BAB III

TRANSFORMASI MATRIKS DERET DIRICHLET HOLOMORFIK

A. Transformasi Matriks Mengawetkan Kekonvergenan

Pada bagian A ini pembahasan dibagi menjadi dua bagian, yang pertama membahas mengenai transformasi matriks takhingga yang mengawetkan kekonvergenan barisan di $\mathbb{R}$, yaitu transformasi matriks takhingga yang mentransformasikan suatu barisan bilangan real konvergen ke dalam suatu barisan bilangan real lain yang konvergen ke limit yang sama dengan limit barisan yang ditransformasikan. Kedua, membahas transformasi matriks takhingga yang mengawetkan kekonvergenan barisan di $\mathbb{C}$, yaitu transformasi matriks takhingga yang mentransformasikan suatu barisan bilangan kompleks konvergen ke dalam suatu barisan bilangan kompleks lain yang konvergen.

A.1 Transformasi Matriks Barisan Bilangan Real

Pada bagian ini dibahas sifat utama yang harus dipenuhi oleh transformasi matriks $T_1 = [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga kondisi berikut ini dipenuhi; misalkan $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ adalah barisan bilangan real yang konvergen ke limit $s \in \mathbb{R}$, transformasi T_1 mentransformasikan $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke dalam barisan bilangan real $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ yang didefinisikan sebagai berikut:

$$t_j = u_{j1}s_1 + u_{j2}s_2 + u_{j3}s_3 + \cdots + u_{jk}s_k + \cdots \text{ , } j = 1,2,3,\ldots.$$

Barisan $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ akan konvergen ke limit yang sama yakni ke limit $s \in \mathbb{R}$ jika T_1 memenuhi sifat-sifat sebagaimana dinyatakan dalam Teorema A.1.1 berikut ini.

Teorema A.1.1

Jika $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke limit $s \in \mathbb{R}$, ditulis $lim_{j\to\infty} s_j = s$ dan T_1 memenuhi kondisi berikut ini:

1) $lim_{j\to\infty} u_{jk} = 0$ untuk setiap *k* yang tetap; (3.1)

2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} = 1 \; dan \; u_{jk} \geq 0.$ (3.2)

Maka barisan $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke limit $s \in \mathbb{R}$, dan ditulis $lim_{j\to\infty} t_j = s$.

Bukti:

Asumsikan bahwa kondisi (3.1) dan (3.2) terpenuhi. Misalkan $lim_{j\to\infty} s_j = s$, ini berarti bahwa $\forall \varepsilon > 0$ terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > K_1$ berlaku $|s_j - s| < \frac{\varepsilon}{2}$. Karena barisan $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke limit s maka barisan $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ terbatas, oleh karenanya $\forall k > K_1$ berlaku

$$|s_k| = |s_k - s + s| \leq |s_k - s| + |s| < \frac{\varepsilon}{2} + |s|.$$

Misalkan $\frac{\varepsilon}{2} + |s| = M_1 > 0$. Jika $M := maks\{|s_1|, |s_2|, \dots, |s_{K_1}|, M_1\}$ maka $\forall k \in \mathbb{N}$ berlaku $|s_k| < M$. Oleh karenanya diperoleh

$$\frac{\varepsilon}{2} + |s| = M_1 \leq M \Leftrightarrow |s| \leq M - \frac{\varepsilon}{2} < M.$$

Sesuai kondisi (3.1), untuk $\varepsilon > 0$ yang diberikan diatas

terdapat $N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > N_1$ berlaku $|u_{j1}| < \frac{\varepsilon}{4K_1 M}$,

terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > N_2$ berlaku $|u_{j2}| < \frac{\varepsilon}{4K_1 M}$,

$$\vdots$$

terdapat $N_{K_1} \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > N_{K_1}$ berlaku $|u_{jK_1}| < \frac{\varepsilon}{4K_1 M}$.

Jika $K_2 = maks(N_1, N_2, \dots, N_{K_1})$ maka $\forall j > K_2$ berlaku

$$|u_{jk}| < \frac{\varepsilon}{4K_1 M}, \forall k = 1,2, \dots, K_1.$$

Selanjutnya, Jika $K = maks(K_1, K_2)$ berlaku $|u_{jk}| < \frac{\varepsilon}{4KM} \leq \frac{\varepsilon}{4K_2 M}$, yaitu

$$|u_{jk}| < \frac{\varepsilon}{4KM}, \forall k = 1,2, \dots, K.$$

Maka $\forall j > K$ berlaku

$$t_j - s = (u_{j1}s_1 + u_{j2}s_2 + u_{j3}s_3 + \cdots + u_{jk}s_k + \cdots) - s$$

$$= (u_{j1}s_1 + u_{j2}s_2 + u_{j3}s_3 + \cdots + u_{jk}s_k + \cdots) - (u_{j1} + u_{j2} + u_{j3} + \cdots)s$$

$$= u_{j1}(s_1 - s) + u_{j2}(s_2 - s) + u_{j3}(s_3 - s) + \cdots + u_{jk}(s_k - s) + \cdots$$

$$|t_j - s| = |u_{j1}(s_1 - s) + u_{j2}(s_2 - s) + \cdots + u_{jk}(s_k - s) + \cdots|$$

$$\leq |u_{j1}(s_1 - s)| + |u_{j2}(s_2 - s)| + \cdots + |u_{jk}(s_k - s)| + \cdots$$

$$= |u_{j1}(s_1 - s)| + \cdots + |u_{jK}(s_K - s)| + |u_{j(K+1)}(s_{(K+1)} - s)| + \cdots$$

$$\leq |u_{j1}|(|s_1| + |s|) + \cdots + |u_{jK}|(|s_K| + |s|) + |u_{j(K+1)}||(s_{(K+1)} - s)| + \cdots$$

$$< \frac{\varepsilon}{4KM}2M + \cdots + \frac{\varepsilon}{4KM}2M + \frac{\varepsilon}{2}u_{j(K+1)} + \frac{\varepsilon}{2}u_{j(K+2)} + \cdots$$

$$= K\left(\frac{\varepsilon}{4KM}2M\right) + \frac{\varepsilon}{2}(u_{j(K+1)} + u_{j(K+2)} + \cdots) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \left(\frac{\varepsilon}{2}.1\right) = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terbukti bahwa $lim_{j\to\infty} t_j = s = lim_{j\to\infty} s_j$. Ini berarti bahwa T_1 mengawetkan kekonvergenan. Lebih jauh, kekonvergenan barisan $\langle s_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ ke limit $s \in \mathbb{R}$ ternyata diawetkan oleh T_1, karena barisan $\langle t_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ juga konvergen ke limit $s \in \mathbb{R}$.

