BAB II

LANDASAN TEORI

Pada awal bab ini akan di*review* beberapa literatur yang berkaitan dengan pemecahan masalah (*problem solving*), berbagai strategi pemecahan masalah, penalaran, penalaran induktif dan pola bilangan sebagai landasan teori yang mendasari penelitian ini.

A. Pemecahan Masalah (*Problem Solving*)

Menurut Garofalo dan Lester (dalam Kirkley,2003), pemecahan masalah mencakup proses berpikir tingkat tinggi seperti proses visualisai, asosiasi, abstraksi, manipulasi, penalaran, analisis, sintesis, dan generalisasi yang masing-masing perlu dikelola secara terkoordinasi (Suryadi dan Herman,2008: 68)

Tantangan kehidupan yang semakin kompleks menuntut seseorang memiliki kemampuan berpikir dan keterampilan dalam pemecahan masalah. Macintosh, (2000) menjelaskan bahwa para ahli percaya bahwa kemampuan berpikir dan keterampilan yang digunakan dalam proses pemecahan masalah matematis dapat ditransfer ke dalam berbagai bidang kehidupan (Suryadi dan Herman, 2008:69)

Selain itu pengalaman yang diperoleh melalui proses pemecahan masalah matematis memungkinkan berkembangnya kekuatan matematis yang antara lain meliputi kemampuan membaca dan menganalisis situasi secara kritis, mengidentifikasi kekurangan yang ada, mendeteksi kemungkinan yang terjadi, menguji dampak dari langkah yang akan dipilih, serta mengajukan alternatif solusi kreatif atas permasalahan yang dihadapi. (Suryadi dan Herman, 2008:70) Dengan demikian pemecahan masalah matematis dapat membantu seseorang memahami informasi yang ada di sekitarnya dengan baik sehingga mampu memberikan solusi alterrnatif yang kreatif atas permasalahan-permasalahan yang dihadapinya.

Pemecahan masalah juga dipandang sebagai suatu proses untuk menemukan kombinasi dari sejumlah aturan yang dapat diterapkan dalam upaya mengatasi situasi yang baru. Apabila seseorang telah mendapatkan suatu kombinasi perangkat aturan yang terbukti dapat dioperasikan sesuai dengan situasi yang sedang dihadapi maka ia tidak hanya telah memecahkan suatu masalah, melainkan juga telah berhasil menemukan suatu pengetahuan yang baru. (Made Wena, 2009:62).

Proses terbentuknya pengetahuan baru tersebut khususnya dalam matermatika diyakini sebagai suatu proses yang diperkenalkan oleh Dubinsky sebagai *Action-Process-Object-Schema (APOS).* Menurut teori tersebut dikemukakan manakala seseorang berusaha memahami suatu ide matematik maka prosesnya akan dimulai dari suatu aksi mental terhadap ide matematik tersebut, dan pada akhirnya akan sampai pada konstruksi suatu skema tentang konsep matematik tertentu yang tercakup dalam masalah yang diberikan. (Suryadi,2008:4-5)

Teori tersebut menjelaskan bahwa dalam proses pembelajaran khususnya matematika penyajian suatu masalah dan pemecahan masalah merupakan suatu hal pentimg untuk membangkitkan proses mental yang tersimpan pada siswa sehingga mendorong munculnya suatu aktivitas berpikir untuk mengingat kembali pengetahuannya, menerapkan suatu konsep dan membangun suatu pengetahuan yang baru. Sejalan dengan teori ini untuk membangkitkan proses mental yang tersimpan pada siswa, Brousseau (1997) menjelaskan bahwa aksi guru dalam proses pembelajaran akan menciptakan sebuah situasi didaktis yang dapat menjadi titik awal bagi terjadinya proses belajar. Walaupun situasi yang tersedia tidak serta merta akan menciptakan proses belajar, dengan teknik *scaffolding* proses tersebut sangat mungkin terjadi .(Suryadi, 2008 :11).

Pentingnya kegiatan pemecahan masalah ini dapat dipahami karena berdasarkan teori belajar yang dikemukakan Gagne, bahwa ketrerampilan intelektual tingkat tinggi dapat dikembangkan melalui pemecahan masalah (Suherman dkk,2003:89)

Menurut Meyer (dalam Made,2009:87) mengungkapkan ada tiga karakteristik pemecahan masalah, yaitu (1) pemecahan masalah merupakan aktivitas kognitif, tetapi dipengaruhi oleh perilaku, (2) hasil-hasil pemecahan masalah dapat dilihat dari tindakan/ perilaku dalam mencari pemecahan, dan (3) pemecahan masalah merupakan suatu proses tindakan manipulasi dari pengetahuan yang telah dimiliki sebelumnya.

