BAB III
SURVIVAL ANALYSIS UNTUK MENGUJI RELIABILITAS PRODUK DAN PENENTUAN GARANSI PRODUK

3.1 Garansi

Garansi dapat diartikan sebagai jaminan yang diberikan secara tertulis oleh pabrik atau supplier kepada konsumen atas barang-barang yang dijual terhadap kerusakan-kerusaka n yang timbul dalam jangka waktu tertentu. Jaminan tersebut dinyatakan dalam bentuk tertulis berupa surat keterangan bahwa pihak produsen menjamin produk tersebut bebas dari kesalahan pekerja dan kegagalan bahan dalam jangka waktu tertentu. Jangka waktu atau batas waktu tersebut dapat berupa jarak tempuh, hari, bulan, tahun, dan lain sebagianya. Jika dalam jangka waktu yang telah ditetapkan tersebut terjadi kerusakan pada produk yang telah dibeli oleh konsumen, maka produk tersebut dapat dikembalikan, diganti oleh produsen atau diperbaiki dengan semua biaya perbaikan tersebut sepenuhnya ditanggung oleh produsen atau perusahaan yang memproduksi barang tersebut. Biasanya pelanggan sebagai pengguna terakhir dan penjual melengkapi pengisian data pada surat keterangan tersebut untuk kemudian dikirim ke produsen agar didaftarkan tanggal mulai periode garansi.

Penentuan jangka waktu atau batas garansi tidak lepas dari keandalan atau reliabilitas suatu produk. Produk yang lebih andal akan mempunyai waktu garansi yang lebih lama, begitupun sebaliknya. Garansi merupakan suatu bentuk jaminan dari perusahaan mengenai keandalan produknya. Oleh karena itu produk yang bergaransi akan cenderung dipilih oleh konsumen karena dianggap lebih andal dibandingkan produk yang tidak bergaransi.

3.2 Reliabilitas

Kualitas suatu produk berkaitan dengan kemampuan dalam mendesain produk yang menggabungkan sifat-sifat yang khas dan keistimewaan yang dapat dioptimalkan, dalam rangka memenuhi kebutuhan dan keinginan konsumen. Kualitas suatu produk dapat dilihat dengan mengukur keandalan suatu produk. Secara umum, keandalan atau reliabilitas berkaitan dengan ketahanan produk, cara kerja produk yang berhasil dan sedikitnya kerusakan atau kegagalan produk.

Keandalan atau reliabilitas suatu sistem diartikan sebagai peluang suatu sistem akan melaksanakan fungsinya dalam periode waktu tertentu, di bawah kondisi yang diberikan. Sistem yang dimaksud dapat digunakan untuk semua jenis produk, perlengkapan/peralatan, komponen dan bagian dari suatu produk. Mengacu pada pengertian reliabilitas di atas, maka suatu sistem dikatakan mengalami kegagalan jika sistem tersebut berhenti melakukan fungsinya.

Berkaitan dengan penentuan waktu garansi, bahwa penentuan waktu garansi tidak lepas dari keandalan produk, maka analisis reliabilitas atau analisis keandalan diperlukan untuk membantu produsen dalam penentuan waktu garansi. Penentuan waktu garansi yang dimaksud adalah penentuan batas garansi berdasarkan rata-rata waktu suatu sistem akan beroperasi sampai terjadinya kegagalan untuk pertama kali atau dikenal dengan istilah *mean time to failure* (MTTF).

3.3 Konsep Dasar *Survival Analysis*

Dalam bidang manufaktur, analisis data uji hidup (*Survival Analysis*) sangat berguna untuk menguji daya tahan/keandalan produk hasil industri. Sedangkan dalam bidang kedokteran, analisis data uji hidup (*Survival Analysis*) bermanfaat untuk mengukur lamanya daya tahan hidup seorang penderita dalam suatu eksperimen yang menyangkut pengobatan suatu penyakit.