Secara khusus diberikan contoh transformasi matriks takhingga yang mentransformasikan suatu barisan bilangan real konvergen dengan limit m ke dalam suatu barisan bilangan real konvergen yang sama dengan limit m.

Contoh: Misalkan $\langle s_j\rangle_{j=1}^{\infty} = \langle m, m, m, \dots, m, \dots\rangle$ barisan bilangan real konstan dan matriks takhingga

$$[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \cdots & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} & \cdots \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & \frac{9}{64} & \cdots & \frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{k-1} & \cdots \\ \frac{1}{8} & \frac{7}{64} & \frac{49}{512} & \cdots & \frac{1}{8}\left(\frac{7}{8}\right)^{k-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{j} & \cdots & \cdots & \cdots & \left(\frac{1}{2}\right)^{j}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{j}\right)^{j-1} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

Jelas bahwa matriks $[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ memenuhi $lim_{j\to\infty} u_{jk} = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$, yaitu

untuk $k = 1$ berlaku $lim_{j\to\infty} u_{j1} = lim \langle \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \dots\rangle = 0$,

untuk $k = 2$ berlaku $lim_{j\to\infty} u_{j2} = lim \langle \frac{1}{4}, \frac{3}{16}, \frac{9}{64}, \dots\rangle = 0$,

untuk $k = 3$ berlaku $lim_{j\to\infty} u_{j3} = lim \langle \frac{1}{8}, \frac{7}{64}, \frac{49}{512}, \dots\rangle = 0$, dan $\forall k \in \mathbb{N}$ berlaku

$$lim_{j\to\infty} u_{jk} = lim_{j\to\infty} \left(\left(\frac{1}{2}\right)^j \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)^{k-1} \right) = 0.$$

Serta memenuhi $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} = 1 \; dan \; u_{jk} \geq 0, \forall j \in \mathbb{N}$ yaitu

untuk $j = 1, \sum_{k=1}^{\infty} u_{1k} = u_{11} + u_{12} + u_{13} + \cdots = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1,$

untuk $j = 2, \sum_{k=1}^{\infty} u_{2k} = u_{21} + u_{22} + u_{23} + \cdots = \frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \frac{9}{64} + \cdots = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}} = 1,$

dan untuk $\forall j \in \mathbb{N}$ berlaku

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} = u_{j1} + u_{j2} + u_{j3} + \cdots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{1 - \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^j\right)} = 1.$$

Selanjutnya diperoleh

$$t_1 = u_{11}s_1 + u_{12}s_2 + u_{13}s_3 + \cdots + u_{1k}s_k + \cdots$$

$$= \frac{1}{2}m + \frac{1}{4}m + \frac{1}{8}m + \cdots + \cdots = m\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots\right) == m\left(\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}\right) = m,$$

$$t_2 = u_{21}s_1 + u_{22}s_2 + u_{23}s_3 + \cdots + u_{2k}s_k + \cdots$$

$$= \frac{1}{4}m + \frac{3}{16}m + \frac{9}{64}m + \cdots + \cdots = m\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{16} + \cdots\right) = m\left(\frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{3}{4}}\right) = m,$$

$$t_3 = u_{31}s_1 + u_{32}s_2 + u_{33}s_3 + \cdots + u_{3k}s_k + \cdots$$

$$= \frac{1}{8}m + \frac{7}{64}m + \frac{49}{512}m + \cdots + \cdots = m\left(\frac{1}{8} + \frac{7}{64} + \cdots\right) = m\left(\frac{\frac{1}{8}}{1-\frac{7}{8}}\right) = m,$$

dan $\forall j \in \mathbb{N}$ berlaku

$$t_j = u_{j1}s_1 + u_{j2}s_2 + u_{j3}s_3 + \cdots$$

$$= \left(\tfrac{1}{2}\right)^j \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^j\right)^0 m + \left(\tfrac{1}{2}\right)^j \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^j\right)^1 m + \left(\tfrac{1}{2}\right)^j \left(1 - \left(\tfrac{1}{2}\right)^j\right)^2 m + \cdots$$

$$= m\left(\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^j}{1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^j\right)}\right) = m.$$

Akibatnya diperoleh barisan $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty} = \langle m, m, m, \ldots, m, \ldots \rangle$. Jelas bahwa matriks $[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ tersebut mentransformasikan barisan $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty} = \langle m, m, m, \ldots, m, \ldots \rangle$ ke dalam barisan $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty} = \langle m, m, m, \ldots, m, \ldots \rangle$ dan barisan $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ dan $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke $m \in \mathbb{R}$.

A.2 Transformasi Matriks Barisan Bilangan Kompleks

Pada bagian A.1 telah dibahas transformasi T_1 yang mentransformasikan suatu barisan bilangan real konvergen ke dalam suatu barisan bilangan real lain yang juga konvergen. Sifat-sifat utama yang harus dipenuhi oleh T_1 menyebabkan barisan-barisan tersebut konvergen ke nilai yang sama. Berikut ini akan dibahas perluasan konsep transformasi T_1 pada barisan bilangan kompleks.

