BAB II

KERANGKA TEORITIS

A. Bilangan Bulat

Bilangan bulat adalah semua bilangan cacah dengan semua lawan bilangan asli atau bilangan bulat terdiri dari bilangan bulat positif, nol dan bilangan bulat negatif. Dalam matematika dikenal empat operasi hitung dasar yaitu penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian.

a). Bilangan Bulat dan Lambangnya

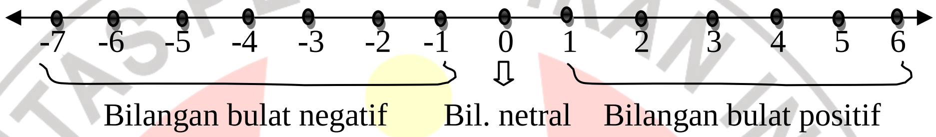
Sebelum bicara tentang bilangan bulat, kita ingat-ingat kembali tentang beberapa himpunan bilangan yang telah dikenalkan pada bab sebelumnya, yaitu :

Himpunan semua bilangan asli A adalah A = {1,2,3,4,…}

Himpunan semua bilangan cacah C adalah C = {0,1,2,3,4,…}

Bagaimana bentuk operasi pengurangan pada bilangan cacah jika 2-5, 4-10, dan seterusnya. Dan jika terjadi perubahan suhu menjadi lebih rendah dari nol derajat celcius. Tentulah kita akan kesulitan bila hanya mengandalkan bilangan positif. Untuk itu, digunakan bilangan khusus yang disebut bilangan negatif, yaitu bilangan yang lebih kecil dari nol. Sedangkan bilangan bulat positif adalah bilangan bulat yang lebih besar dari nol (0).

Dalam penulisan pada bilangan bulat kadang ditulis seperti 10, 15, 20 dan kadang ditambahkan tanda positif (+) di depan bilangan tersebut seperti : +10, +15, +20, sebaliknya pada bilangan bulat negatif dituliskan dengan menambahkan tanda negatif (-) di depan bilangan tersebut seperti: -20, -15, -10. Untuk bilangan bulat positif dan negatif dapat digambarkan pada sebuah garis bilangan, yaitu:



Pada garis bilangan:

• Semakin ke kanan, nilai bilangan semakin besar.

• Semakin ke kiri, nilai bilangan semakin kecil nilai.

Pada garis bilangan tersebut terdapat bilangan-bilangan yang diberi tanda sesuai dengan letaknya dari bilangan nol. Himpunan bilangan bulat negatif digabung dengan himpunan bilangan cacah akan membentuk himpunan bilangan bulat. Himpunan bilangan bulat disimbolkan dengan Z (Zahlan) yaitu himpunan bilangan yang dituliskan sebagai berikut: Z = {…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …} akan tetapi pada umumnya kebanyakan dinyatakan dengan B. Jadi himpunan bilangan bulat B adalah B = {…, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, …}

Dari himpunan bilangan bulat itu, ternyata kita dapat membagi himpunan itu menjadi tiga himpunan bagian yang *saling lepas*, yaitu ;

(1) Himpunan semua bilangan bulat negatif B^{-} = {…, -4, -3, -2, -1, }

(2) Himpunan bilangan nol yaitu {0}, dan

(3) Himpunan semua bilangan bulat positif $B^{+} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$

Dari keterangan di atas, ternyata bilangan nol bukan bilangan bulat *negatif* dan bukan bilangan bulat *positif*. Oleh karena itu nol disebut bilangan *netral*. Jadi bilangan bulat adalah semua bilangan cacah dengan semua lawan bilangan asli atau bilangan bulat terdiri dari bilangan bulat positif, nol dan bilangan bulat negatif.

b.) Hubungan Lebih Dari atau Kurang Dari Antara Dua Bilangan Bulat

Dari garis bilangan kita dapat dengan mudah membandingkan dua buah bilangan bulat dengan ketentuan sebagai berikut:

(1) Bilangan bulat *a* disebut *lebih dari* bilangan bulat *b*, ditulis "a > b", bila *a* terletak disebelah *kanan b* pada garis bilangan; atau

(2) Bilangan bulat *c* disebut *kurang dari* bilangan bulat *d*, ditulis "a < b", bila *c* terletak disebelah *kiri d* pada garis bilangan.