B. Strategi Pemecahan Masalah

Secara umum menurut Goerge Polya,(dalam Suherman.dkk,2003:99) dalam pemecahan masalah terdapat empat langkah yang harus dilakukan yaitu, (1) memahami masalah, (2) merencanakan pemecahannya, (3) menyelesaikan masalah sesuai dengan rencana langkah kedua, (4) memeriksa kembali hasil yang telah diperoleh.

Secara lebih khusus Sobel dan Maletsky (2004: 63-75) menjelaskan beberapa strategi pemecahan masalah dalam matematika, yatitu (1) dengan cara coba-coba, (2) menggunakan alat peraga, model, atau sketsa, (3) mencari pola, (4) membuat peragaan, (5) menggunakan daftar, tabel atau bagan.

Sejalan dengan pendapat tersebut Wahyudin (2004) mengungkapkan beberapa strategi serta perilaku dan sikap yang harus dikembangkan dalam pemecahan masalah yaitu memilih operasi, menulis persamaan, gambar diagram, coba dan periksa, gunakan penalaran logis, temukan pola, bekerja mundur, selesaikan masalah yang sederhana, buat grafik dan jangan menyerah, fleksibel, percaya diri, berani mengambil resiko, lakukan urun pendapat (*brainstorming*), visualisasikan permasalahan, bandingkan permasalahan, pikirkan pikiran anda, berbagi pikiran bersama orang lain, organisasikan kerja anda.

C. Penalaran

Menurut Suherman (2003: 57) belajar matematika bagi para siswa juga merupakan pembentukan pola pikir dalam pemahaman suatu pengertian maupun dalam penalaran suatu hubungan diantara pengertian - pengertian itu.

Fondasi dari matematika adalah penalaran (*reasoning*) (Rochmad,2008). Penalaran dan koneksi matematika merupakan kemampuan dasar matematika yang harus dikuasai siswa sekolah menengah. Penalaran merupakan proses berpikir dalam proses penarikan kesimpulan (Permana dan Sumarmo,2007).

Penalaran matematis merupakan bagian dari kemampuan berpikir matematik tingkat tinggi. Menurut Henningsen dan stein (dalam Suryadi,2008:26), kemampuan berpikir matematik tingkat tinggi pada hakekatnya merupakan kemampuan berpikir non-prosedural yang antara lain mencakup hal-hal berikut: kemampuan mencari dan mengeksplorasi pola untuk memahami struktur matematik serta hubungan yang mendasarinya; kemampuan menggunakan fakta-fakta yang tersedia secara efektif dan tepat untuk memformulasikan serta menyelesaikan masalah; kemampuan membuat ide-ide matematik secara bermakna; kemampuan berpikir dan bernalar secara fleksibel melalui penyusunan konjektur, generalisasi, dan justifikasi; serta kemampuan menetapkan bahwa suatu hasil pemecahan masalah bersifat masuk akal atau logis.

Menurut Suherman dan Winataputra (1993), Penalaran matematis sebagai bagian dari berpikir matematis tingkat tinggi dapat diartikan sebagai proses berpikir yang dilakukan dengan cara menarik kesimpulan. Kesimpulan yang bersifat umum dapat ditarik dari kasus-kasus yang bersifat individual.. Tetapi dapat pula sebaliknya, dari hal yang bersifat umum menjadi kasus yang individual (dalam Kusumah,2008:15).

Selanjutnya Sumarmo,1993 (dalam Kusumah,2008 : 16) menjelaskan penalaran matematis meliputi: (1) menarik kesimpulan logis, (2) memberikan penjelasan dengan menggunakan model, fakta, sifat-sifat, dan hubungan, (3) memperkirakan jawaban dan proses solusi, (4) menggunakan pola dan hubungan untuk menganalisis situasi matematik, (5) menyusun dan menguji konjektur, (6) merumuskan lawan contoh, (7) mengikuti aturan inferensi, memeriksa validitas argumen, (8) menyusun argumen yang valid, (9) menyusun pembuktian langsung, tak langsung dan menggunakan induksi matematika.

Dari karakteristiknya yang terkait dengan argumen, penalaran matematis mencakup kemampuan merumuskan konjektur (pernyataan yang perlu diperiksa kebenarannya), analisis, evaluasi, generalisasi, koneksi, sintesis, pemecahan masalah non rutin, *justification,* dan kemampuan komunikasi matematis (Kusumah,2008 : 16).