Beberapa istilah yang dipergunakan dalam analisis data uji hidup (*Survival Analysis*) adalah *life time, survival time* dan *failure time*. Istilah-istilah ini secara harfiah mempunyai makna yang sama, yaitu menunjukkan daya tahan suatu objek. Akan tetapi pengertiannya akan menjadi berbeda tergantung pada jenis peristiwa yang diterangkan oleh istilah-istilah tersebut. Secara umum, *life time* menunjukkan lamanya waktu hidup suatu sistem yang diukur dari titik waktu tertentu sampai sistem tersebut tidak dapat berfungsi lagi dengan normal. Kata sistem digunakan untuk menunjukkan sesuatu yang umum sehingga sistem yang dimaksud dapat berupa manusia, peralatan, produk dan lain sebagainya.

Berikut ini adalah beberapa contoh yang menggambarkan terjadinya data *life time* atau data *survival*, yaitu :

1. Pada suatu produk industri dilakukan eksperimen untuk mengetahui keandalannya. Eksperimen tersebut berupa pengoperasian produk sampai produk tersebut mengalami kegagalan atau tidak dapat berfungsi dengan normal. Dalam kondisi seperti ini biasanya *life time* berarti waktu kegagalan (*failure time*).

2. Dalam bidang pengobatan, eksperimen dilakukan untuk mengetahui lamanya daya tahan hidup penderita yang diukur sejak tanggal diagnosis atau dimulai pada permulaan waktu tertentu. Lamanya daya tahan hidup penderita disebut sebagai *survival time*.
3. Terdapat produk industri yang dapat diperbaiki lebih dari satu kali. Jika suatu eksperimen dilakukan untuk mengetahui lamanya waktu antara satu kerusakan sampai terjadi kerusakan berikutnya, maka lamanya waktu tersebut dikatakan sebagai *life time*.

Misalkan X adalah variabel random nonnegatif yang menunjukkan lamanya waktu sampai terjadinya suatu peristiwa tertentu. Peristiwa tersebut dapat berupa kematian, perkembangan suatu penyakit, dan kerusakan pada peralatan. Dalam analisis uji hidup (*Survival Analysis*) terdapat beberapa karakteristik fungsi dari distribusi X, yaitu :

1. Fungsi kepadatan peluang.
2. Fungsi survival, yaitu probabilitas/peluang suatu sistem tetap bertahan melebihi waktu x. Pada peristiwa kegagalan/kerusakan peralatan/produk manufaktur, fungsi ini dikenal sebagai fungsi reliabilitas. Fungsi ini dirumuskan sebagai berikut :

$$R(x) = P(X > x) \qquad (3.1)$$

3. Fungsi hazard, yaitu besarnya peluang bersyarat dari suatu sistem akan gagal/mati apabila diketahui sistem tersebut tetap berfungsi/hidup sampai waktu x. Fungsi ini dirumuskan sebagai berikut :

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} \qquad (3.2)$$

3.4 *Survival Anlaysis* dalam Menganalisis Reliabilitas Produk

Salah satu indikator kemajuan teknologi adalah terjadinya perkembangan yang sangat pesat di bidang industri, baik dari segi pemakaian mesin-mesin produksi yang semakin efektif dan efisien, maupun dari segi kualitas suatu produk hasil industri yang semakin meningkat. Seiring dengan perkembangan ilmu pengetahuan, pengujian-pengujian keandalan suatu produk industri masih terus dilakukan untuk meningkatkan kualitasnya. Salah satu metode unuk menguji keandalan produk adalah analisis uji hidup (*Survival Analysis*). Analisis ini berguna untuk menguji daya tahan atau keandalan suatu produk hasil industri.

