BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Salah satu konsep yang paling fundamental di dalam kajian analisis real selain konsep limit adalah konsep tentang transformasi. Dalam kajian analisis real banyak dipelajari tentang suatu transformasi dari suatu subhimpunan bilangan real ke dalam subhimpunan bilangan real yang lain.

Kata-kata fungsi, pemetaan, dan transformasi adalah tiga kata yang sinonim, oleh karenanya pada beberapa materi tertentu istilah transformasi telah dikenal dari analisis real atau mata kuliah lainnya. Di dalam konteks tulisan ini, transformasi dipelajari lebih umum daripada yang dibicarakan di dalam analisis real dan karena alasan itulah maka istilah transformasi akan digunakan daripada fungsi atau pemetaan.

Dalam setiap kasus, transformasi dipandang memiliki sifat khusus, tergantung pada permasalahannya. Dalam kajian analisis real, transformasi kontinu berperan dalam mengawetkan atau memelihara kekonvergenan barisan bilangan real. Kunci dari konsep analisis adalah ide tentang limit, dan transformasi kontinu memainkan peranan penting dari konsep limit tersebut. Misalkan barisan bilangan real $\langle a_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen dengan $lim_{j\to\infty} a_j = a \in \mathbb{R}$. Jika $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ adalah transformasi kontinu, maka barisan bilangan real $f(a_j)$ konvergen ke $f(a) \in \mathbb{R}$ dan $lim_{j\to\infty} f(a_j) = f(lim_{j\to\infty} a_j) = f(a) \in \mathbb{R}$.

Secara khusus tulisan ini akan membahas transformasi dari suatu ruang ke dalam ruang yang lain, yang memelihara atau mengawetkan sifat-sifat yang dimiliki oleh objek-objek yang ditransformasikan. Transformasi yang dibahas merupakan suatu matriks takhingga. Sebagaimana telah diketahui, transformasi matriks takhingga adalah salah satu transformasi yang biasa digunakan untuk mentransformasikan suatu barisan ke dalam suatu barisan lain atau mentransformasikan suatu deret ke dalam suatu barisan deret.

Pada tulisan ini akan dibahas beberapa jenis transformasi matriks takhingga, yaitu transformasi matriks takhingga yang mentransformasikan suatu barisan bilangan real ke dalam suatu barisan bilangan real yang lain, suatu barisan bilangan kompleks ke dalam suatu barisan bilangan kompleks yang lain, dan deret Dirichlet holomorfik yang merepresentasikan fungsi holomorfik pada domain konveks terbatas $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ (lihat bab II D) ke dalam suatu barisan deret Dirichlet holomorfik yang didefinisikan sebagai barisan fungsi holomorfik pada $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

Selanjutnya didefinisikan matriks takhingga $[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$, dimana

$$[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1k} & \cdots \\ u_{21} & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2k} & \cdots \\ u_{31} & u_{32} & u_{33} & \cdots & u_{3k} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ u_{j1} & u_{j2} & u_{j3} & \cdots & u_{jk} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}.$$

Suatu transformasi matriks takhingga

$$T \coloneqq [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty} : X \to Y$$

disebut mengawetkan kekonvergenan jika $T \coloneqq [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ mentransformasikan sebarang barisan konvergen (atau deret konvergen) yang merupakan elemen di X

ke dalam suatu barisan konvergen (atau barisan deret konvergen yang konvergen) yang merupakan elemen di Y. Tidak semua barisan yang konvergen dapat ditransformasikan ke dalam suatu barisan yang juga konvergen. Dalam hal ini diperlukan syarat-syarat tertentu sehingga transformasi tersebut dapat mengawetkan sifat-sifat yang dimiliki oleh barisan yang ditransformasikan. Contohnya suatu barisan bilangan real konvergen akan ditransformasikan ke dalam suatu barisan bilangan real konvergen yang lain jika transformasi tersebut adalah suatu transformasi yang kontinu.

Dalam mempelajari transformasi matriks takhingga $T := [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ tersebut, hal yang paling menarik adalah mempelajari kondisi yang harus dipenuhi oleh T sehingga memelihara atau mengawetkan sifat-sifat yang dimiliki oleh objek yang ditransformasikan. Misalkan diberikan sebarang barisan bilangan real $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$. Didefinisikan matriks takhingga $T_1 := [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ mentransformasikan barisan bilangan real $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke dalam barisan bilangan real $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ dengan

$$t_j = u_{j1}s_1 + u_{j2}s_2 + u_{j3}s_3 + \cdots + u_{jk}s_k + \cdots , \; j = 1,2,3, \ldots .$$

Suatu transformasi matriks takhingga $T_1 := [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ disebut memelihara atau mengawetkan kekonvergenan jika matriks tersebut mentransformasikan setiap barisan konvergen $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke dalam barisan konvergen $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$. Pada bab III A.1 dibahas sifat-sifat yang harus dimiliki T_1 sehingga kondisi berikut dipenuhi. Misalkan barisan $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke $s \in \mathbb{R}$ maka barisan $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ juga konvergen ke $s \in \mathbb{R}$.

