BAB III

MODEL DISTRIBUSI *LAG* DAN *AUTOREGRESSIVE* DENGAN PENDEKATAN KOYCK

Pada umumnya model regresi linear tidak memperhatikan pengaruh waktu karena cenderung mengasumsikan bahwa pengaruh variabel bebas (X) terhadap variabel tak bebas (Y) terjadi dalam kurun waktu yang sama. Sedangkan model regresi yang menggunakan data runtun waktu tidak hanya menggunakan pengaruh perubahan variabel bebas terhadap variabel tak bebas dalam kurun waktu yang sama dan selama periode pengamatan yang sama, tetapi juga menggunakan periode waktu sebelumnya. Waktu yang diperlukan bagi variabel bebas (X) dalam mempengaruhi variabel tak bebas (Y) disebut bedakala atau *lag* (Supranto, 1995).

Perbedaan waktu antara variabel terikat dan variabel bebas yang digunakan untuk membuat model, pada dasarnya terbagi atas dua yaitu:

1. Model Distribusi *Lag*

   Model regresi yang memuat variabel tak bebas yang dipengaruhi oleh variabel bebas pada waktu t, serta dipengaruhi juga oleh variabel bebas pada waktu t-1, t-2, ..., t-s disebut model distribusi *lag*, sebab pengaruh dari satu atau beberapa variabel bebas (X) terhadap variabel tak bebas (Y) menyebar ke beberapa periode waktu dimana bentuk umumnya dinyatakan dengan :

$$\mathrm{Y}_t = \alpha + \beta_0 \mathrm{X}_t + \beta_1 \mathrm{X}_{t-1} + \beta_2 \mathrm{X}_{t-2} + \ldots + \beta_k X_{t-k} + \varepsilon_t \qquad (3.1)$$

a. Alasan Adanya *Lag*

Ada tiga alasan pokok mengapa beda kala (time *lag*) dapat terjadi :

- Alasan Psikologis

  Adanya unsur kebiasaan (*habit*), orang biasanya tidak mengubah pola konsumsi dengan segera setelah harga barang yang bersangkutan turun atau terjadi kenaikan pendapatan sebab proses perubahan mungkin menyebabkan hal-hal yang tidak diinginkan (menimbulkan rasa malu, segan, dan lain sebagainya). Selain itu, hal ini juga tergantung pada apakah kenaikan pendapatan tersebut bersifat tetap (*permanent*) atau hanya sementara saja (*transitory*). Jika hanya sementara, mungkin kenaikan pendapatan tersebut hanya untuk disimpan.

- Alasan Teknologis

  Jika harga modal relatif turun dibandingkan dengan upah tenaga kerja manusia, maka ada kemungkinan untuk mengganti tenaga kerja dengan mesin-mesin, yaitu perubahan dari padat karya menjadi padat modal. Tentu saja tambahan modal akan memerlukan waktu. Lagi pula, jika penurunan harga hanya terjadi secara sementara, pemimpin perusahaan mungkin tidak secara tergesa-gesa mengganti tenaga buruh dengan mesin, yaitu mengubah padat karya menjadi padat modal, khususnya jika ada harapan bahwa setelah penurunan harga akan segera terjadi kenaikan yang justru akan lebih tinggi dari sebelumnya. Kadang pengetahuan yang kurang sempurna tentang situasi dapat meyebabkan terjadinya "*lag*". Sebagai contoh, sekarang ini banyak beredar kalkulator elektronik dari berbagai merek dengan berbagai variasi kemampuannya (berfungsi sebagai alat hitung, jam, alat musik, alarm, dan sebagainya), dan harganya mengalami penurunan drastis apabila dibandingkan dengan harga pada tahun 1960-an. Oleh karena itu, para calon pembeli tidak akan segera membeli, tetapi masih memerlukan waku untuk meneliti berbagai harga dari beberapa merek dan segala kemampuannya atau juga menunggu harga turun lagi, atau mungkin masih ada kalkulator elektronik baru yang mungkin harganya lebih murah, tetapi mempunyai tingkat kemampuan yang lebih tinggi.