Untuk lebih jelasnya, perhatikan contoh-contoh berikut:

i) 5 *lebih dari* 4 atau 5 > 4, karena 5 terletak di sebelah *kanan* 4;

ii) 5 *kurang dari* 8 atau 5 < 8, karena 5 terletak di sebelah *kiri* 8;

iii) -2 *lebih dari* - 4 atau -2 > -4, karena -2 terletak di sebelah *kanan* -4;

iv) -5 *kurang dari* -1 atau -5 < -1, karena -5 terletak di sebelah *kiri* -1;

c). Operasi pada Bilangan Bulat

Dalam Ensiklopedia Matematika, Operasi diartikan suatu pengerjaan (Negoro, 2000). Operasi yang dimaksud adalah operasi hitung atau pengerjaan hitung. Lebih lanjut Russeffendi (1979) mengatakan bahwa "apabila ada kata operasi hitung atau pengerjaan hitung, maksudnya sama yaitu salah satu beberapa atau semua dari penjumlahan, pengurangan, perkalian dan pembagian serta operasi hitung lainnya".

(1) Penjumlahan

Pada penjumlahan bilangan bulat dapat dipergunakan alat bantu berupa;

a. Perhitungan tanpa alat bantu,
b. Garis bilangan,
c. Kelereng dan gelas dan
d. Keping aljabar.

Sifat-sifat Penjumlahan pada Bilangan Bulat

(i) *Sifat Tertutup*

Jika diambil sebarang dua buah bilangan bulat, misalnya 2 dan 8 maka jumlah kedua bilangan bulat itu adalah 2 + 8 = 10 juga merupakan bilangan bulat.

Contoh ;

-7 + 4 = -3

Bil. bulat Bil. bulat Bil. bulat

(ii) *Sifat Komutatif (pertukaran)*

Jumlah dua bilangan bulat hasilnya akan sama, jika letak kedua bilangan bulat itu *dipertukarkan*.

Jadi untuk sebarang bilangan-bilangan bulat a dan b berlaku a + b = b + a.

Contoh;

Jadi -3 + 5 = 2 atau 5 + (-3) = 2, artinya -3 + 5 = 5 + (-3).

(iii) *Sifat Asosiatif (pengelompokan)*

Untuk sebarang tiga buah bilangan bulat a, b, dan c berlaku :

(a + b) + c = a + (b + c) yang disebut sifat asosiatif (pengelompokan) untuk penjumlahan.

Contoh;

(25 + 15) + 45 = 25 + (15 + 45) = 85

(iv) *Sifat Distributif Perkalian terhadap Penjumlahan*

Untuk tiap-tiap bilangan bulat a, b, dan c berlaku : a x (b + c) = (a x b) + (a x c) yang disebut sifat distributive perkalian terhadap penjumlahan.

Contoh;

5 x (20 + 25) = (5 x 20) + (5 x 25)

5 x (20 + 25) = 5 X 45 = 225, dan (5 x 20) + (5 x 25) = 100 + 125 = 225 ini menunjukkan bahwa ini adalah sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

(v) *Unsur Identitas pada Penjumlahan*

Untuk tiap bilangan cacah c selalu berlaku : c + 0 = 0 + c.

Jadi setiap bilangan bulat jika *ditambah* dengan 0 maka hasilnya bilangan bulat itu sendiri. Hal ini, kita katakan bahwa nol adalah *unsur identitas* pada penjumlahan.

Contoh ;

5 + 0 = 5   0 + 7 = 7   3 + 0 = 3

Jadi penjumlahan bilangan bulat dengan nol menghasilkan bilangan itu sendiri.

Penjumlahan dengan Menggunakan Garis Bilangan;

Dalam menggunakan garis bilangan dapat dilihat pada contoh di bawah ini:

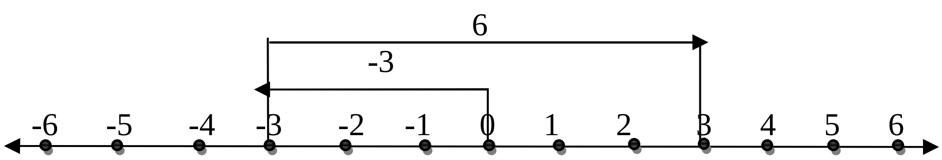
1. -3 + 6 = ···

Tanda (-) pada angka 3 merupakan tanda bilangan, sedangka tanda (+) merupakan tanda operasi. Jika operasi penjumlahan tersebut diselesaikan dengan garis bilangan maka dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1). Dari titik nol (0) berjalan ke arah kiri sejauh 3 langkah (3 skala) dan berhenti di angka -3.

