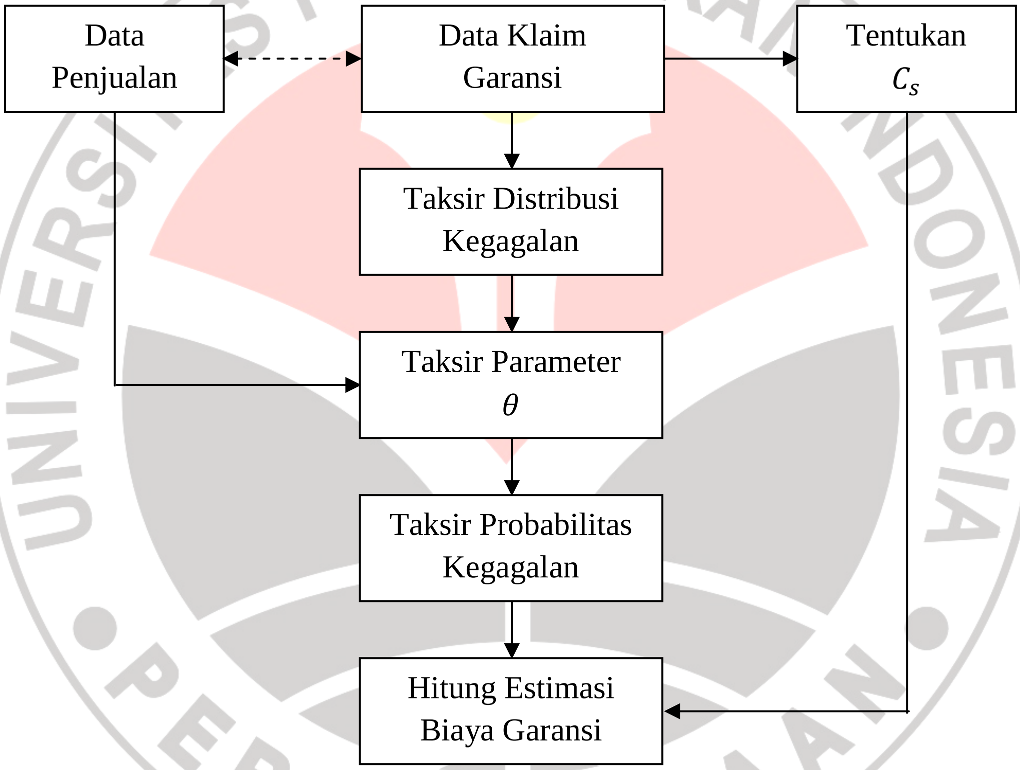
BAB III

ESTIMASI BIAYA GARANSI TV

Pada bab ini akan dibahas tahapan-tahapan yang dilakukan untuk mengestimasi biaya garansi satu dimensi pada TV. Adapun tahapan-tahapan yang dilakukan seperti terlihat pada Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Tahapan untuk mengestimasi biaya garansi
(Sumber : Sukono, 2000)

3.1 Taksiran Distribusi Kegagalan TV

Pendekatan yang digunakan untuk menaksir distribusi kegagalan adalah dengan melihat bentuk dari histogramnya. Untuk memudahkan pembentukan histogram, perlu dilakukan pembuatan tabel distribusi frekuensi, dengan langkah-langkah sebagai berikut :

1. Tentukan *range*/rentang

   Range/rentang = data terbesar – data terkecil

2. Tentukan banyaknya kelas

   Untuk menentukan banyak kelas dipergunakan rumus Sturges, yaitu :