Definisikan transformasi matriks $T_2 = [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ dimana untuk sebarang barisan bilangan kompleks $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ yang konvergen, ditransformasikan oleh T_2 ke dalam barisan bilangan kompleks baru $\langle w_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ yang didefinisikan dengan

$$w_j = u_{j1}z_1 + u_{j2}z_2 + u_{j3}z_3 + \cdots + u_{jk}z_k + \cdots, \; j = 1,2,3, \ldots,$$

yang juga merupakan barisan konvergen.

Transformasi T_2 ini berbeda dengan transformasi T_1. Pada transformasi T_2, kekonvergenan barisan bilangan kompleks $\langle z_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ ke limit $z \in \mathbb{C}$ tidak perlu mengakibatkan barisan bilangan kompleks $\langle w_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke limit $z \in \mathbb{C}$. Tetapi yang paling penting adalah bahwa T_2 mentransformasikan barisan konvergen $\langle z_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ ke dalam barisan konvergen $\langle w_j\rangle_{j=1}^{\infty}$, yang berarti bahwa limit barisan $\langle z_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ dan limit barisan $\langle w_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ tidak perlu sama.

Berikut ini adalah teorema yang membahas kondisi T_2 sedemikian sehingga mengawetkan kekonvergenan, yaitu T_2 mentransformasikan barisan $\langle z_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ yang konvergen ke limit $z \in \mathbb{C}$ ke dalam barisan konvergen $\langle w_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ yang konvergen ke limit $w \in \mathbb{C}$.

Teorema A.2.1

Misalkan barisan $\langle z_j\rangle_{j=1}^{\infty}$konvergen ke $z \in \mathbb{C}$. Jika T_2 memenuhi kondisi berikut ini:

1) $\lim_{j\to\infty} u_{jk} = u_k$ ada untuk setiap k yang tetap; (3.3)

2) $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} = \varphi_j$, $\sum_{k=1}^{\infty} |u_{jk}| = \tau_j$ (3.4)

dengan barisan $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_j, \ldots$ adalah barisan konvergen dan barisan $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_j, \ldots$ adalah barisan terbatas.

Maka barisan $\langle w_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke $w \in \mathbb{C}$.

Bukti:

Berdasarkan kondisi (3.4), karena barisan $\langle \tau_j \rangle_{j=1}^{\infty}$terbatas maka $\exists K > 0$ sedemikian sehingga $\forall j \in \mathbb{N}$ berlaku $|\tau_j| < K$. Ambil sebarang barisan $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ yang konvergen ke limit z, ditulis $lim_{j\to\infty} z_j = z$. Diberikan sebarang $\varepsilon > 0$ maka $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > N_1$ berlaku $|z_j - z| < \frac{\varepsilon}{6K}$. Karena barisan $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen maka barisan $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ terbatas, oleh karenanya $\forall j > N_1$ berlaku

$$|z_j| = |z_j - z + z| \leq |z_j - z| + |z| < \frac{\varepsilon}{6K} + |z|.$$

Misalkan $\frac{\varepsilon}{6K} + |z| = M_1 > 0$. Jika $M := maks\{|z_1|, |z_2|, \ldots, |z_{N_1}|, M_1\}$ maka $\forall j \in \mathbb{N}$ berlaku $|z_j| < M$. Oleh karenanya diperoleh $\frac{\varepsilon}{6K} + |z| = M_1 \leq M$ sehingga

$$|z| \leq M - \frac{\varepsilon}{6K} < M.$$

Selanjutnya, berdasarkan kondisi (3.4) juga, misalkan bahwa $lim_{j\to\infty} \varphi_j = \varphi$, ini berarti bahwa untuk $\varepsilon > 0$ yang telah diberikan sebelumnya terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > N_2$ berlaku $|\varphi_j - \varphi| < \frac{\varepsilon}{3M}$. Dikarenakan kondisi (3.3), maka untuk $\varepsilon > 0$ yang telah diberikan sebelumnya,

terdapat $K_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > K_1$ berlaku $|u_{j1} - u_1| < \frac{\varepsilon}{6MK}$,

terdapat $K_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > K_2$ berlaku $|u_{j2} - u_2| < \frac{\varepsilon}{6MK}$,

$\vdots$

terdapat $K_K \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall j > K_K$ berlaku $|u_{jK} - u_K| < \frac{\varepsilon}{6MK}$.

Misalkan $N_3 = maks(K_1, K_2, \dots, K_K)$, maka $\forall j > N_3$ berlaku

$$|u_{jk} - u_k| < \frac{\varepsilon}{6MK}, \forall k = 1,2, \dots, K.$$

Asumsikan bahwa deret

$$\alpha = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_j + \cdots$$

dan

$$\beta = u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + \cdots + u_j z_j + \cdots$$

konvergen mutlak.

Bukti Asumsi:

Misalkan bahwa $\alpha = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_j + \cdots$. Perhatikan bahwa jika $lim_{j\to\infty} u_{jk} = u_k$ maka $lim_{j\to\infty} |u_{jk}| = |u_k|$ (lihat Teorema 2.5).

Selanjutnya, misalkan σ_K adalah jumlah parsial dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$. Diperoleh bahwa

$$\sigma_K = \sum_{k=1}^{K} |u_k| \le \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| = |u_1| + |u_2| + |u_3| + \cdots + |u_j| + \cdots$$

$$= lim_{j\to\infty} |u_{j1}| + lim_{j\to\infty} |u_{j2}| + lim_{j\to\infty} |u_{j3}| + \cdots + lim_{j\to\infty} |u_{jk}| + \cdots$$

$$= lim_{j\to\infty} (|u_{j1}| + |u_{j2}| + |u_{j3}| + \cdots + |u_{jk}| + \cdots)$$

$$= \lim_{j\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |u_{jk}| = \lim_{j\to\infty} \tau_j.$$

Diketahui bahwa $\forall j \in \mathbb{N}$ berlaku $|\tau_j| < K$. Akibatnya $\sigma_K \le \lim_{j\to\infty} \tau_j < \lim_{j\to\infty} K = K$.