2). Karena 6 arahnya positif, maka sebelum berjalan maju harus terlebih dahulu berbalik arah ke kanan. Selanjutnya maju sebanyak 6 skala ke kanan.

Sebagaimana pada gambar garis bilangan berikut:



Jadi -3 + 6 = 3

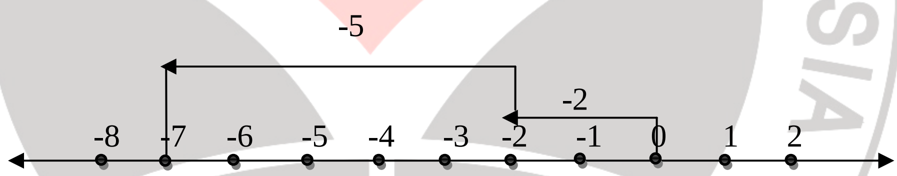
2. -2 + (-5) = ⋯

Tanda (-) pada angka 2 merupakan tanda bilangan, sedangka tanda (+) merupakan tanda operasi dan tanda (-) pada angka 5 juga merupakan tanda bilangan. Jika operasi penjumlahan tersebut diselesaikan dengan garis bilangan maka dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1). Dari titik nol (0) berjalan ke arah kiri sejauh 2 langkah (2 skala) dan berhenti di angka -2.

2). Karena terdapat tanda (+) sebagai tanda operasi maka selanjutnya dari angka -2 akan berjalan lagi sebanyak 5 skala ke arah kiri.

Sebagaimana pada gambar garis bilangan berikut:



Jadi -2 + (-5) = -7

Pengurangan dengan Menggunakan Garis Bilangan;

Telah diketahui bahwa himpunan semua bilangan cacah tidak tertutup terhadap pengurangan. Seperti pada penjumlahan bilangan-bilangan bulat, operasi pengurangan pada bilangan bulat pun dapat dilakukan dengan berbagai macam cara sebagaimana operasi penjumlahan. Seperti pada contoh soal berikut:

1) 7 – 9 = · · ·

Untuk memperlihatkan pengurangan pada 7 – 9 = · · · dengan menggunakan garis bilangan dapat dilihat pada contoh di bawah ini:

7 – 9 = · · ·

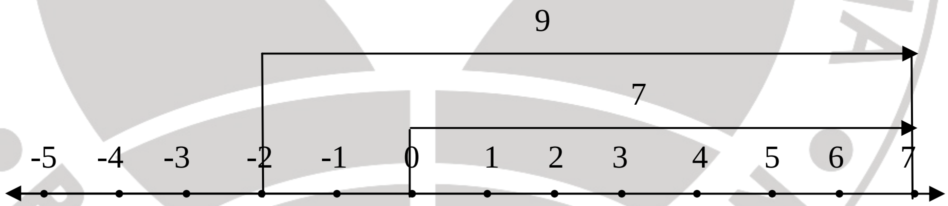
Tanda (-) merupakan tanda operasi, dan dapat diselesaikan dengan garis bilangan. Jika operasi pengurangan tersebut diselesaikan dengan garis bilangan maka dapat dilakukan dengan langkah-langkah sebagai berikut:

1). Dari titik 0, berjalan ke arah kanan sejauh 7 langkah (7 skala).

2). Karena tanda (-) merupakan tanda operasi pengurangan maka akan berjalan mundur sejauh 9 skala dari titik 7.