   $k = 1 + 3{,}3 \log n$

   dimana $k =$ banyaknya kelas

   $n =$ banyak data

3. Tentuan besarnya interval/panjang kelas

   $$\text{Interval/panjang kelas} = \frac{\text{Rentang}}{\text{Banyak kelas}}$$

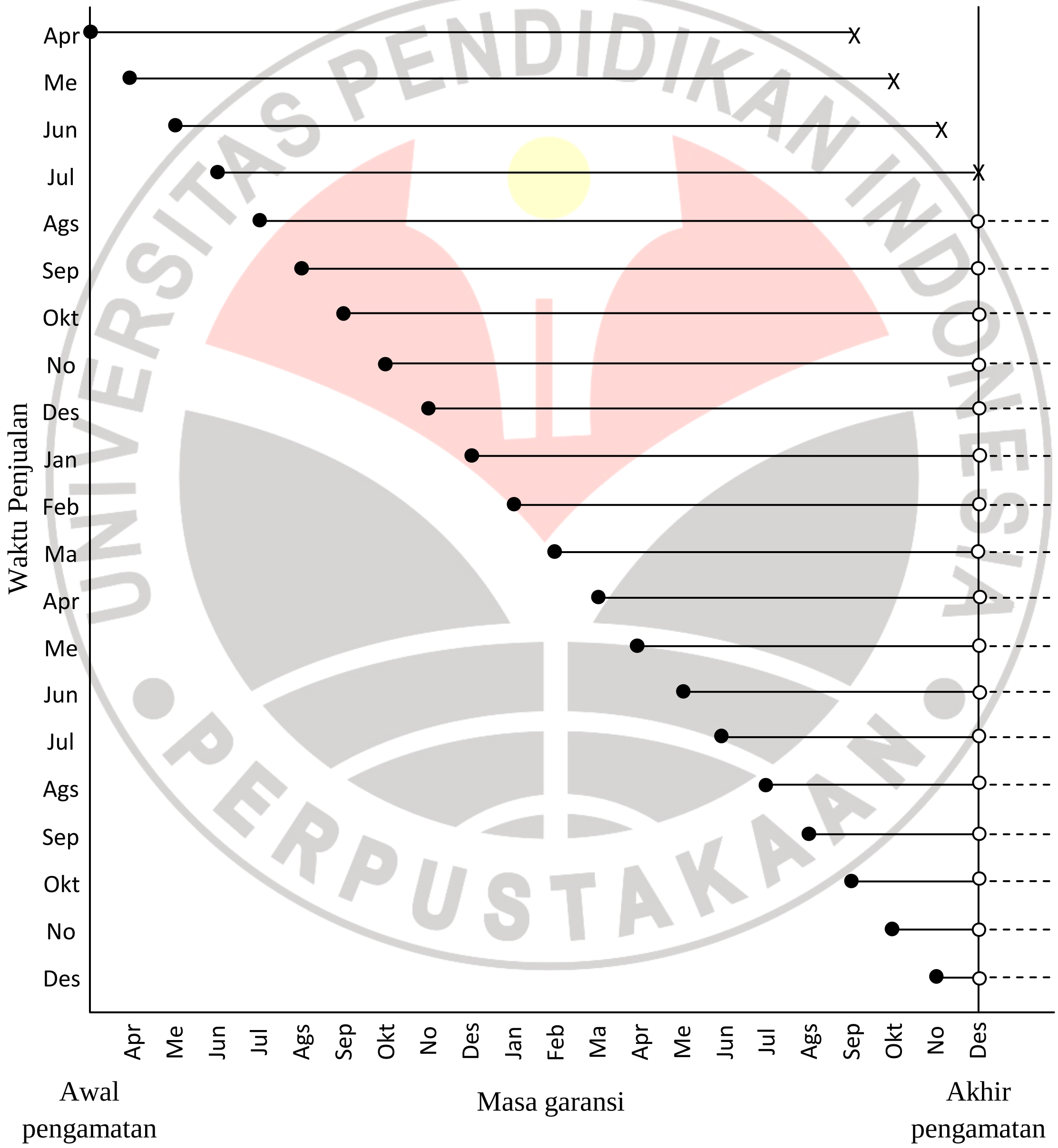
4. Membuat tabel distribusi frekuensi
5. Membuat histogram berdasarkan tabel distribusi frekuensi (Sudjana, 2005).

Dengan memperhatikan bentuk dari histogram yang dihasilkan, selanjutnya dapat ditentukan hipotesis awal terhadap distribusi yang mengikuti distribusi kegagalan TV tersebut. Kemudian akan dilakukan uji kecocokan terhadap distribusi kegagalan yang dihasilkan dengan menggunakan uji Chi-square.