Berdasarkan Teorema 2.8 diperoleh bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|$ konvergen atau deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ konvergen mutlak.

Lebih lanjut, misalkan $\beta = u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + \cdots + u_j z_j + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z_k$, dan S_K adalah jumlah parsial dari deret $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k z_k|$. Diketahui bahwa $\forall j \in \mathbb{N}$ berlaku $|z_j| < M$.

Akibatnya,

$$S_K = \sum_{k=1}^{K} |u_k z_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |u_k z_k| < M \sum_{k=1}^{\infty} |u_k| < MK,$$

dan berdasarkan Teorema 2.8 diperoleh bahwa deret $\sum_{k=1}^{\infty} |u_k z_k|$ konvergen atau deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_k z_k$ konvergen mutlak.

Terbukti bahwa

$$\alpha = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_j + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k$$

dan

$$\beta = u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3 + \cdots + u_j z_j + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k z_k$$

konvergen mutlak.

Selanjutnya didefinisikan

$$w = (\varphi - \alpha) z + \beta$$

dan

$$w_j = \left(\varphi_j - \sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) z + \sum_{k=1}^{\infty} u_k z_k + \sum_{k=1}^{\infty} (u_{jk} - u_k)(z_k - z).$$

Jika $N = maks(N_1, N_2, N_3)$, maka $\forall j > N$ berlaku

$$|u_{jk} - u_k| < \frac{\varepsilon}{6MN}, \forall k = 1, 2, \ldots N.$$

Akibatnya diperoleh

$$w_j - w = \left(\varphi_j - \sum_{k=1}^{\infty} u_k\right)z + \sum_{k=1}^{\infty} u_k z_k + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{jk} - u_k\right)(z_k - z)$$

$$-\left((\varphi - \alpha)z + \beta\right).$$

$$\left|w_j - w\right| = \left|\varphi_j z - \varphi z + \sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{jk} - u_k\right)(z_k - z)\right|$$

$$\leq \left|\varphi_j - \varphi\right||z| + \left|\sum_{k=1}^{\infty}\left(u_{jk} - u_k\right)(z_k - z)\right|$$

$$\leq \left|\varphi_j - \varphi\right||z| + \sum_{k=1}^{\infty}\left|\left(u_{jk} - u_k\right)(z_k - z)\right|$$

$$< \left|\varphi_j - \varphi\right|M + \sum_{k=1}^{N}\left|\left(u_{jk} - u_k\right)(z_k - z)\right| + \sum_{k=N+1}^{\infty}\left|\left(u_{jk} - u_k\right)(z_k - z)\right|$$

$$< \left|\varphi_j - \varphi\right|M + 2M\sum_{k=1}^{N}\left|u_{jk} - u_k\right| + 2K\frac{\varepsilon}{6K}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3M}M + 2M\sum_{k=1}^{N}\left|u_{jk} - u_k\right| + \frac{\varepsilon}{3}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + 2MN\frac{\varepsilon}{6MN} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang, maka terbukti bahwa barisan $\langle w_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke limit $w \in \mathbb{C}$. Jelas bahwa T_2 mentransformasikan barisan $\langle z_j\rangle_{j=1}^{\infty}$yang konvergen ke limit $z \in \mathbb{C}$ ke dalam barisan $\langle w_j\rangle_{j=1}^{\infty}$ yang konvergen ke limit $w \in \mathbb{C}$. Ini berarti bahwa transformasi matriks takhingga T_2 mengawetkan kekonvergenan.

B. Transformasi Matriks Deret Dirichlet Holomorfik

Sebelum membahas transformasi matriks deret Dirichlet holomorfik, terlebih dahulu diperkenalkan deret Dirichlet holomorfik. Sebagaimana telah diketahui, fungsi-fungsi holomorfik pada suatu domain di $\mathbb{C}$ mempunyai representasi deret kuasa pada daerah kekonvergenannya, selaras dengan hal tersebut fungsi-fungsi holomorfik pada suatu domain di $\mathbb{C}^n$ juga mempunyai representasi deret, yang selanjutnya deret tersebut disebut deret Dirichlet holomorfik.

Untuk menunjang pembahasan mengenai deret Dirichlet holomorfik tersebut terlebih dahulu diperkenalkan notasi-notasi dasar yang akan digunakan; misalkan Ω suatu domain konveks terbatas di $\mathbb{C}^n$, $O(\Omega)$ adalah notasi suatu ruang dari fungsi-fungsi holomorfik di Ω yang masing-masing mempunyai representasi deret di Ω, dengan sifat bahwa setiap barisan di Ω konvergen seragam pada subset kompak dari Ω yaitu pada $K \subset \Omega$, K kompak.

Berikut ini akan dibahas sifat-sifat dari deret yang merepresentasikan suatu fungsi holomorfik di Ω. Sebelumnya didefinisikan modulus dari $z \in \mathbb{C}^n$ dan hasil kali $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ sebagai berikut.

Definisi 3.1: Modulus dan Hasil Kali $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$ (Lê Hai Khôi, 1999:196)

Jika $z, \zeta \in \mathbb{C}^n$, maka modulus z ditulis

$$|z| = (z_1.\overline{z_1} + z_2.\overline{z_2} + \cdots + z_n.\overline{z_n})^{1/2}, \tag{3.5}$$

dan hasil kali z, ζ ditulis

$$\langle z, \zeta \rangle = z_1\zeta_1 + z_2\zeta_2 + \cdots + z_n\zeta_n. \tag{3.6}$$

Selanjutnya didefinisikan suatu *supporting function* yaitu fungsi:

$$H_\Omega : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

dengan Ω suatu domain konveks di $\mathbb{C}^n$, yang didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.2: ***Supporting Function*** **(LÊ HAI KHÔI, 1999:196)**

$$H_\Omega(\zeta) = Sup_{z\in\Omega} Re\langle z,\zeta\rangle, \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{3.7}$$