Sebagaimana pada gambar garis bilangan berikut ini:

7 – 9 = · · ·



Jadi 7 – 9 = -2

2). 3 – (-5) = · · ·

Untuk memperlihatkan pengurangan pada 3 – (-5) = · · · dengan menggunakan garis bilangan dapat dilihat pada contoh di bawah ini:

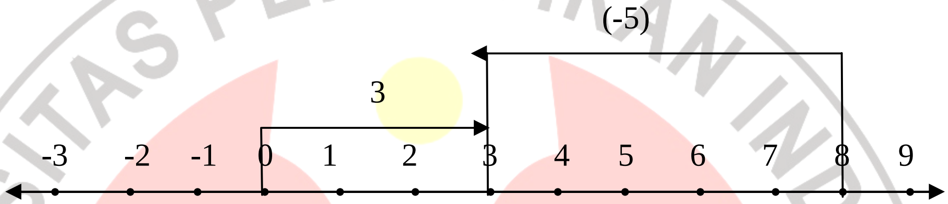
1). Dari titik 0, berjalan ke arah kanan sejauh 3 langkah (3 skala).

2). Karena tanda (-) merupakan tanda operasi pengurangan maka akan berjalan mundur.

3). Sebelum berjalan mundur harus terlebih dahulu berbalik arah ke kanan dan selanjutnya mundur sejauh 5 skala ke arah kanan.

Sebagaimana pada gambar garis bilangan berikut ini:

3 – (-5) = · · ·



Jadi 3 – (-5) = 8

3). -5 – (-9) = · · ·

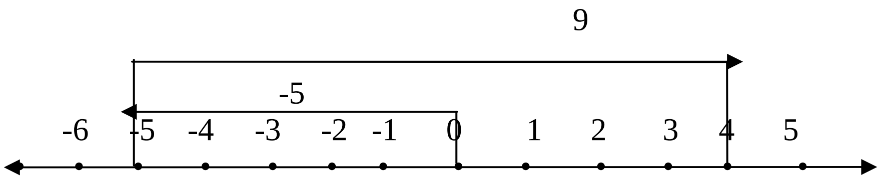
Untuk memperlihatkan pengurangan pada -5 – (-9) = · · · dengan menggunakan garis bilangan dapat dilihat pada contoh di bawah ini:

1). Dari titik 0, berjalan ke arah kiri sejauh 5 langkah (5 skala) dan berhenti di angka -5.

2). Karena tanda (-) merupakan tanda operasi pengurangan maka akan berjalan mundur.

3). Karena tanda (-) pada angka 9 (-9) merupakan tanda bilangan maka Sebelum berjalan mundur harus terlebih dahulu berbalik arah ke kanan dan selanjutnya mundur sejauh 9 skala ke arah kanan

Sebagaimana pada gambar garis bilangan berikut ini:



Jadi -5 – (-9) = 4

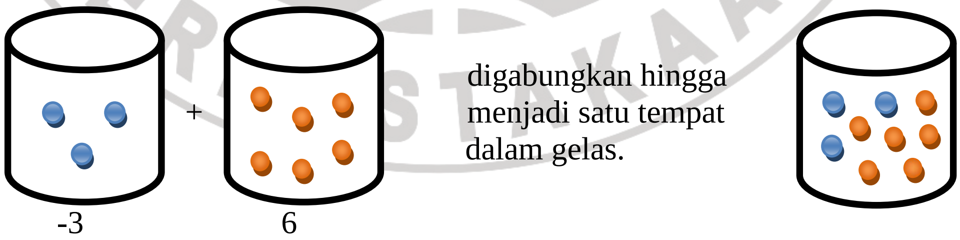
Penjumlahan dengan Menggunakan Kelereng dan Gelas;

Dalam menggunakan garis bilangan dapat dilihat pada contoh di bawah ini:

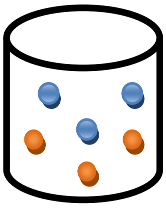
1). -3 + 6 = ⋯

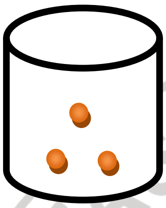
Dalam menggunakan kelereng dan gelas, dengan memisalkan bahwa satu buah kelereng yang berwarna biru mewakili -1 dan yang berwarna kuning mewakili +1 atau 1. Dan tiap-tiap buah kelereng yang warnanya berbeda akan dipasangkan hingga terpasangkan satu-satu dan nilainya adalah nol (0). Setelah terpasangkan satu-satu maka sisa dari kelereng yang tidak terpasangkan itulah yang dinyatakan sebagai hasilnya.