3.2 Taksiran Parameter θ

Dalam sub bab ini akan dilakukan penaksiran parameter θ dari distribusi kegagalan TV. Data yang digunakan dalam penaksiran parameter adalah data penjualan dan data klaim garansi TV. Dalam penelitian ini, baik data penjualan maupun data klaim garansi dibatasi dari bulan April 2005 sampai dengan bulan Desember 2006.

Pada penelitian ini, waktu sensor didapatkan dengan menggunakan pendekatan waktu pengamatan dan masa garansi maksimum. Ilustrasi dari pendekatan ini diberikan pada Gambar 3.2.



Gambar 3.2 Ilustrasi waktu sensor dengan pendekatan waktu pengamatan dan masa garansi maksimum. Tanda (○) merupakan data tersensor

Untuk menaksir parameter, perlu dijelaskan terlebih dahulu mengenai sensor data dan fungsi reliabilitas (fungsi *survival*) yang akan digunakan sebagai perumusan fungsi *likelihood*. Pada penelitian ini digunakan sensor data tipe I (sensor waktu).

3.2.1 Sensor Tipe I

Misalkan variabel acak T_i dengan $i = 1,2, \ldots, n$ adalah masa hidup produk dan C_i dengan $i = 1,2, \ldots, n$ adalah waktu sensor tertentu. T_i diasumsikan berdistribusi identik dan independen dengan fungsi kepadatan peluang $f(t)$ dan fungsi *survival* $R(t)$. Masa hidup produk ke-i akan diketahui jika dan hanya jika $T_i \leq C_i$. Jika $T_i > C_i$, maka produk masih dalam keadaan baik dan waktu kegagalannya tersensor pada C_i (Sukono, 2000).

Data hasil pengamatan dapat dinyatakan sebagai pasangan variabel acak (t_i, δ_i) dimana :

a) t_i merupakan variabel yang menunjukkan variabel waktu, $t_i = \min\{T_i, C_i\}$

$$t_i = \begin{cases} C_i\,; \quad T_i > C_i & \text{(tersensor)} \\ T_i\,; \quad T_i \leq C_i & \text{(tidak tersensor)} \end{cases}$$

b) δ_i merupakan variabel yang menunjukkan indikator kegagalan

$$\delta_i = \begin{cases} 0\,; \quad T_i > C_i & \text{(belum gagal/tidak terobservasi)} \\ 1\,; \quad T_i \leq C_i & \text{(gagal/terobservasi)} \end{cases}$$

Jika $t_i = C_i$, maka masa hidup produk tidak terobservasi/tersensor. Tetapi jika $t_i = T_i$, maka masa hidup produk terobservasi/tidak tersensor. Distribusi dari (t_i, δ_i) mempunyai komponen-komponen sebagai berikut :

Untuk $\boldsymbol{\delta_i = 0}$:

$$\begin{aligned} P(t_i = C_i, \delta_i = 0) &= P[t_i = C_i | \delta_i = 0] P(\delta_i = 0) \\ &= P(\delta_i = 0) \\ &= P(T_i > C_i) \\ &= R(C_i) \end{aligned}$$

Untuk $\boldsymbol{\delta_i = 1}$:

$$\begin{aligned} P(t_i = T_i, \delta_i = 1) &= P[t_i = T_i | \delta_i = 1] P(\delta_i = 1) \\ &= P[T_i = t_i | T_i \leq C_i] P(T_i \leq C_i) \\ &= \frac{P(T_i = t_i, T_i \leq C_i)}{P(T_i \leq C_i)} P(T_i \leq C_i) \\ &= P(T_i = t_i) \\ &= f(t_i) \end{aligned}$$

sehingga fungsi kepadatan peluang bersama dari t_i dan δ_i dapat dinyatakan sebagai berikut :

$$f(t_i, \delta_i) = [f(t_i)]^{\delta_i} [R(C_i)]^{1-\delta_i} \quad \ldots (3.1)$$