- Alasan Institusi atau Kelembagaan

Sebagai contoh, keharusan kontrak mungkin mencegah perusahaan untuk beralih dari sumber tenaga kerja yang satu ke sumber tenaga kerja lainnya, atau sumber bahan baku yang satu ke sumber bahan baku lainnya. Seseorang yang mendepositokan uangnya selama 24 bulan tidak mungkin memindahkan uangnya seandainya tingkat bunga di luar bank mengalami kenaikan yang lebih tinggi daripada bunga deposito, kecuali jika dia bersedia membayar denda. Demikian juga, seseorang pemimpin perusahaan memberikan kesempatan kepada karyawannya untuk memilih berbagai alternatif asuransi kesehatan, tetapi setelah diputuskan karyawan tidak lagi bebas untuk memilih asuransi yang lain (misalnya, TASPEN untuk pegawai negeri). Jadi naik-turunnya harga polis asuransi kesehatan tidak segera mempengaruhi pengeluaran untuk asuransi bagi pegawai tersebut, pengaruhnya mungkin akan terjadi setelah setahun.

b. Estimasi untuk Model Distribusi *Lag*

Terdapat dua jenis model distribusi *Lag*, yaitu :

- Model *Lag Infinite* : $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \beta_2 X_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t$ (3.2)

  Dimana beda kala tidak diketahui.

- Model *Lag Finite* : $Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_1 X_{t-1} + \cdots + \beta_k X_{t-k} + \varepsilon_t$ (3.3)

  Beda kala diketahui yaitu sebesar k.

Pada model (3.3) model tersebut dapat diestimasi dengan metode kuadrat terkecil untuk regresi berganda, dengan menghilangkan sejumlah k pengamatan. Sedangkan pada model (3.2) sulit untuk mengestimasi model di atas dengan cara biasa, karena ada tak hingga banyaknya variabel bebas. Data yang didapat tidak cukup untuk dapat mengestimasi model tersebut. Untuk mengatasi hal tersebut, Koyck memperkenalkan suatu pendekatan, sehingga model (3.2) dapat diestimasi dengan cara Koyck.

2. Model *Autoregressive*

Model regresi yang memuat variabel tak bebas yang dipengaruhi oleh variabel bebas pada waktu t, serta dipengaruhi juga oleh variabel tak bebas itu sendiri pada waktu t-1 disebut model *autoregressive* dengan :

$$\mathrm{Y}_t = \alpha + \beta_1 \mathrm{X}_t + \beta_2 \mathrm{Y}_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (3.4)$$

3.1 Pendekatan Koyck terhadap Model Distribusi *Lag*

Koyck telah mengusulkan suatu metode untuk menaksir model *lag* yang didistribusikan. Misalkan model yang didistribusikan dengan *lag* tak terbatas. Dengan mengasumsikan bahwa β pada model ditribusi lag semuanya memiliki tanda yang sama, Koyck mengasumsikan pula bahwa β menurun secara geometris sebagai berikut :

$$\beta_1 = \beta_0\lambda^1$$

$$\beta_2 = \beta_0\lambda^2$$

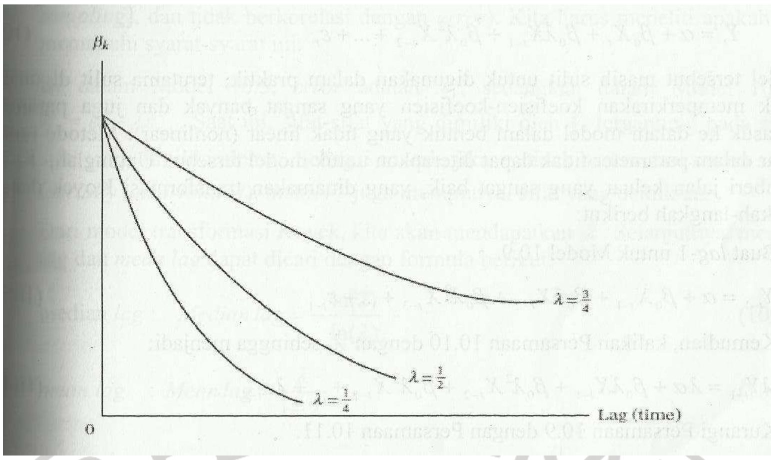
$$\beta_3 = \beta_0\lambda^3$$

$$\vdots$$

$$\beta_k = \beta_0\lambda^k \qquad (3.5)$$

dimana $0 < \lambda < 1$, dikenal sebagai tingkat penurunan bobot, atau peluruhan dari lag yang didistribusikan dan 1-λ dikenal sebagai kecepatan penyesuaian.