Misalkan X adalah variabel random kontinu pada interval $[0,\infty)$ yang menyatakan waktu kegagalan sistem. Reliabilitas dari suatu sistem dapat diekspresikan dalam variabel random X, yaitu waktu suatu sistem mengalami kegagalan. Fungsi kepadatan peluang, $f(x)$, diartikan sebagai peluang bahwa kegagalan terjadi pada waktu antara x dan $x+\Delta x$, dan dirumuskan sebagai berikut:

$$P(x < X \leq x + \Delta x) = f(x)\Delta x \qquad (3.3)$$

untuk Δx yang sangat kecil. Diketahui bahwa fungsi distribusi diartikan sebagai peluang bahwa suatu kerusakan atau kegagalan terjadi pada waktu kurang dari atau sama dengan x, dan dirumuskan sebagai berikut :

$$P(X \leq x) = F(x) \qquad (3.4)$$

Reliabilitas didefinisikan sebagai peluang suatu produk akan beroperasi tanpa mengalami kegagalan melebihi jangka waktu x, dan dirumuskan sebagai berikut :

$$P(X > x) = R(x) \quad (3.5)$$

Karena sistem tersebut tidak gagal untuk $X \leq x$ dan gagal pada suatu $X > x$, maka

$$R(x) = 1 - F(x) \quad (3.6)$$

atau ekuivalen dengan

$$R(x) = 1 - \int_0^x f(t)\,dt \quad (3.7)$$

atau

$$R(x) = \int_x^\infty f(t)\,dt \quad (3.8)$$

Berdasarkan sifat-sifat fungsi kepadatan peluang, maka

$$R(0) = 1 \quad (3.9)$$

dan

$$R(\infty) = 0 \quad (3.10)$$

$F(x)$ adalah probabilitas suatu sistem akan gagal sebelum $X = x$, biasanya dikenal juga sebagai unreliabilitas atau peluang kegagalan. Unreliabilitas dapat dinotasikan sebagai :

$$\bar{R}(x) = 1 - R(x) = F(x) \quad (3.11)$$

Persamaan 3.6 dapat diturunkan untuk menyatakan fungsi kepadatan peluang dari waktu kegagalan dalam suku reliabilitas, yaitu

$$f(x) = -\frac{d}{dx}R(x) \quad (3.12)$$

Misalkan $\lambda(x)\,\Delta x$ adalah probabilitas suatu sistem akan gagal pada suatu waktu $X < x + \Delta x$ yang diberikan tapi belum gagal pada $X = x$. Maka $\lambda(x)\,\Delta x$ adalah probabilitas bersyaratnya

$$\lambda(x)\,\Delta x = P(X < x + \Delta x | X > x) \qquad (3.13)$$

Dengan menggunakan definisi probabilitas bersyarat, maka diperoleh

$$P(X < x + \Delta x | X > x) = \frac{P\big((X > x) \cap (X < x + \Delta x)\big)}{P\,(X > x)} \qquad (3.14)$$

Pembilang pada ruas kanan merupakan bentuk lain dari penulisan fungsi kepadatan peluang, sehingga

$$P\big((X > x) \cap (X < x + \Delta x)\big) \equiv P(x < X < x + \Delta x) = f(x)\,\Delta x \qquad (3.15)$$

Penyebut pada ruas kanan persamaan 3.12 adalah $R(x)$, seperti yang dinyatakan pada persamaan 3.3. Maka dengan mengkombinasikan persamaan-persamaan tersebut diperoleh

$$\lambda(x)\,\Delta x = \frac{f(x)\,\Delta x}{R(x)}$$

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} \qquad (3.16)$$

$\lambda(x)$, yang dirumuskan pada persamaan (3.16) disebut sebagai fungsi hazard (*hazard function*).

Salah satu cara yang paling berguna untuk menyatakan fungsi kepadatan peluang reliabilitas dan kegagalan adalah dengan menyatakannya dalam laju kegagalan. Untuk memperolehnya, pertama dilakukan eliminasi $f(x)$ dari persamaan (3.16) dengan cara mensubstitusi persamaan (3.12) untuk memperoleh laju kegagalan yang dinyatakan dalam bentuk reliabilitas sebagai berikut