3.2.2 Fungsi Reliabilitas (Fungsi *Survival*)

Reliabilitas suatu produk dapat didefinisikan sebagai probabilitas suatu produk untuk dapat berfungsi di bawah keadaan tertentu dalam jangka waktu tertentu pula (Ebeling, 1997). Fungsi reliabilitas merupakan komplemen dari fungsi distribusi kegagalan atau fungsi ketidakandalan. Secara matematis, dapat ditulis sebagai berikut :

$$R(t) = P(T > t) = 1 - P(T \leq t)$$

$$= 1 - F(t) \qquad \dots (3.2)$$

$F(t)$ disebut juga sebagai fungsi distribusi kegagalan atau fungsi ketidakandalan. Fungsi distribusi kegagalan merupakan probabilitas suatu produk akan gagal sebelum t.

3.2.3 Perumusan Fungsi *Likelihood* dan Parameter θ

Asumsi dalam pembentukan fungsi *likelihood* di sini yaitu bahwa masa hidup dan waktu penyensoran saling independen. Fungsi *likelihood* dari (t_i, δ_i) mempunyai komponen-komponen sebagai berikut :

Untuk $\delta_i = 0$:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \delta_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \{[f(t_i)]^{\delta_i} [R(C_i)]^{1-\delta_i}\}$$

Jika $\delta_i = 0$, maka masa hidup produk tersensor. Sehingga didapatkan :

$$L = \prod_{i \epsilon c} [R(C_i)]$$

dimana c menunjukkan produk yang tersensor.

Untuk $\delta_i = 1$:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(t_i, \delta_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{n} \{[f(t_i)]^{\delta_i} [R(C_i)]^{1-\delta_i}\}$$

Jika $\delta_i = 1$, maka masa hidup produk tidak tersensor. Sehingga didapatkan :

$$L = \prod_{i\epsilon u}^{n} [f(t_i)]$$

dimana u menunjukkan produk yang tidak tersensor.

Fungsi *likelihood* dari pasangan variabel (t_i, δ_i) dapat dinyatakan dengan :

$$L = \prod_{i \in u}^{n} f(t_i) \prod_{i \in c}^{n} R(C_i) \qquad \ldots (3.3)$$

Jika θ adalah suatu vektor parameter yang tidak diketahui, maka fungsi *likelihood* yang melibatkan data sensor tersebut dapat didefinisikan sebagai berikut :

$$L(\theta) = \prod_{i \in u}^{n} f(t_i, \theta) \prod_{i \in c}^{n} R(C_i, \theta) \qquad \ldots (3.4)$$

Logaritma natural dari persamaan (3.4) adalah :

$$\ln\big(L(\theta)\big) = \ln\left(\prod_{i \in u}^{n} f(t_i, \theta) \prod_{i \in c}^{n} R(C_i, \theta)\right)$$

$$= \sum_{i \in u}^{n} \ln f(t_i, \theta) + \sum_{i \in c}^{n} \ln R(C_i, \theta) \qquad \ldots (3.5)$$

Penaksiran parameter dilakukan dengan menggunakan *Maximum Likelihood Method* (MLE). Penaksir fungsi *likelihood* dari θ adalah nilai θ yang memaksimumkan fungsi *likelihood*. Cara yang digunakan untuk memperoleh nilai θ yang memaksimumkan fungsi *likelihood* adalah dengan mencari penyelesaian untuk θ dari persamaan berikut :

$$\frac{d \ln\big(L(\theta)\big)}{d\theta} = 0 \qquad \ldots (3.6)$$

3.2.4 Menaksir Parameter θ dengan MLE

Dari penjelasan sensor data dan fungsi reliabilitas (fungsi *survival*) di atas, akan dibentuk fungsi *likelihood* untuk penelitian ini. Misalkan :

t_{ij} : umur kegagalan TV ke-i dengan waktu sensor j bulan.

C_{ij} : waktu sensor j bulan untuk kegagalan TV ke-i.

N_j : banyaknya TV yang terjual pada bulan-bulan dengan waktu sensor j bulan.

M_j : banyaknya klaim TV pada bulan-bulan dengan waktu sensor j bulan.