Persamaan (3.5) mengartikan bahwa tiap koefisien $\beta_{k-1} < \beta_k$ karena $0< \lambda <$ 1. Dari contohnya dalam fungsi konsumsi dapat diartikan bahwa pendapatan sekarang dan sebelumnya (yang lalu) diharapkan mempengaruhi pengeluaran konsumsi sekarang, tetapi pengaruh pendapatan satu atau dua tahun yang lalu terhadap pengeluaran konsumsi sekarang jauh lebih besar daripada pendapatan 5 tahun lalu. Secara geometris, skema Koyck dapat dilihat pada gambar 3.1.



Gambar 3.1 Skema Koyck

Dengan mengasumsikan nilai-nilai λ nonnegatif, Koyck mengesampingkan β dari perubahan tanda, dan dengan mengasumsikan λ < 1, ia memberikan bobot yang lebih kecil pada β yang lebih jauh dari pada β yang lebih baru. Lebih jauh lagi, skema Koyck menjamin bahwa jumlah dari β, yang memberikan dampak jangka panjang, merupakan jumlah dari :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \beta_0 \left(\frac{1}{1-\lambda}\right) \qquad (3.6)$$

Karena $\sum_{k=0}^{\infty} \beta_k = \beta_0 + \beta_1 + \beta_2 + \cdots$

$$= \beta_0 + \beta_0\lambda + \beta_0\lambda^2 + \cdots$$

$$= \beta_0(1 + \lambda + \lambda^2 + \cdots)$$

$$= \beta_0 \left(\frac{1}{1-\lambda}\right)$$

Dengan demikian, model *infinite* (3.2) dapat ditulis menjadi seperti berikut :

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \beta_0 \lambda X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \cdots + \varepsilon_t \qquad (3.7)$$

Model tersebut masih sulit untuk ditaksir karena terdapat sejumlah besar (secara harfiah tak terbatas) parameter untuk ditaksir dan parameter λ masuk dalam bentuk yang tidak linear (nonlinear). Metode regresi linear dalam parameter tidak dapat diterapkan untuk model seperti itu. Koyck memberikan jalan keluar yang sangat baik, yang dinamakan transformasi Koyck dengan langkah - langkah sebagai berikut :

1. Buat *lag*-1 untuk Model (3.7)

$$Y_{t-1} = \alpha + \beta_0 X_{t-1} + \beta_0 \lambda X_{t-2} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-3} + \cdots + \varepsilon_{t-1} \qquad (3.8)$$

2. Kemudian kalikan persamaan (3.8) dengan λ untuk memperoleh

$$\lambda Y_{t-1} = \lambda\alpha + \lambda\beta_0 X_{t-1} + \beta_0 \lambda^2 X_{t-2} + \beta_0 \lambda^3 X_{t-3} + \cdots + \lambda\varepsilon_{t-1} \qquad (3.9)$$

3. Kurangi persamaan (3.7) dengan persamaan (3.9) sehingga diperoleh

$$Y_t - \lambda Y_{t-1} = \alpha(1-\lambda) + \beta_0 X_t + (\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}) \qquad (3.10)$$

4. Sehingga modelnya menjadi :

$$Y_t = (1-\lambda)\alpha + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + \upsilon_t \qquad (3.11)$$

dengan $\upsilon_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$

Ada beberapa hal yang perlu diperhatikan terkait dengan transformasi Koyck, yaitu :

1. Dimulai dengan model *lag infinite*, tetapi diakhiri dengan model *autoregressive* sebab Y_{t-1} muncul sebagai variabel bebas. Hal ini menunjukkan cara pengubahan model distribusi *lag* menjadi model *autoregressive*.
2. Munculnya variabel tak bebas Y_{t-1} sebagai variabel bebas akan menimbulkan beberapa masalah statistik karena variabel tak bebasnya bersifat stokastik, yaitu tidak tetap (selalu berubah-ubah). Jadi, adanya

variabel bebas yang stokastik, dimana dalam penerapan metode kuadrat terkecil (OLS) diasumsikan bahwa variabel bebasnya tetap, tidak berubah dari sampel atau dalam penyampelan berulang, dan tidak berkorelasi dengan error. Sehingga, harus diteliti apakah Y_{t-1} memenuhi syarat-syarat tersebut.