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{-\frac{d}{dx}R(x)}{R(x)}$$

$$\lambda(x) = -\frac{1}{R(x)}\frac{d}{dt}R(x) \qquad (3.17)$$

Dikalikan dengan dt, diperoleh

$$\lambda(x)\,dx = -\frac{dR(x)}{R(x)} \qquad (3.18)$$

Persamaan 3.16 diintegralkan antara nol dan *x* menghasilkan

$$\int_0^x \lambda(t)\,dt = \int_0^x -\frac{dR(t)}{R(t)}$$

$$= -[\ln R(t)]\Big|_{t=0}^{x}$$

$$= -[\ln R(x) - \ln R(0)]$$

karena $R(0) = 1$, maka

$$\int_0^x \lambda(t)\,dt = -[\ln R(x) - \ln 1], \text{ dengan} \ln 1 = 0$$

$$\int_0^x \lambda(t)\,dt = -\ln[R(x)] \qquad (3.19)$$

Dengan mengeksponensialkan persamaan 3.17, maka diperoleh

$$\int_0^x \lambda(t)\,dt = -\ln[R(x)]$$

$$\exp\left(\int_0^x \lambda(t)\,dt\right) = \exp(-\ln[R(x)])$$

$$\exp\left(\int_0^x \lambda(t)\,dt\right) = -R(x)$$

$$-\exp\left(\int_0^x \lambda(t)\,dt\right) = R(x)$$

$$\exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\,dt\right) = R(x)$$

atau

$$R(t) = \exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\,dt\right) \tag{3.20}$$

Untuk memperoleh fungsi kepadatan peluang dari waktu kegagalan, substitusi persamaan (3.20) ke dalam (3.16), sehingga diperoleh :

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{R(x)} = \frac{f(x)}{\exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\,dt\right)}$$

lalu selesaikan untuk $f(x)$, yaitu sebagai berikut

$$\lambda(x) = \frac{f(x)}{\exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\,dt\right)}$$

$$f(x) = \lambda(x)\exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\,dt\right) \tag{3.21}$$

Salah satu karakteristik yang sering digunakan di dalam reliabilitas adalah *mean time to failure* (MTTF). MTTF menyatakan nilai ekspektasi atau nilai rata-rata $E(x)$ dari waktu kegagalan *x*. MTTF dapat dinyatakan dalam bentuk :

$$\text{MTTF} = \int_0^\infty x f(x)\,dx \tag{3.22}$$

MTTF dapat dinyatakan dalam suku reliabilitas dengan mensubstitusi persamaan (3.12) ke dalam persamaan (3.22), yaitu sebagai berikut :

$$\mathrm{MTTF} = \int_0^\infty x\, f(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x \left(-\frac{d}{dx} R(x) \right) dx$$

$$= -\int_0^\infty x \left(\frac{d}{dx} R(x) \right) dx$$

$$MTTF = -\int_0^\infty x \;\, dR(x)$$

Untuk mengintegralkannya digunakan teknik integral parsial, yaitu dengan memisalkan $u = x$ dan $dv = dR(x)$ sehingga

$$u = x \;\rightarrow du = dx$$

$$dv = dR(x) \rightarrow \int dv = \int dR(x) \rightarrow v = R(x)$$

maka

$$-\int_0^\infty x \;\, dR(x) = -x\, R(x) \Big|_{x=0}^{\infty} + \int_0^\infty R(x)\, dx$$

dengan $R(x) = 0$ saat $x = \infty$, maka

$$-\int_0^\infty x \;\, dR(x) = \int_0^\infty R(x)\, dx$$

atau

$$MTTF = \int_0^\infty R(x)\,dx \qquad (3.23)$$

MTTF adalah rata-rata waktu suatu sistem akan beroperasi sampai terjadi kegagalan untuk pertama kali. Ukuran inilah yang kemudian dijadikan acuan dalam penentuan batas garansi.

3.5 Fungsi Reliabilitas Dari Beberapa Distribusi Khusus Kontinu

Misalkan *X* adalah variabel random kontinu pada interval $[0,\infty)$ yang menyatakan waktu kegagalan sistem. Reliabilitas dari suatu sistem dapat diekspresikan dalam variabel random *X*, yaitu waktu suatu sistem mengalami kegagalan. Dari persamaan (3.6),

$$R(x) = 1 - F(x)$$

maka dapat dirumuskan fungsi reliabilitas untuk beberapa distribusi khusus kontinu berikut ini.