$K_j = N_j - M_j$: banyaknya klaim TV yang tersensor pada bulan-bulan dengan waktu sensor j bulan.

Data hasil pengamatan dapat ditulis sebagai pasangan variabel acak (t_{ij}, δ_{ij}) dimana $t_{ij} = \min(T_{ij}, \delta_{ij})$ dan

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{jika } T_{ij} > C_{ij} \quad \text{tersensor} \\ 1 & \text{jika } T_{ij} \le C_{ij} \quad \text{tidak tersensor} \end{cases}$$

Misalkan $f(t_{ij}, \theta)$: fungsi kepadatan peluang (fkp) dari suatu distribusi dan $R(C_{ij}, \theta)$: fungsi reliabilitas dari suatu distribusi dengan parameter θ. Merujuk pada persamaan (3.4), maka fungsi *likelihood* untuk waktu sensor j bulan adalah :

$$L_j(\theta) = \prod_{i=1}^{M_j} f(t_{ij}, \theta) \prod_{i=1}^{N_j - M_j} R(C_{ij}, \theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{M_j} f(t_{ij}, \theta) \prod_{i=1}^{K_j} R(C_{ij}, \theta) \qquad \ldots (3.7)$$

Seandainya kegagalan berdistribusi eksponensial dengan parameter θ, dimana :

$$f(t_{ij},\theta) = \theta \exp(-\theta t_{ij})\,; t_{ij} \geq 0, \theta > 0$$

$$R(C_{ij},\theta) = \exp -\theta C_{ij}$$

maka fungsi *likelihood*-nya adalah :

a) Untuk waktu sensor j bulan :

$$L_j(\theta) = \prod_{i=1}^{M_j} f(t_{ij},\theta) \prod_{i=1}^{K_j} R(C_{ij},\theta)$$

$$= \prod_{i=1}^{M_j} \theta \exp(-\theta t_{ij}) \prod_{i=1}^{K_j} \exp(-\theta C_{ij})$$

$$= \theta^{M_j} \exp(-\theta \left(\sum_{i=1}^{M_j} t_{ij} \right) \Bigg] \exp \left[-\theta \left(\sum_{i=1}^{K_j} C_{ij} \right) \right)$$

$$L_j(\theta) = \theta^{M_j} \exp\left(-\theta \left(\sum_{i=1}^{M_j} t_{ij} + \sum_{i=1}^{K_j} C_{ij} \right) \right) \qquad \ldots (3.8)$$

Logaritma natural dari persamaan (3.8) adalah :

$$\ln L_j(\theta) = M_j \ln \theta - \theta \left(\sum_{i=1}^{M_j} t_{ij} + \sum_{i=1}^{K_j} C_{ij} \right) \qquad \ldots (3.9)$$

b) Untuk $j = 1,2,\ldots,18$, fungsi *likelihood* gabungannya adalah :

$$L(\theta) = \prod_{j=1}^{18} \theta^{M_j} \exp\left(-\theta \left(\sum_{i=1}^{M_{ij}} t_{ij} + \sum_{i=1}^{K_j} C_{ij} \right) \right)$$

$$\ln L(\theta) = \sum_{j=1}^{18}\left(M_j \ln\theta - \theta\left(\sum_{i=1}^{M_{ij}} t_{ij} + \sum_{i=1}^{K_j} C_{ij}\right)\right)$$

$$= \sum_{j=1}^{18} M_j \ln\theta - \theta\left(\left(\sum_{i=1}^{M_1} t_{i1} + \cdots + \sum_{i=1}^{M_{18}} t_{i18}\right) + \right.$$

$$\left.\left(\sum_{i=1}^{K_1} C_{i1} + \cdots + \sum_{i=1}^{K_{18}} C_{i18}\right)\right) \quad \ldots (3.10)$$

Dengan menggunakan MLE, didapatkan :