3. Di dalam model *lag infinite*, *error* adalah ε_t, sedangkan dalam model (3.11), $\upsilon_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$. Saat ini, sifat-sifat yang dimiliki oleh υ_t tergantung pada sifat-sifat yang dimiliki oleh ε_t. Sebagai contoh, jika ε_t tidak berkorelasi secara parsial maka υ_t juga mempunyai sifat yang demikian. Dari model transformasi Koyck, akan didapatkan nilai λ.

3.2 Pendekatan Koyck terhadap Model *Autoregressive*

Dari uraian model distribusi *lag* didapat pendekatan Koyck sebagai berikut :

$$Y_t = (1-\lambda)\alpha + \beta_0 X_t + \lambda Y_{t-1} + \upsilon_t \qquad (3.11)$$

Model (3.11) mempunyai bentuk umum model *Autoregressive* sebagai berikut :

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 Y_{t-1} + \upsilon_t \qquad (3.12)$$

dengan $\beta_1 = (1-\lambda)\alpha$; $\beta_2 = \beta_0$; $\beta_3 = \lambda$.

Prosedur mengubah (3.11) menjadi (3.12) disebut *Transformasi Koyck*. Dengan transformasi tersebut hanya perlu diestimasi β_1, β_2, dan β_3. Model (3.12) disebut model *autoregressive*. Jadi, dengan kata lain bahwa Transformasi Koyck mengubah Model Distribusi *Lag* menjadi Model *Autoregressive*. Persoalannya adalah bagaimana menduga parameter model tersebut sebab metode kuadrat terkecil klasik tidak berlaku lagi untuk model (3.12). Alasannya adalah sebagai berikut :

1. Ada variabel-variabel bebas yang stokastik (tidak tetap, tetapi berubah dari sampel ke sampel).
2. Adanya kemungkinan korelasi serial.

Metode kuadrat terkecil (*Ordinary Least Squares*) mensyaratkan bahwa variabel bebas stokastik Y_{t-1} harus mempunyai distribusi yang bebas terhadap *error* υ_t. Oleh karena itu, seharusnya mengenal sifat-sifat dari υ_t maka sifat – sifat yang dimiliki υ_t tergantung pada sifat – sifat yang dimiliki ε_t. Jika dianggap bahwa kesalahan penganggu ε_t memenuhi semua asumsi klasik, seperti E(ε) = 0, Var(ε) = σ^2 (asumsi homokedastisitas) dan Cov(ε_t, ε_{t+s}) = 0 (asumsi bahwa tidak ada autokorelasi), υ_t mungkin tidak mewarisi semua sifat-sifat ini. Perhatikan, misalnya *error* dalam model Koyck yaitu $\upsilon_t = \varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1}$. Dengan asumsi tentang ε_t, dapat ditunjukkan bahwa υ_t berkorelasi serial sebab :

$$E(\upsilon_t\upsilon_{t-1}) = -\lambda\sigma^2 \qquad (3.13)$$

Karena Y_{t-1} muncul dalam model Koyck seperti variabel bebas, maka Y_{t-1} akan berkorelasi dengan υ_t (melalui kehadiran ε_{t-1} didalamnya).

Implikasikan hal yang terjadi setelah menemukan bahwa dalam model Koyck variabel bebas stokastik Y_{t-1} jelas berkorelasi dengan *error* υ_t. Suatu variabel bebas dalam suatu model regresi berkorelasi dengan kesalahan pengganggu, penaksir OLS tidak hanya bias, tetapi juga tidak konsisten, yaitu walaupun sampel diperbesar ditambah terus sampai tidak terhingga, penaksir tidak akan mendeteksi nilai populasi yang sebenarnya. Oleh karena itu, perkiraan model Koyck dengan metode kuadrat terkecil yang bias (OLS) belum tentu benar (Gujarati, 1995).