3.5.1 Distribusi Eksponensial

Secara umum, fungsi reliabilitas dinyatakan sebagai :

$$R(x) = 1 - F(x)$$

Fungsi distribusi untuk distribusi Eksponensial adalah :

$$F(x;\theta) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) & ; x > 0 \end{cases}$$

sehingga

$$R(x) = 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)\right)$$

$$R(x) = \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right)$$

maka fungsi reliabilitas dari distribusi eksponensial adalah :

$$R\,(x\!:\theta) = \begin{cases} 1 & ; x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right) & ; x > 0 \end{cases} \tag{3.24}$$

3.5.2 Distribusi Weibull

Secara umum, fungsi reliabilitas dinyatakan sebagai :

$$R(x) = 1 - F(x)$$

Fungsi distribusi untuk distribusi Weibull adalah :

$$F(x\!:p,\sigma) = \begin{cases} 0 & ; x \leq 0 \\ 1 - \exp\left(-\frac{x^p}{\sigma}\right) & ; x > 0 \end{cases}$$

sehingga

$$R(x) = 1 - \left(1 - \exp\left(-\frac{x^p}{\sigma}\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{x^p}{\sigma}\right)$$

maka fungsi reliabilitas dari distribusi weibull adalah :

$$R(x\!:p,\sigma) = \begin{cases} 1 & ; x \leq 0 \\ \exp\left(-\frac{x^p}{\sigma}\right) & ; x > 0 \end{cases} \tag{3.25}$$

3.5 Penyensoran

Data uji hidup dapat diperoleh dengan melakukan eksperimen pada sebanyak n buah produk. Terhadap n buah produk tersebut diuji keandalannya pada kondisi operasinya normal atau dengan kata lain sesuai dengan fungsi dari produk tersebut. Eksperimen ini dapat dihentikan setelah semua produk yang diuji tidak berfungsi lagi dengan normal atau dapat dihentikan sebelum semua produk yang diuji tidak berfungsi lagi.

Eksperimen yang dihentikan setelah semua produk yang diuji tidak berfungsi lagi dengan normal menghasilkan data uji hidup yang disebut sampel lengkap. Kelebihan dari uji sampel lengkap ini adalah diperolehnya hasil observasi yang terurut dari semua produk yang diuji. Eksperimen yang dihentikan sebelum semua produk yang diuji tidak berfungsi lagi menghasilkan data uji hidup yang disebut sampel sensor.

Salah satu penyensoran yang dikenal adalah penyensoran waktu (sensor waktu) yaitu jika eksperimen dihentikan setelah dicapai waktu tertentu. Penghentian eksperimen atau pengujian ini dilakukan dengan berbagai alasan, salah satunya adalah faktor biaya dan waktu. Misalkan eksperimen atau pengujian dihentikan setelah waktu tertentu L. Waktu hidup produk atau waktu suatu produk yang sedang diuji bertahan samapi terjadinya kegagalan, akan diketahui secara eksak apabila waktu produk yang gagal sama dengan x.

Pada penyensoran waktu, banyaknya waktu-waktu hidup eksak yang terobservasi adalah acak. Misalkan X_i adalah waktu hidup dan L_i adalah waktu sensor tertentu untuk produk ke-i, dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ yang saling independen. Asumsikan X_i merupakan distribusi yang identik dan independen dengan fungsi kepadatan peluang (fkp) $f(x)$ dan fungsi survival $R(x)$, maka :

1. Waktu hidup eksak produk ke-I (X_i) akan terobservasi apabila $X_\mathrm{i} \le L_\mathrm{i}$.
2. Data untuk penyensoran waktu dinyatakan oleh n pasangan variabel random berbentuk (x_i, δ_i) dengan :

   x_i merupakan variabel yang menunjukkan variabel waktu dan $x_i = \min\{L_\mathrm{i}, X_\mathrm{i}\}$, di mana :