(Ingat: Sepasang keping aljabar mewakili 1 dan -1 menghasilkan nol.)



Kemudian setiap kelereng yang warnanya bisa dipasangkan satu-satu akan diambil dan digabungkan menjadi satu tempat dan menghasilkan nilai nol (0). Seperti gambar berikut:

 Setelah kelereng tersebut terpasangkan maka nilainya adalah nol (0) dan ternyata masih sisa kelereng dalam gelas yang tak terpasangkan, seperti gambar berikut:

 karena yang tersisa adalah 3 buah kelereng yang berwarna kuning maka hasilnya adalah positif 3.

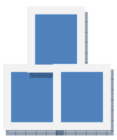
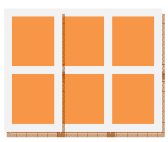
Jadi -3 + 6 = 3

Keterangan: = Positif = Negatif

Penjumlahan dengan Menggunakan Keping aljabar;

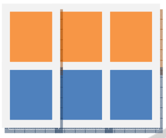
Dalam menggunakan keping aljabar, dengan memisalkan bahwa satu buah keping aljabar yang berwarna biru mewakili -1 dan yang berwarna kuning mewakili +1 atau 1. Dan tiap-tiap buah keping aljabar yang warnanya berbeda akan dipasangkan hingga terpasangkan satu-satu dan nilainya adalah nol (0). Setelah terpasangkan satu-satu maka sisa dari keping aljabar yang tidak terpasangkan itulah yang dinyatakan sebagai hasilnya.

(Ingat: Sepasang keping aljabar mewakili 1 dan -1 menghasilkan nol.)

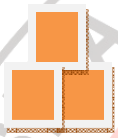
 + 

-3 6

Kemudian setiap keping aljabar yang warnanya bisa dipasangkan satu-satu akan diambil dan digabungkan menjadi satu tempat dan menghasilkan nilai nol (0). Seperti gambar berikut:



Setelah keping aljabar tersebut terpasangkan maka nilainya adalah nol (0) dan ternyata masih sisa keping aljabar yang tak terpasangkan, seperti gambar berikut:



karena yang tersisa adalah 3 keping aljabar yang berwarna kuning maka hasilnya adalah positif 3.

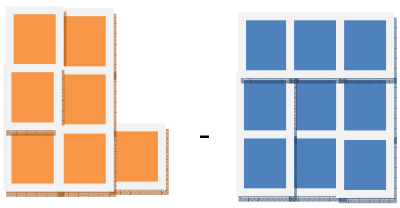
Jadi $-3 + 6 = 3$

Pengurangan dengan Menggunakan Keping aljabar;

Untuk kelereng dan keping aljabar, cara atau aturan dalam penggunaan alat bantu tersebut adalah sama, di sini akan digunakan alat bantu berupa keping aljabar, sebagai berikut:

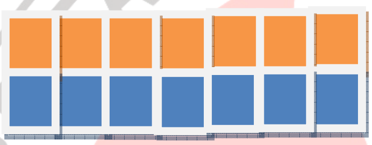
Dalam menggunakan keping aljabar, dengan memisalkan bahwa satu buah keping aljabar yang berwarna biru mewakili -1 dan yang berwarna kuning mewakili +1 atau 1. Dan tiap-tiap buah keping aljabar yang warnanya berbeda akan diambil dan dipasangkan hingga terpasangkan satu-satu dan nilainya adalah nol (0). Setelah terpasangkan satu-satu maka sisa dari keping aljabar yang tidak terpasangkan itulah yang dinyatakan sebagai hasilnya.

(Ingat: Sepasang keping aljabar mewakili 1 dan -1 menghasilkan nol.)

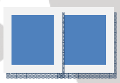


7 -9

Kemudian setiap keping aljabar yang warnanya bisa dipasangkan satu-satu akan diambil dan digabungkan menjadi satu tempat dan menghasilkan nilai nol (0). Seperti gambar berikut:



Setelah keping aljabar tersebut terpasangkan maka nilainya adalah nol (0) dan terlihat masih ada keping aljabar yang tak terpasangkan yaitu seperti gambar berikut:

 karena yang tersisa adalah 3 keping aljabar yang berwarna biru maka hasilnya adalah negatif 2 atau -2.