Karena Ω konveks, untuk sebarang $t \in (0,1)$, kita notasikan

$$\Omega^t = t\Omega, 0 < t < 1, \tag{3.8}$$

jelas bahwa $\Omega^t \subset \Omega$ dan

$$H_{\Omega^t}(\zeta) = tH_\Omega(\zeta), \quad \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{3.9}$$

Tanpa mengurangi keumuman, asumsikan bahwa $0 \in \Omega$, jelas bahwa

$$0 < \alpha = Inf_{|\zeta|=1} H_\Omega(\zeta) \le \beta = Sup_{|\zeta|=1} H_\Omega(\zeta) < \infty \tag{3.10}$$

dan karenanya

$$\alpha|\zeta| \le H_\Omega(\zeta) \le \beta|\zeta|, \forall \zeta \in \mathbb{C}^n. \tag{3.11}$$

Selanjutnya, misalkan $\langle\lambda^k\rangle_{k=1}^\infty$, $\lambda^k = (\lambda_1^k, \lambda_2^k, \lambda_3^k, \dots, \lambda_n^k)$ $\forall k \in \mathbb{N}$, suatu barisan vektor kompleks di $\mathbb{C}^n$. Pandang deret Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{\langle\lambda^k, z\rangle}, \quad z \in \Omega \tag{3.12}$$

dengan $\langle c_k\rangle_{k=1}^\infty$ suatu barisan di $\mathbb{C}$, dan untuk selanjutnya $\langle c_k\rangle_{k=1}^\infty$ disebut koefisien deret Dirichlet. Deret (3.12) tersebut merupakan representasi dari suatu fungsi holomorfik pada $O(\Omega)$ jika barisan $\langle c_k\rangle_{k=1}^\infty$ memenuhi syarat-syarat yang ditentukan pada Teorema 3.3 berikut ini.

Teorema 3.3

Jika deret Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{(\lambda^k, z)}, z \in \Omega$ konvergen pada $O(\Omega)$ dan untuk $k \to \infty, |\lambda^k| \to \infty$ maka

$$\lim_{k\to\infty} Sup \frac{\log|c_k| + H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|} \leq 0. \qquad (3.13)$$

Sebaliknya, jika koefisien deret Dirichlet $\langle c_k \rangle_{k=1}^{\infty}$ memenuhi kondisi (3.13) dan memenuhi kondisi berikut ini, yaitu

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log k}{|\lambda^k|} = 0 \qquad (3.14)$$

maka deret Dirichlet $\sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{(\lambda^k, z)}$ konvergen mutlak pada $O(\Omega)$.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misalkan bahwa deret (3.12) konvergen pada $O(\Omega)$. Ini berarti $\lim_{k\to\infty} c_k e^{(\lambda^k, z)} = 0$ dan berakibat bahwa barisan $\langle c_k e^{(\lambda^k, z)} \rangle_{k=1}^{\infty}$ terbatas. Oleh karenanya untuk sebarang $t \in (0,1)$ terdapat konstanta positif $A < \infty$ sedemikian sehingga

$$sup\left\{\left|c_k e^{(\lambda^k, z)}\right| : z \in \Omega^t, k \geq 1\right\} \leq A \qquad (3.15)$$

$\Leftrightarrow |c_k| sup\left\{\left|e^{(\lambda^k, z)}\right| : z \in \Omega^t, k \geq 1\right\} \leq A$

$\Leftrightarrow |c_k| sup\left\{e^{Re(\lambda^k, z)} : z \in \Omega^t, k \geq 1\right\} \leq A$

$\Leftrightarrow |c_k| e^{H_{\Omega^t}(\lambda^k)} \leq A, \forall k \geq 1.$

dan berdasarkan (3.9) ekuivalen dengan

$$|c_k| e^{tH_\Omega(\lambda^k)} \leq A, \forall k \geq 1. \qquad (3.16)$$

Dengan mengkombinasikan pertidaksamaan (3.16) dan (3.11) diperoleh

$$\frac{\log|c_k| + H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|} \leq \frac{\log A}{|\lambda^k|} + \frac{H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|} - \left(\frac{tH_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|}\right)$$

$$= \frac{\log A}{|\lambda^k|} + (1-t)\left(\frac{H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|}\right)$$

$$\leq \frac{\log A}{|\lambda^k|} + (1-t)\beta.$$

Akibatnya,

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Sup}\, \frac{\log|c_k| + H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|} \leq (1-t)\beta$$

dengan $t \to 1$, diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} \mathrm{Sup}\, \frac{\log|c_k| + H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|} \leq 0.$$

$(\Leftarrow)$ Misalkan berlaku $\lim_{k\to\infty} \mathrm{Sup}\, \frac{\log|c_k| + H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|} \leq 0$

dan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\log k}{|\lambda^k|} = 0.$$

Ambil sebarang $K \subseteq \Omega$ kompak. Jelas bahwa $K \subseteq \Omega^t$ untuk suatu $t \in (0,1)$.

Akan ditunjukkan bahwa

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, e^{tH_\Omega(\lambda^k)} < \infty.$$

Berdasarkan (3.13), diberikan $0 < \varepsilon < (1-t)\alpha$, $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall k > N_1$ berlaku

$$\left|\frac{\log|c_k| + H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|}\right| < \varepsilon$$

sehingga diperoleh

$$|c_k| e^{H_\Omega(\lambda^k)} < e^{\varepsilon|\lambda^k|}$$

Karenanya, $\forall k > N_1$ berlaku

$$\begin{aligned} |c_k| e^{H_{\Omega^t}(\lambda^k)} &= |c_k| e^{tH_\Omega(\lambda^k)} \\ &< \frac{e^{tH_\Omega(\lambda^k)} e^{\varepsilon|\lambda^k|}}{e^{H_\Omega(\lambda^k)}} \\ &= e^{(t-1)\left(H_\Omega(\lambda^k)\right)} e^{\varepsilon|\lambda^k|} \\ &< e^{(t-1)\alpha|\lambda^k| + \varepsilon|\lambda^k|} \end{aligned}$$

dan berdasarkan (3.14) $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\forall k > N_2$ berlaku

$$\left|\frac{\log k}{|\lambda^k|}\right| < \frac{1}{2}\big((1-t)\alpha - \varepsilon\big)$$

