya jika ruang matriks merupakan suatu aljabar- $C^*$ .

### I.2 Perumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah yang diutarakan di atas, dapat dirumuskan beberapa masalah yang akan dikaji dalam tugas akhir ini, di antaranya:

1. Bagaimana memandang suatu ruang  $n$ -tuple  $V^n$  sebagai suatu ruang hasilkali tensor dari ruang kompleks  $n$ -tuple dengan ruang vektor  $V$ .
2. Bagaimana memandang suatu ruang matriks  $\mathbf{M}_n(V)$  sebagai suatu ruang hasilkali tensor dari  $\mathbf{M}_n$  (ruang matriks atas ruang kompleks) dengan ruang vektor  $V$ .
3. Bagaimana sifat-sifat ruang matriks sebagai suatu ruang hasilkali tensor terkait sifat-sifat pada ruang hasilkali tensor.
4. Bagaimana ruang matriks atas operator terbatas dapat dipandang sebagai suatu ruang operator terbatas pada ruang Hilbert  $n$ -tuple.

### I.3 Tujuan Penulisan

Berdasarkan perumusan masalah di atas, yang menjadi tujuan penulisan tugas akhir ini adalah:

1. Memperlihatkan bahwa  $V^n$  yaitu suatu ruang  $n$ -tuple dari ruang vektor  $V$  dapat dipandang sebagai suatu ruang hasilkali tensor dari ruang kompleks  $n$ -tuple dengan ruang vektor  $V$ .
2. Memperlihatkan bahwa  $\mathbf{M}_n(V)$  yaitu suatu ruang matriks dari ruang vektor  $V$  dapat dipandang sebagai suatu ruang hasilkali tensor dari  $\mathbf{M}_n$  (ruang matriks atas ruang kompleks) dengan ruang vektor  $V$ .
3. Menjelaskan sifat-sifat ruang matriks sebagai suatu ruang hasilkali tensor terkait sifat-sifat pada ruang hasilkali tensor.
4. Memperlihatkan bahwa ruang matriks atas operator terbatas dapat dipandang sebagai suatu ruang operator terbatas pada ruang Hilbert  $n$ -tuple.

#### I.4 Sistematika Penulisan

1. Bab I (Pendahuluan) membahas mengenai latar belakang, perumusan masalah, tujuan penulisan dan sistematika penulisan tugas akhir ini.
2. Bab II (Aljabar Operator) membahas ruang Hilbert dan operator-operator terbatas pada ruang Hilbert beserta sifat-sifatnya. Sehingga himpunan semua operator terbatas yang berada di dalamnya dapat dipandang sebagai suatu aljabar- $C^*$ .
3. Bab III (Hasilkali Tensor pada Ruang Vektor) membahas hasilkali tensor pada ruang vektor sebagai suatu ruang kosien beserta sifat-sifatnya yang akan digunakan pada bab selanjutnya.
4. Bab IV (Ruang Hasilkali Tensor dan Ruang Matriks dari Ruang Operator Terbatas) membahas keterkaitan ruang hasilkali tensor dengan ruang matriks dari ruang operator terbatas pada ruang Hilbert. Sehingga apabila ruang matriks tersebut dapat dipandang sebagai ruang operator, maka representasi pada hasilkali tensornya dapat diperlakukan sama.
5. Bab V (Penutup) berisi kesimpulan dan saran-saran guna pengembangan lebih lanjut.