Perhitungan Tanpa Alat Bantu;

Dapat diselesaikan dengan cara; sebagai berikut:

1). $-3 + 6 = \cdots$

$$\begin{aligned} -3 + 6 &= (-3) + (3 + 3) \\ &= [(-3) + 3] + 3 \\ &= 0 + 3 \\ &= 3 \end{aligned}$$

2) $-2 - (-5) = \cdots$

= -2 + 5

= -2 [(2+3)]

= [(-2) + 2] + 3

= 0 + 3

= 3

B. Pendekatan Realistik dalam Pembelajaran Matematika

Salah satu pendekatan yang berorientasi pada matematisasi pengalaman sehari-hari dan menerapkan matematika dalam pengalaman adalah pendekatan matematika realistik. Pendekatan ini mengacu pada pendapat Freudenthal sehari-hari yang menyatakan bahwa pembelajaran matematika sebaiknya berangkat dari aktifitas manusia karena *Mathematics is a human activity* (Suherman, 2001).

Realistic Mathematics Education (RME) merupakan teori belajar mengajar dalam pendidikan matematika. Teori ini pertama kali diperkenalkan dan dikembangkan di Belanda pada tahun 1970 oleh Institut Freudenthal dan telah diperluas hingga ke negara-negara lain (De Lange, 1996). Teori ini mengacu pada pendapat Freudenthal yang mengatakan bahwa matematika harus dikaitkan dengan realita dan matematika merupakan aktivitas manusia. Ini berarti matematika harus dekat dengan anak dan relevan dengan kehidupan nyata sehari-hari. Teori ini muncul dari rancangan kerja dan penelitian dalam pembelajaran matematika di Belanda, khususnya di Lembaga Freudenthal, Universitas Utrecht. Menurut (Freudenthal, 1991) bahwa matematika bukan merupakan suatu subjek yang siap saji untuk siswa, melainkan bahwa matematika adalah suatu pelajaran yang dinamis yang dapat dipelajari dengan cara mengerjakannya.

Matematika sebagai aktivitas manusia berarti manusia harus diberikan kesempatan untuk menemukan kembali ide dan konsep matematika dengan bimbingan orang dewasa (Gravemeijer, 1994). Upaya ini dilakukan melalui penjelajahan berbagai situasi dan persoalan-persoalan "realistik". Realistik dalam hal ini dimaksudkan tidak mengacu pada realitas tetapi pada sesuatu yang dapat dibayangkan oleh siswa (Slettenhaar, 2000). Prinsip penemuan kembali dapat diinspirasi oleh prosedur-prosedur pemecahan informal, sedangkan proses penemuan kembali menggunakan konsep matematisasi.

Dalam pendekatan matematika realistik dikenal dua jenis matematisasi yang diformulasikan oleh Treffers (dalam Zainurie, 2007) yaitu matematisasi horizontal dan matematisasi vertikal. Contoh matematisasi horizontal adalah: pengidentifikasian, perumusan, pemvisualisasian masalah dalam cara-cara yang berbeda dan pentransformasian masalah dalam dunia real ke dalam masalah matematik. Matematika dalam tingkat ini disebut matematika informal.

Adapun contoh matematisasi vertikal adalah: representasi hubungan-hubungan dalam rumus, perbaikan dan penyesuaian model matematika, penggunaan model-model yang berbeda dan penggeneralisaian. Fruedenthal menganjurkan bahwa matematisasi adalah proses kunci dalam pendidikan matematika berdasarkan dua alasan.

Pertama, matematisasi bukan hanya merupakan suatu aktivitas utama dari para ahli matematika. Matematisasi dapat membuat murid menjadi tidak asing dengan penerapan/pendekatan matematika dalam menghadapi situasi hidup setiap hari (*everday life situation*), misalnya: aktivitas matematika mencari masalah yang perlu diselesaikan, dan ini menyangkut perilaku terhadap matematika, mengetahui kemungkinan serta keterbatasan penggunaan matematika.