$\Leftrightarrow \log k < \frac{1}{2}\Big(\big((1-t)\alpha\big) - \varepsilon\Big)|\lambda^k|$

$\Leftrightarrow 2\log k < \big((1-t)\alpha - \varepsilon\big)|\lambda^k|$

$\Leftrightarrow -2\log k > -\big((1-t)\alpha - \varepsilon\big)|\lambda^k|$

$\Leftrightarrow -2\log k > \big((t-1)\alpha + \varepsilon\big)|\lambda^k|$

$\Leftrightarrow e^{(t-1)\alpha|\lambda^k| + \varepsilon|\lambda^k|} < e^{\log k^{-2}} = \frac{1}{k^2}.$

Karenanya, $\forall k > max(N_1, N_2)$ berlaku

$$|c_k|e^{tH_\Omega(\lambda^k)} < \frac{1}{k^2}$$

dan berdasarkan Teorema 2.9 dan Teorema 2.10 diperoleh

$$\sum_{k=1}^{\infty} |c_k|\, e^{tH_\Omega(\lambda^k)} < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < \infty. \qquad (3.17)$$

Terbukti bahwa deret (3.12) konvergen mutlak pada $O(\Omega)$.

Akibat 3.4

Jika kondisi (3.14) terpenuhi, maka deret (3.12) konvergen pada $O(\Omega)$ jika dan hanya jika ia konvergen mutlak pada $O(\Omega)$.

Selanjutnya, akan diperkenalkan notasi yang juga akan dipergunakan pada tulisan ini, Λ_Ω adalah notasi himpunan barisan $\langle c_k \rangle$ yang memenuhi kondisi (3.13) dan berdasarkan Köthe (LÊ HAI KHÔI, 1995:89) biasa disebut ruang barisan. Terdapat beberapa sifat dari ruang ini yang akan digunakan pada pembahasan selanjutnya, yaitu sebagai berikut:

Definisi 3.5 (LÊ HAI KHÔI, 1999:197)

$$\Lambda_\Omega = \left\{ c = \langle c_k \rangle : \langle c_k \rangle \text{ memenuhi } \lim_{k\to\infty} Sup\ \frac{\log|c_k| + H_\Omega(\lambda^k)}{|\lambda^k|} \leq 0 \right\}, \qquad (3.18)$$

Definisi 3.6 (LÊ HAI KHÔI, 1999:198)

$\Lambda_{\Omega}^{\alpha}$ adalah notasi dual Köthe dari Λ_{Ω}, yaitu

$$\Lambda_{\Omega}^{\alpha} = \left\{ \langle u_k \rangle : \sum_{k=1}^{\infty} c_k u_k \; konvergen \; mutlak \; \forall \langle c_k \rangle \in \Lambda_{\Omega} \right\}. \tag{3.19}$$

Lemma 3.7 (LÊ HAI KHÔI, 1999:198)

Köthe dual dari Λ_{Ω} dapat didefinisikan sebagai berikut:

$$\Lambda_{\Omega}^{\alpha} = \left\{ \langle d_k \rangle : \lim_{k\to\infty} \sup \frac{\log |d_k|}{H_{\Omega}(\lambda^k)} < 1 \right\}. \tag{3.20}$$

Lemma 3.8 (LÊ HAI KHÔI, 1999:198)

Misalkan $\langle a_k \rangle$ suatu barisan bilangan real. Misalkan bahwa

$$\lim_{k\to\infty} \sup \left\{ a_k + \frac{Re\langle \lambda^k, z \rangle}{H_{\Omega}(\lambda^k)} \right\} < A < +\infty, \tag{3.21}$$

maka $\lim_{k\to\infty} \sup a_k \leq A - 1$.

Pandang deret Dirichlet

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle}, \quad z \in \Omega \; dan \; \langle c_k \rangle \in \Lambda_{\Omega}$$

dan berdasarkan Teorema 3.3 jumlah deret Dirichlet diatas adalah suatu fungsi holomorfik di Ω, dan ditulis

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle}, \quad z \in \Omega \; dan \; \langle c_k \rangle \in \Lambda_{\Omega} \tag{3.22}$$

dengan $f(z)$ adalah fungsi holomorfik di Ω.

Selanjutnya, dibahas sifat utama yang harus dipenuhi oleh transformasi matriks $T_3 = [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga kondisi berikut ini dipenuhi; misalkan $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{\langle \lambda^k, z\rangle},\ z \in \Omega\ dan\ \langle c_k\rangle \in \Lambda_\Omega$ adalah deret Dirichlet holomorfik yang merepresentasikan fungsi holomorfik di Ω, transformasi T_3 mentransformasikan $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k\, e^{\langle \lambda^k, z\rangle},\ z \in \Omega\ dan\ \langle c_k\rangle \in \Lambda_\Omega$ ke dalam barisan fungsi holomorfik $\langle f_j(z)\rangle_{j=1}^{\infty}$ yang diberikan oleh

$$f_j(z) := \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk}\, c_k\, e^{\langle \lambda^k, z\rangle}, \tag{3.23}$$

Barisan $\langle f_j(z)\rangle_{j=1}^{\infty}$ akan konvergen seragam pada $K \subset \Omega$, K kompak, dan $\forall j \in \mathbb{N}$ deret Dirichlet holomorfik $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k\, e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$ juga konvergen pada Ω jika T_3 memenuhi sifat-sifat sebagaimana dinyatakan dalam Teorema 3.9.