3.3 Mengestimasi Parameter dengan Metode Variabel *Instrumental*

Melihat kelemahan tersebut merupakan permasalahan serius dalam mengestimasi model dengan metode kuadrat terkecil, maka perlu dicari metode estimasi yang lain. Untuk menanggulangi permasalahan tersebut, para ahli menyarankan untuk mengestimasi model dengan menggunakan metode variabel *instrument*. Metode variabel *instrument* merupakan modifikasi dari metode kuadrat terkecil.

Dalam metode variabel *instrument*, dibutuhkan variabel *instrument* untuk menanggulangi masalah korelasi antara variabel bebas dengan faktor gangguan (error). Variabel *instrument* tersebut harus memenuhi dua syarat berikut :

1. Variabel *instrument* berkorelasi dengan variabel bebas yang bermasalah (variabel bebas yang berkorelasi dengan error).
2. Variabel *instrument* tidak berkorelasi dengan error.

Dalam masalah ini, variabel *instrument* untuk Y_{t-1} adalah X_{t-1}, karena X_{t-1} berkorelasi dengan Y_{t-1} tetapi tidak berkorelasi dengan v_t. Untuk menanggulangi masalah korelasi antara Y_{t-1} dengan v_t ganti Y_{t-1} dengan $\hat{Y}_{t-1} = a_0 + a_1 X_{t-1}$, dimana koefisien a_0 dan a_1 dapat diestimasi dengan menerapkan metode kuadrat terkecil.

Substitusikan $\hat{Y}_{t-1}$ kedalam model (3.12) sehingga diperoleh :

$$Y_t = \beta_1 + \beta_2 X_t + \beta_3 \hat{Y}_{t-1} + v_t \tag{3.14}$$

Karena X_{t-1} tidak berkorelasi dengan v_t maka $\hat{Y}_{t-1} = a_0 + a_1 X_{t-1}$ juga tidak berkorelasi dengan v_t, yang diperlihatkan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\mathrm{cov}[V_t, \hat{\mathrm{Y}}_{t-1}] &= \mathrm{E}[V_t \hat{\mathrm{Y}}_{t-1}] - \mathrm{E}[V_t]\mathrm{E}[\hat{\mathrm{Y}}_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[V_t \hat{\mathrm{Y}}_{t-1}] - (0)\mathrm{E}[\hat{\mathrm{Y}}_{t-1}] \\
&= \mathrm{E}[(\varepsilon_t - \lambda\varepsilon_{t-1})(a_0 + a_1 \mathrm{X}_{t-1})] \\
&= \mathrm{E}[\varepsilon_t a_0 + \varepsilon_t a_1 \mathrm{X}_{t-1} - \lambda\varepsilon_{t-1} a_0 - \lambda\varepsilon_{t-1} a_1 \mathrm{X}_{t-1}] \\
&= a_0 \mathrm{E}[\varepsilon_t] + a_1 \mathrm{X}_{t-1} \mathrm{E}[\varepsilon_t] - \lambda a_0 \mathrm{E}[\varepsilon_{t-1}] - \lambda a_1 \mathrm{X}_{t-1} \mathrm{E}[\varepsilon_{t-1}] \\
&= a_0(0) + a_1 \mathrm{X}_{t-1}(0) - \lambda a_0(0) - \lambda a_1 \mathrm{X}_{t-1}(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$r_{V_t \hat{\mathrm{Y}}_{t-1}} = \frac{\mathrm{cov}[V_t, \hat{\mathrm{Y}}_{t-1}]}{\sqrt{\mathrm{var}(V_t)}\sqrt{\mathrm{var}(\hat{\mathrm{Y}}_{t-1})}} = 0$$

Sehingga masalah korelasi antara variabel bebas dengan errornya pada model (3.14) sudah teratasi dengan mengganti Y_{t-1} dengan $\hat{Y}_{t-1} = a_0 + a_1 X_{t-1}$. Jadi kita bisa menerapkan metode kuadrat terkecil untuk memperoleh $\beta_0, \beta_1, \beta_2$ pada model (3.13) (Nachrowi, 2008).