Alasan kedua, yaitu matematisasi berkaitan dengan ide penemuan kembali *(reinvention).* Dalam matematika, formalisasi adalah tahap terakhir. Dan tahap ini jangan dijadikan sebagai tahap awal dalam mengajarkan matematika. Ini berarti bahwa pembelajaran matematika diorganisasikan sebagai suatu proses penemuan kembali secara terbimbing *(a process of guided reinvention)* di mana siswa dapat mengalami sampai pada suatu tingkat tertentu, dimana proses matematika ditemukan olehnya. (Nurjannah, 2000)

a. Prinsif-prinsif Pembelajaran Realistik

Menurut filosofi realistik, Treffers (1987) dan Bakker (2004) bahwa terdapat lima prinsip/ajaran *Realistic Mathematics Education* (RME) tentang belajar dan mengajar yang menjiwai setiap aktivitas pembelajaran matematika, yaitu:

a) Pendekatan eksplorasi atau penggunaan konteks-konteks yang berarti; suatu konteks yang berharga dan berarti, konkrit atau abstrak harus digali untuk mendukung para siswa dalam pengembangan gagasan intuitif yang dapat menjadi sebuah dasar untuk membangun kesadarn, khususnya dalam penggunaan bilangan bulat.

b) Penggunaan contoh dan symbol untuk kemajuan kemampuan matematika; suatu jenis soal, contoh, skema, diagram dan symbol dapat mendukung perkembangan kematematikaan secara berangsur-angsur dari intuitif, tidak formal menuju kearah konsep matematika formal.

c) Sumbangan dari para siswa, sehingga para siswa dapat membuat pembelajaran menjadi konstruktif menjadi produktif; artinya siswa memproduksi sendiri dan mengkonstruksi sendiri (yang mungkin berupa algoritma, rule atau aturan).

d) Interaktif; proses pembelajaran, khususnya pada bilangan bulat yang merupakan suatu pengajaran interaktif dimana pekerjaan individual digabung dengan hasil konsultasi para siswa, diskusi kelompok, diskusi kelas, presentasi dari seseorang, evaluasi dan penjelasan dari guru.

e) "*Interwinning*" (keterkaitan/keterjalinan) antar topik atau antar pokok bahasan. Ini penting untuk memikirkan sebuah urutan pembelajaran. Mengenai pembelajaran bilangan bulat, topik ini dikaitkan dengan topik-topik matematika yang lain, seperti pecahan, operasi hitung pada aljabar dan sebagainya.

Pendekatan pembelajaran dengan matematika realistik menempatkan murid dan guru dalam suatu posisi yang agak berbeda daripada pendekatan tradisional. Dalam matematika realistik, murid harus mengandalkan diri sendiri. Mereka tidak dapat setiap saat meminta pengesahan dari guru terhadap apa yang mereka (murid) lakukan, apakah itu mengenai prosedur yang sedang mereka kerjakan, ataupun jawaban yang mereka peroleh. Murid diharapkan untuk tidak bertanya pada guru mengenai prosedur standar untuk menyelesaikan soal yang mereka hadapi.

Dalam matematika realistik murid mempunyai kewajiban untuk menerangkan serta menjustifikasi penyelesaian mereka, di samping itu mereka harus berusaha untuk mengerti cara penyelesaian yang dilakukan oleh orang lain (temen mereka). Dengan sendirinya guru tidak dapat berfungsi sebagai sumber belajar lagi, melainkan berfungsi sebagai penuntun (fasilitator). Selain itu, siswa pun dapat menguasai konsep materi karena telah ia dapatkan sendiri.

Menurut Treffers dan Goffree (1985), (dalam De Lange 1996) bahwa masalah kontekstual dalam kurikulum realistik berguna untuk mengisi sejumlah fungsi, yaitu: pembentukan konsep, pembentukan model, dan keterterapan serta praktik dan latihan dari kemampuan spesifik dalam situasi terapan.

(1) Pembentukan konsep: siswa diperkenankan untuk masuk ke dalam matematika secara alamiah dan termotivasi.

(2) Pembentukan model: masalah-masalah kontekstual termasuk fondasi bagi siswa untuk belajar operasi, prosedur, notasi, aturan.

(3) Keterterapan: masalah konstektual menggunakan *reality* sebagai sumber dan domain untuk terapan.

(4) Praktik dan latihan dari kemampuan spesifik dalam situasi terapan.