Sebelumnya dinotasikan terlebih dahulu $\Lambda_\Omega(u)$ suatu koleksi semua matriks $[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ yang mempunyai sifat bahwa jika barisan $\langle c_k\rangle \in \Lambda_\Omega$, suatu barisan fungsi $\langle f_j(z)\rangle_{j=1}^{\infty}$ yang diberikan oleh

$$f_j(z) := \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k\, e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$$

konvergen seragam pada $K \subset \Omega$, K kompak, dan $\forall j \in \mathbb{N}$ deret Dirichlet holomorfik $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k\, e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$ juga konvergen pada Ω.

Pada teorema berikut dibahas kondisi untuk matriks yang diberikan $T_3 = [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ sedemikian sehingga termuat pada kelas $\Lambda_\Omega(u)$.

Teorema 3.9

Jika kondisi berikut ini terpenuhi:

$$\lim_{j\to\infty} u_{jk} = u_k \text{ ada untuk } k = 1,2,\ldots \qquad (3.24)$$

dan

$$\lim_{k\to\infty} Sup\left(sup_{j\geq 1}\frac{log|u_{jk}|}{H_\Omega(\lambda^k)}\right) \leq 0 \qquad (3.25)$$

maka matriks $T_3 = [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ termuat pada $\Lambda_\Omega(u)$.

Bukti:

Asumsikan bahwa kondisi (3.24) dan (3.25) terpenuhi. Misalkan $\langle c_k\rangle \in \Lambda_\Omega$. Ambil sebarang subset kompak K di Ω, maka diperoleh $K \subset s\Omega$ untuk suatu $s \in (0,1)$. Sesuai kondisi (3.24), barisan $\langle u_{jk}\rangle_{j=1}^{\infty}$konvergen ke u_k untuk $k = 1,2,\ldots$. Akibatnya, $\forall k \in \mathbb{N}$ barisan $\langle u_{jk}\rangle_{j=1}^{\infty}$terbatas dan karenanya terdapat $0 < M < \infty$ sedemikian sehingga berlaku $|u_{jk}| \leq M, \forall k \geq 1$ dan $log|u_{jk}| \leq log\, M < \infty, \forall k \geq 1$.

Perhatikan bahwa

$$log|u_{jk}| \leq \varphi_k = sup_{j\geq 1}\, log|u_{jk}| < \infty, \forall k \geq 1.$$

Karenanya, $|u_{jk}| \leq e^{\varphi_k}, \forall k \geq 1, \forall j \geq 1$.

Lebih jauh, berdasarkan kondisi (3.25), untuk $\varepsilon = \frac{(1-s)}{2} > 0$ terdapat N(s) $\in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\frac{log|u_{jk}|}{H_\Omega(\lambda^k)} \leq \varepsilon, \forall k \geq N(s), \forall j \geq 1$$

atau ekuivalen dengan

$$\left|u_{jk}\right| \leq e^{sH_{\Omega}(\lambda^k)}, \forall k \geq N(s), \forall j \geq 1. \qquad (3.26)$$

Maka $\forall j \geq 1$ diperoleh,

$$Sup_{z\in K}\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k \, e^{(\lambda^k, z)}\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|u_{jk} c_k\right| sup_{z\in s\Omega}\left|e^{(\lambda^k, z)}\right|$$

$$= \sum_{k=1}^{N(s)}\left|u_{jk} c_k\right| e^{sH_{\Omega}(\lambda^k)} + \sum_{k=N(s)+1}^{\infty}\left|u_{jk} c_k\right| e^{sH_{\Omega}(\lambda^k)}$$

$$\leq \sum_{k=1}^{N(s)}\left|c_k\right| e^{\varphi_k + sH_{\Omega}(\lambda^k)} + \sum_{k=N(s)+1}^{\infty}\left|c_k\right| e^{(\varepsilon+s)H_{\Omega}(\lambda^k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N(s)}\left|c_k\right| e^{\varphi_k + sH_{\Omega}(\lambda^k)} + \sum_{k=N(s)+1}^{\infty}\left|c_k\right| e^{\left(\frac{1+s}{2}\right)H_{\Omega}(\lambda^k)}$$

dan berdasarkan kondisi (3.17) berlaku

$$Sup_{z\in K}\left|\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k \, e^{(\lambda^k, z)}\right| \leq \sum_{k=1}^{N(s)}\left|c_k\right| e^{\varphi_k + sH_{\Omega}(\lambda^k)} + \sum_{k=N(s)+1}^{\infty}\left|c_k\right| e^{\left(\frac{1+s}{2}\right)H_{\Omega}(\lambda^k)} < +\infty$$

Karenanya, setiap deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k \, e^{(\lambda^k, z)}$, $j = 1,2,\ldots$ konvergen mutlak di ruang $O(\Omega)$, dan karenanya merepresentasikan fungsi holomorfik $f_j(z)$ di Ω.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa barisan f_j konvergen seragam pada K. Misalkan diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang, pilih $N_1 \geq N(s) \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga berlaku

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\left|c_k\right| e^{(\varepsilon+s)H_{\Omega}(\lambda^k)} < \frac{\varepsilon}{4}. \qquad (3.27)$$

Notasikan

$$C(N_1) := \sum_{k=1}^{N_1}\left|c_k\right| e^{sH_{\Omega}(\lambda^k)}. \qquad (3.28)$$