Selanjutnya konsep di atas diperluas dengan mendefinisikan transformasi matriks takhingga $T_2 := [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ yang mentransformasikan barisan bilangan kompleks $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke dalam barisan bilangan kompleks $\langle w_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ dengan

$$w_j = u_{j1}z_1 + u_{j2}z_2 + u_{j3}z_3 + \cdots + u_{jk}z_k + \cdots \,,\ j = 1,2,3, \dots .$$

Transformasi matriks takhingga T_2 disebut mengawetkan kekonvergenan jika matriks tersebut mentransformasikan setiap barisan konvergen $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke dalam barisan konvergen $\langle w_j \rangle_{j=1}^{\infty}$. Pada bab III A.2 dibahas sifat-sifat yang harus dipenuhi oleh T_2 sehingga memenuhi kondisi berikut ini. Misalkan $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke $z \in \mathbb{C}$ maka barisan $\langle w_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke $w \in \mathbb{C}$.

Dimotivasi oleh dua masalah di atas, akan dibahas inti dari tulisan ini, yaitu tentang transformasi matriks takhingga $T_3 := [u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ yang mentransformasikan deret $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$ ke dalam suatu barisan deret $\langle \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k \, e^{\langle \lambda^k, z \rangle} \rangle_{j=1}^{\infty}$. Deret $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$ terdefinisi untuk $z \in \Omega \subset \mathbb{C}^n$ dan $\langle c_k \rangle_{k=1}^{\infty}$ suatu barisan bilangan di $\mathbb{C}$, yaitu $c_k \in \mathbb{C}\ \forall k \in \mathbb{N}$, Ω suatu domain konveks terbatas (lihat bab II C) dan $\langle \lambda^k \rangle_{k=1}^{\infty}$ suatu barisan vektor kompleks di $\mathbb{C}^n$ (lihat hal. 32).

Sebagaimana diketahui, deret $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$ adalah representasi suatu fungsi holomorfik $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \, e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$ pada domain konveks terbatas $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ jika deret $\sum_{k=1}^{\infty} c_k \, e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$ konvergen pada $O(\Omega)$ (lihat Teorema 3.3 dan persamaan (3.22) bab III B).

Untuk selanjutnya didefinisikan barisan fungsi $\langle f_j(z)\rangle_{j=1}^{\infty}$ dengan

$$f_j(z) := \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle}.$$

Barisan fungsi $\langle f_j(z)\rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen seragam pada domain kompak $K \subset \Omega \subset \mathbb{C}^n$, jika $\forall j \in \mathbb{N}$ deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$ konvergen pada $\Omega \subset \mathbb{C}^n$. Selanjutnya deret $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$ disebut deret Dirichlet holomorfik, yaitu deret yang diperoleh dari hasil transformasi $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle}, z \in \Omega\ dan\ \langle c_k\rangle \in \Lambda_\Omega$ oleh T_3. Untuk mengkaji lebih mendalam Λ_Ω lihat persamaan (3.18) bab III B.

Pada bab III B dibahas kondisi-kondisi yang harus dipenuhi oleh T_3 sehingga termuat pada $\Lambda_\Omega(u)$, dimana $\Lambda_\Omega(u)$ adalah koleksi semua matriks $[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ yang mempunyai sifat bahwa jika barisan $\langle c_k\rangle \in \Lambda_\Omega$, maka suatu barisan fungsi $\langle f_j(z)\rangle_{j=1}^{\infty}$ yang diberikan oleh

$$f_j(z) := \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle},$$

konvergen seragam pada $K \subset \Omega$, K kompak, dan $\forall j \in \mathbb{N}$ deret Dirichlet holomorfik $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z\rangle}$ juga konvergen pada Ω.