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d(\theta)} = \frac{\sum_{j=1}^{18} M_j}{\theta} - \left(\left(\sum_{i=1}^{M_1} t_{ij} + \cdots + \sum_{i=1}^{M_{18}} t_{ij}\right) + \right.$$

$$\left.\left(\sum_{i=1}^{K_1} C_{i1} + \cdots + \sum_{i=1}^{K_{18}} C_{i18}\right)\right) = 0$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{18} M_j}{\theta} = \left(\sum_{i=1}^{M_1} t_{ij} + \cdots + \sum_{i=1}^{M_{18}} t_{ij}\right) + \left(\sum_{i=1}^{K_1} C_{i1} + \cdots + \sum_{i=1}^{K_{18}} C_{i18}\right)$$

$$\hat{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^{18} M_j}{\left(\sum_{i=1}^{M_1} t_{ij} + \cdots + \sum_{i=1}^{M_{18}} t_{ij}\right) + \left(\sum_{i=1}^{K_1} C_{i1} + \cdots + \sum_{i=1}^{K_{18}} C_{i18}\right)} \quad \ldots (3.11)$$

3.3 Probabilitas Kegagalan Produk

Seperti yang telah disebutkan pada sub bab 3.2.2, bahwa probabilitas suatu produk akan gagal sebelum t adalah fungsi kegagalan produk atau $F(t)$. Dapat didefinisikan pula bahwa probabilitas TV yang akan mengalami kegagalan dalam masa garansi disebut sebagai fungsi probabilitas kegagalan. Sehingga $F(t)$

merupakan fungsi probabilitas kegagalan dari TV, yang akan dipergunakan dalam penaksiran biaya garansi TV.

Untuk menggambarkan hubungannya secara matematis, misalkan T suatu variabel acak kontinu yang menyatakan waktu kegagalan suatu produk dengan fungsi kepadatan waktu kegagalan $f(t)$ dan $T \geq 0$. Probabilitas suatu produk akan gagal sebelum t adalah $F(t)$, dimana persamaannya diberikan sebagai berikut :

$$P(T \leq t) = F(t) = \int_{0}^{t} f(t)dt$$

$$P(T \leq t) = F(t) = 1 - \exp(-\theta t) \qquad \dots (3.12)$$

Misalkan W adalah masa garansi TV dan θ adalah parameter dari distribusi kegagalan, maka dengan merujuk pada persamaan (3.12), didapatkan fungsi probabilitas kegagalan sebagai berikut :

$$F(W, \theta) = 1 - \exp(-\theta W) \qquad \dots (3.13)$$

3.4 Estimasi Biaya Garansi TV

Klaim garansi terjadi karena adanya kegagalan pada komponen TV selama masa garansi. Klaim yang diterima akan memberikan pengeluaran tambahan terhadap perusahaan berupa biaya garansi. Dalam penelitian ini, diasumsikan bahwa :

a) klaim dilakukan segera setelah kerusakan
b) setiap unit TV menjadi seperti baru lagi setelah diperbaiki
c) semua klaim yang masuk ke perusahaan adalah absah

Karena kegagalan TV dapat disebabkan oleh kegagalan satu atau lebih komponen, maka besarnya biaya per unit TV dapat berbeda-beda, sehingga hal ini dapat dipandang sebagai kejadian acak. Misalkan C_s adalah *mean* dari biaya klaim per unit TV, yang mana dalam hal ini C_s ditafsirkan dengan rata-rata biasa, yang ditentukan sebagai berikut :

$$C_s = E(C) = \frac{\sum_{i=1}^{M} c_i}{M}$$

dimana c_i adalah biaya klaim untuk TV ke-i, dan

M adalah total banyaknya klaim yang terjadi

Maka untuk menaksir besarnya biaya garansi per unit TV, $E[C(\theta)]$, dihitung melalui :

$$E[C(\theta)] = E[CF(W,\theta)]$$

$$= E[C]F(W,\theta)$$

$$= C_s F(W,\theta) \quad \ldots (3.14)$$

dimana $F(W,\theta)$ adalah fungsi probabilitas kegagalan seperti telah disebutkan pada sub bab 3.3.

Sehingga total ekspektasi biaya garansi adalah :

$$\sum E[C(\theta)] = NE[C(\theta)] \quad \ldots (3.15)$$

dimana N adalah banyaknya TV yang terjual.