Pertama, pandang N_1 kolom dari matriks $T_3 = \left[u_{jk}\right]_{j,k=1}^{\infty}$. Menurut kondisi (3.24) diperoleh bahwa terdapat $N_2 \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\left|u_{pk} - u_{qk}\right| < \frac{\varepsilon}{2C(N_1)}, \qquad \forall k = 1,2,\dots,N_1, \qquad \forall p,q > N_2 \qquad (3.29)$$

maka $\forall p,q > N_2$, diperoleh

$$Sup_{z\in K}\left|f_p(z) - f_q(z)\right| \leq \sum_{k=1}^{\infty}\left|(u_{pk} - u_{qk})c_k\right| e^{sH_\Omega(\lambda^k)}$$

$$= \sum_{k=1}^{N_1}\left|(u_{pk} - u_{qk})c_k\right| e^{sH_\Omega(\lambda^k)} + \sum_{k=N_1+1}^{\infty}\left|(u_{pk} - u_{qk})c_k\right| e^{sH_\Omega(\lambda^k)}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2C(N_1)}\sum_{k=1}^{N_1}|c_k|\, e^{sH_\Omega(\lambda^k)} + \sum_{k=N_1+1}^{\infty}\left(\left|u_{pk}\right| + \left|u_{qk}\right|\right)|c_k|e^{sH_\Omega(\lambda^k)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2C(N_1)}C(N_1) + \sum_{k=N_1+1}^{\infty}\left(\left|u_{pk}\right| + \left|u_{qk}\right|\right)|c_k|e^{sH_\Omega(\lambda^k)}$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=N_1+1}^{\infty}\left(\left|u_{pk}\right| + \left|u_{qk}\right|\right)|c_k|e^{sH_\Omega(\lambda^k)}. \qquad (3.30)$$

Dengan memfokuskan pada deret(3.30), dan berdasarkan (3.26) serta (3.27) diperoleh bahwa

$$\sum_{k=N_1+1}^{\infty}\left(\left|u_{pk}\right| + \left|u_{qk}\right|\right)|c_k|e^{sH_\Omega(\lambda^k)} \leq 2\sum_{k=N_1+1}^{\infty}|c_k|e^{(s+s)H_\Omega(\lambda^k)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Akibatnya, diperoleh

$$Sup_{z\in K}\left|f_p(z) - f_q(z)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Terbukti bahwa f_j konvergen seragam pada K.

Akibat dari Teorema 3.9 tersebut diperoleh kaitan antara T_3 dengan kondisi (3.24), yaitu $lim_{j\to\infty} u_{jk} = u_k$ *ada untuk* $k = 1,2,\dots,$ dan kondisi berikut $lim_{k\to\infty}(\frac{log|u_{jk}|}{H_\Omega(\lambda^k)}) \leq 0,\ \forall j = 1,2,\dots$. Pada teorema berikut ini disajikan bagaimana korespondensi diantara kondisi-kondisi tersebut.

Akibat 3.10

Jika T_3 termuat pada $\Lambda_\Omega(u)$, maka kondisi (3.24) dan kondisi berikut ini

$$\lim_{k\to\infty}(\frac{log|u_{jk}|}{H_\Omega(\lambda^k)}) \leq 0, \qquad \forall j = 1,2,\dots \tag{3.31}$$

haruslah terpenuhi.

Teorema ini adalah akibat dari dua hasil yang diberikan berikutnya. Misalkan, bagian pertama dari teorema ini adalah Preposisi 3.11, dan bagian yang kedua adalah Preposisi 3.12 dengan mengaplikasikan $x_k = u_{jk},\ j = 1,2,\dots$.

Preposisi 3.11

Misalkan bahwa untuk setiap "vektor satuan" $a^{(m)}, m = 1,2,\dots$ di Ω dengan

$$a_k^{(m)} = \begin{cases} 1, & jika\ k = m \\ 0, & yang\ lainnya \end{cases}.$$

Jika barisan $\langle f_j^{(m)}(z)\rangle_{j=1}^{\infty}$ yang didefinisikan oleh

$$f_j^{(m)}(z) := \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} a_k^{(m)}\, e^{\langle\lambda^k, z\rangle}, \qquad j = 1,2,\dots \tag{3.32}$$

konvergen di titik $z = 0$.

Maka kondisi (3.24) terpenuhi.

Bukti:

Jelas bahwa, untuk setiap “vektor satuan” $a^{(m)}$ di ruang Λ_{Ω}, barisan (3.32) well defined (terdefinisi dengan baik). Lebih jauh, berdasarkan kekonvergenan barisan $\langle f_j^{(m)}(0)\rangle_{j=1}^{\infty}$, diperoleh

$$f_j^{(m)}(0) := u_{jm}$$

yang mana dalam kasus ini mempunyai bentuk $[u_{jm}]_{j=1}^{\infty}$. Selanjutnya bahwa $lim_{j\to\infty} u_{jm} = u_m, \;\; m \in \mathbb{N}$ exist (ada). Karenanya kondisi (3.24) terpenuhi.

Preposisi 3.12

Misalkan x_k barisan bilangan kompleks. Misalkan pula bahwa jika $\langle c_k \rangle \in \Lambda_{\Omega}$ dan deret $\sum_{k=1}^{\infty} x_k c_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$ konvergen pada Ω, maka

$$\lim_{k\to\infty} Sup \frac{log|x_k|}{H_{\Omega}(\lambda^k)} \leq 0.$$

Bukti:

Berdasarkan asumsi Preposisi 3.12, diperoleh bahwa

$$\langle x_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle} \rangle_{k=1}^{\infty} \in \Lambda_{\Omega}^{\alpha}, \qquad \forall z \in \Omega, \qquad \forall j \geq 1.$$

Berdasarkan Lemma 3.7 diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} Sup \frac{log|x_k| + Re\langle \lambda^k, z\rangle}{H_{\Omega}(\lambda^k)} < 1, \;\; \forall z \in \Omega,$$

dan sesuai dengan kondisi pada Lemma 3.8, diperoleh

$$\lim_{k\to\infty} Sup \frac{log|x_k|}{H_{\Omega}(\lambda^k)} \leq 0.$$

Terbukti bahwa jika T_3 termuat pada $\Lambda_\Omega(u)$, maka kondisi

$$\lim_{j\to\infty} u_{jk} = u_k \text{ ada untuk } k = 1,2,\ldots$$

dan kondisi berikut ini

$$\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\log|u_{jk}|}{H_\Omega(\lambda^k)}\right) \leq 0,\ \forall j = 1,2,\ldots$$

terpenuhi.