3.4 Mendeteksi Autokorelasi pada Model *Autoregressive* dengan Menggunakan Statistik *h* Durbin-Watson

Metode Koyck tetap dapat digunakan untuk menentukan persamaan *autoregressive* karena pada persamaan Koyck terdapat variabel Y_{t-1} yang diikutsertakan sebagai salah satu variabel bebas sehingga model Koyck tersebut bersifat *autoregressive*. Tetapi, perlu dilakukan uji lanjutan setelah pendekatan Koyck dilakukan, yaitu dengan menggunakan metode statistik Durbin-Watson untuk mendeteksi adanya autokerelasi dalam *autoregressive* karena adanya Y_{t-1}sebagai salah satu variabel bebas yang mungkin menyebabkan autokorelasi. Adapun langkah-langkah yang harus dilakukan adalah sebagai berikut :

$$d = \frac{\sum_{t=2}^{N}(\hat{\varepsilon}_t - \hat{\varepsilon}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{N}\hat{\varepsilon}_t^2} \tag{3.15}$$

Dimana bentuk umum dari Y_t:

$$Y_t = \alpha + \beta_0 X_t + \varepsilon_t \tag{3.16}$$

Sehingga :

$$\hat{\varepsilon}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_t \tag{3.17}$$

Persamaan (3.19) dibuat sebagai :

$$d = 2\left(1 - \frac{\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum \varepsilon_1^2}\right) = 2(1-\rho) \tag{3.18}$$

Dimana :

$$\rho = \frac{\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum \varepsilon_1^2} \tag{3.19}$$

Jika didefinisikan $\rho = \frac{\sum \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}}{\sum \varepsilon_1^2}$ maka (3.21) dapat dituliskan menjadi :

$$d = 2(1 - \hat{\rho}) \qquad (3.20)$$

sehingga

$$\hat{\rho} = 1 - \frac{1}{2} d \qquad (3.21)$$

Adapun beberapa asumsi yang melandasi Uji Durbin Watson ini antara lain :

1. Uji Durbin Watson diterapkan untuk model regresi yang mencakup parameter α, dengan kata lain dipergunakan untuk model regresi yang mengandung konstanta.
2. Variabel-variabel penjelas X, adalah nonstokastik, atau bersifat tetap dalam penarikan contoh yang berulang.
3. Kesalahan ε_t diperoleh dengan pola regresi dari order pertama yaitu : $\varepsilon_t = \rho \varepsilon_{t-1} + \mu_t$
4. Model regresi tidak mencakup nilai – nilai *lag* dari variabel tak bebas sebagai suatu variabel penjelas.

Karena asumsi ke empat tidak dipenuhi untuk masalah *autoregressive* maka statistik *d* Durbin Watson tidak bisa digunakan. Sehingga Durbin Watson membuat suatu uji lagi yaitu *h* Durbin Watson dengan rumus :

$$h = \hat{\rho} \sqrt{\frac{n}{1 - n[var(a_2)]}} \qquad (3.22)$$

dimana

$\hat{\rho}$: perkiraan koefisien autokorelasi orde pertama

n : banyaknya sampel

a_2 : koefisien regresi Y_{t-1}

$var(a_2)$: variansi a_2

Nilai $\hat{\rho}$ didekati dengan nilai statistik *d* Durbin Watson, dengan persamaan (3.21).

Sehingga persamaan (3.22) dapat ditulis menjadi :

$$h = (1 - \frac{1}{2}d)\sqrt{\frac{n}{1-n[var(a_2)]}} \quad (3.23)$$

Sehingga langkah – langkah yang harus dilakukan untuk mendeteksi adanya autokorelasi sebagai berikut :

1. Hipotesis

   H_0 : tidak ada autokorelasi dalam *autoregressive*.

   H_1 : ada autokorelasi dalam *autoregressive*.

2. Selang kepercayaan $\alpha = 0.05$
3. Statistik uji : $h = (1 - \frac{1}{2}d)\sqrt{\frac{n}{1-n[var(a_2)]}}$
4. Pengambilan keputusan :
   - Tolak H_0 jika $h_{hitung} > h_{tabel}$
   - Terima H_1 jika $h_{hitung} < h_{tabel}$