B. Rumusan dan Batasan Masalah

Untuk mengkaji konsep transformasi matriks takhingga secara keseluruhan, diperlukan materi yang cukup luas dan mendalam. Oleh karena itu pada Tugas Akhir ini, kajiannya dibatasi pada tiga jenis transformasi matriks takhingga yang dirumuskan dalam permasalahan sebagai berikut:

1. Kondisi apakah yang harus dipenuhi oleh T_1 sedemikian sehingga kekonvergenan barisan bilangan real $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke limit $s \in \mathbb{R}$ mengakibatkan barisan bilangan real $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ juga konvergen ke limit $s \in \mathbb{R}$?
2. Kondisi apakah yang harus dipenuhi oleh T_2 sedemikian sehingga kekonvergenan barisan bilangan kompleks $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke limit $z \in \mathbb{C}$ mengakibatkan barisan bilangan kompleks $\langle w_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke limit $w \in \mathbb{C}$?
3. Kondisi apakah yang harus dipenuhi oleh T_3 sedemikian sehingga termuat pada $\Lambda_\Omega(u)$, dimana $\Lambda_\Omega(u)$ adalah koleksi semua matriks $[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ yang mempunyai sifat bahwa jika barisan $\langle c_k \rangle \in \Lambda_\Omega$, suatu barisan fungsi $\langle f_j(z) \rangle_{j=1}^{\infty}$ yang diberikan oleh

$$f_j(z) := \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$$

konvergen seragam pada $K \subset \Omega$, K kompak, dan $\forall j \in \mathbb{N}$ deret Dirichlet holomorfik $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$ juga konvergen pada Ω?

C. Tujuan Penulisan

Setiap kegiatan memiliki tujuan tertentu yang ingin dicapai. Tujuan akan memberikan petunjuk mengenai hal-hal yang harus dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Sehubungan dengan permasalahan di atas, maka tujuan penulisan Tugas Akhir mengenai transformasi matriks deret Dirichlet holomorfik ini adalah:

1. Menentukan kondisi yang harus dipenuhi T_1 sedemikian sehingga kekonvergenan barisan bilangan real $\langle s_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke limit $s \in \mathbb{R}$ mengakibatkan barisan bilangan real $\langle t_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ juga konvergen ke limit $s \in \mathbb{R}$.
2. Menentukan kondisi yang harus dipenuhi T_2 sedemikian sehingga kekonvergenan barisan bilangan kompleks $\langle z_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ ke limit $z \in \mathbb{C}$ mengakibatkan barisan bilangan kompleks $\langle w_j \rangle_{j=1}^{\infty}$ konvergen ke limit $w \in \mathbb{C}$.
3. Menentukan kondisi yang harus dipenuhi T_3 sehingga termuat pada $\Lambda_\Omega(u)$, dimana $\Lambda_\Omega(u)$ adalah koleksi semua matriks $[u_{jk}]_{j,k=1}^{\infty}$ yang mempunyai sifat bahwa jika barisan $\langle c_k \rangle \in \Lambda_\Omega$, suatu barisan fungsi $\langle f_j(z) \rangle_{j=1}^{\infty}$ yang diberikan oleh

$$f_j(z) := \sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$$

konvergen seragam pada $K \subset \Omega$, K kompak, dan $\forall j \in \mathbb{N}$ deret Dirichlet holomorfik $\sum_{k=1}^{\infty} u_{jk} c_k e^{\langle \lambda^k, z \rangle}$ juga konvergen di Ω.

D. Manfaat Penulisan

Melalui penyusunan Tugas Akhir ini, diharapkan dapat memperkaya dan memperluas pengetahuan penulis sekaligus sebagai bahan rujukan untuk mempelajari transformasi matriks takhingga bagi mahasiswa dan masyarakat peminat matematika.

E. Sistematika Penulisan

Tugas Akhir ini ditulis dengan susunan sebagai berikut:

BAB I : PENDAHULUAN

Bab ini berisi uraian latar belakang permasalahan yang akan dibahas, rumusan dan batasan masalah, tujuan penulisan, manfaat penulisan dan sistematika penulisan.

BAB II : LANDASAN TEORI

Bab ini menyajikan tentang dasar-dasar teori yang berguna untuk menguraikan pembahasan pada bab III, khususnya teori-teori tentang kekonvergenan barisan dan deret bilangan, himpunan kompak, himpunan konveks, sifat-sifat fungsi holomorfik serta teori tentang deret Dirichlet holomorfik sebagai representasi suatu fungsi holomorfik di domain konveks terbatas $\Omega \subset \mathbb{C}^n$.

BAB III : TRANSFORMASI MATRIKS DERET DIRICHLET HOLOMORFIK

Bab ini menjelaskan inti dari permasalahan dan pembahasan dalam Tugas Akhir ini, yaitu transformasi matriks suatu barisan bilangan real, transformasi matriks suatu barisan bilangan kompleks, dan transformasi matriks deret Dirichlet holomorfik.

BAB IV : KESIMPULAN DAN SARAN

Bab ini menjelaskan kesimpulan dan saran dari keseluruhan Tugas Akhir ini.