$x_i = L_i$ jika $L_i < X_i$, dikatakan bahwa data ke-i tersensor

$x_i = X_i$ jika $L_i > X_i$, dikatakan bahwa data ke-i tidak tersensor

δ_i merupakan variabel yang menunjukkan variabel yang telah mati, dalam hal ini adalah produk yang telah mengalami kegagalan, di mana :

$$\delta_i = \begin{cases} 1, \; X_i \leq L_i & \text{artinya produk gagal (terobservasi)} \\ 0, \; X_i > L_i & \text{artinya produk belum gagal (tidak terobservasi)} \end{cases} \qquad (3.26)$$

3. X merupakan variabel random campuran yaitu komponen diskrit dan kontinu, sedangkan δ_i merupakan variabel random diskrit.

a. Model diskrit

x_i merupakan variabel random diskrit apabila $x_i = L_i$ yang berarti bahwa waktu hidup eksak X_i tidak terobservasi atau tersensor.

Untuk x_i variabel random diskrit maka :

$$P(x_i = L_i) = P(X_i > L_i) = R(L_i) = P(\delta_i = 0) \qquad (3.27)$$

b. Model kontinu

x_i merupakan variabel random kontinu apabila $x_i = X_i$ yang berarti bahwa waktu hidup eksak X_i terobservasi atau tidak tersensor.

Fungsi kepadatan peluang dari X adalah:

$$P(x_i|\delta_i = 1) = P(x_i|X_i \leq L_i)$$

$$= \frac{P(x_i, X_i \leq L_i)}{P(X_i \leq L_i)}$$

$$= \frac{P(X_i = x_i)}{1 - P(X_i > L_i)}$$

$$P(x_i|\delta_i = 1) = \frac{f(x_i)}{1 - R(L_i)} \qquad (3.28)$$

Suatu distribusi dari (x_i, δ_i) mempunyai komponen-komponen sebagai berikut :

$$P(x_i = L_i, \delta_i = 0) = P(x_i = L_i, X_i > L_i)$$

$$= P(X_i > L_i)$$

$$= R(L_i)$$

$$P(x_i, \delta_i = 1) = P(\delta_i = 1) \cdot P(x_i|\delta_i = 1)$$

$$= P(X_i \le L_i) \cdot \frac{f(x_i)}{1 - R(L_i)}$$

$$P(x_i, \delta_i = 1) = \left(1 - R(L_i)\right) \cdot \frac{f(x_i)}{1 - R(L_i)}$$

$$= f(x_i)$$

sehingga fungsi kepadatan peluang bersama dari x_i dan δ_i dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f(x_i, \delta_i) = [f(x_i)]^{\delta_i} \cdot [R(L_i)]^{1-\delta_i} \qquad (3.29)$$

3.6 Fungsi Kemungkinan untuk Sampel Penyensoran Waktu

Misalkan X_i adalah waktu hidup dan L_i adalah waktu sensor tertentu untuk produk ke-i, dengan $i = 1, 2, 3, \cdots, n$ yang saling independen. Asumsikan X_i merupakan distribusi yang identik dan independen dan mempunyai distribusi kontinu dengan fungsi kepadatan peluang $f(x)$ dan fungsi survival $R(x)$, δ_i

merupakan variabel random diskrit, maka fungsi kepadatan peluang bersama dari x_i dan δ_i yaitu :

$$f(x_i, \delta_i) = [f(x_i)]^{\delta_i} \cdot [R(L_i)]^{1-\delta_i}$$

sehingga fungsi kemungkinan untuk sampel penyensoran waktu dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \delta_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} [f(x_i)]^{\delta_i} \cdot [R(L_i)]^{1-\delta_i}$$

Untuk memudahkan penganalisaan, fungsi kemungkinan $L(\theta, x)$ diberi ln. Sehingga fungsi kemungkinan untuk sampel penyensoran waktu dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$\ln L(\theta) = \ln \prod_{i=1}^{n} [f(x_i)]^{\delta_i} \cdot [R(L_i)]^{1-\delta_i} \qquad (3.30)$$