Glade dan Citron mengemukakan bahwa terdapat enam ketrampilan bernalar yang dapat dikembangkan dalam proses mental yaitu sebagai berikut;

1. *Thinking making,* pengamatan dan proses identifikasi sesuatu melalui nama sebuah kata, simbol atau bayangan mental.
2. *Qualification,* penganalisaan karakteristik sesuatu.
3. *Classification,* yaitu pengaturan sesuatu ke dalam kelompok berdasarkan karakteristik yang mirip.
4. *Structure analysis,* menganalisis dan menciptakan suatu keterhubungan.
5. *Operation analysis,* pengurutan sesuatu hal, atau pilihan-pilihan ke dalam urutan secara logis.
6. *Seeing analysis,* pengenalan hubungan-hubungan yang sama. Keterampilan ini merupakan aplikasi dari informasi yang dihasilkan oleh semua keterampilan berpikir yang lain. (dalam Indrawan,2009:20-21).

D. Penalaran Induktif

Secara garis besar terdapat dua jenis penalaran, yaitu penalaran induktif dan penalaran deduktif. Penalaran induktif merupakan proses berpikir berupa penarikan kesimpulan yang umum (berlaku untuk semua/banyak) atas dasar pengetahuan tentang hal yang khusus yang dimulai dari sekumpulan fakta yang ada (Suriasumantri (1998), dalam Kusumah,2008 : 16). Sedangkan penalaran deduktif bekerja sebaliknya, dari hal yang umum ke hal yang khusus.

Kesimpulan yang ditarik secara induktif tidak selalu dapat dibuktikan secara deduktif, kesimpulan demikian dinamakan konjektur. Konjektur adalah suatu tebakan, penyimpulan teori, atau dugaan yang didasarkan pada fakta yang tak tertentu atau tak lengkap. Kesimpulan umum dari suatu penalaran induktif bukanlah merupakan suatu bukti. Hal tersebut dapat dipahami karena aturan umum yang diperoleh ditarik dari pemeriksaan contoh khusus yang benar, tetapi belum untuk semua kasus. Kesimpulan tersebut boleh jadi valid pada contoh yang diperiksa, tetapi tidak dapat diterapkan pada keseluruhan contoh (Priatna,2003 dalam Indrawan,2009:22).

Permana dan Sumarmo (2007); menjelaskan induksi yang menghasilkan kesimpulan umum dinamakan generalisasi. Kesimpulan dalam generalisasi bersifat probalistik artinya mungkin benar atau mungkin juga tidak benar. Induksi yang menghasilkan kesimpulan berdasarkan data atau proses serupa dinamakan *analogi*. Shurter dan Pierce (1966) sebagaimana dikutip Sumarmo (1987) menjelaskan bahwa generalisasi induktif atau disebut juga *simple enumeration* adalah proses penalaran yang berdasarkan pemeriksaan hal secukupnya, kemudian memperoleh kesimpulan untuk semuanya atau sebagian besar hal-hal tadi (Indrawan,2009:23).

Menurut Soekadijo, generalisasi memuat beberapa syarat di antaranya adalah;

1. Generaliasi harus tidak terbatas secara numerik, artinya generalissi tidak boleh terikat pada jumlah tertentu.
2. Generalisasi harus tidak terbatas secara *spasio-temporal*, artinya tidak boleh terbatas pada ruang dan waktu. (Indrawan,2009:24).

Menurut Mason, (dalam Indrawan,2009) generalisasi meliputi empat tahap yaitu;

1. *Perception of generality*, bahwa siswa mengenal sebuah pola.
2. *Expression of generality*, bahwa siswa mampu menguraikan sebuah aturan atau pola, baik secara numerik atau verbal.
3. *Symbolic expression of generality*, bahwa siswa menghasilkan sebuah aturan atau pola umum.
4. *Manipulation of generality*, bahwa siswa mampu menerapkan aturan atau pola dari berbagai persoalan.

Induksi yang menghasilkan kesimpulan berdasarkan data atau proses serupa dinamakan *analogi*. Jacob (dalam Indrawan,2009 :24) mendefinisikan analogi adalah proses penyimpulan berdasarkan kesamaan data atau fakta. Shurter dan Pierce (Sumarmo,1987) menyatakan bahwa analogi (kadang-kadang disebut analogi induktif) adalah penalaran yang dari satu hal tertentu kepada satu hal lain yang serupa kemudian menyimpulkan apa yang benar untuk satu hal yang lain (Indrawan,2009 :24)

Ada beberapa indikator yang dapat mengukur kemampuan penalaran analogi dan generalisasi sehingga dapat mengukur kemampuan penalaran induktif siswa. Utari (Suratman, 2005) memberikan gambaran indikator yang dapat digunakan untuk mengukur kemampuan penalaran induktif, yaitu;

1. Siswa dapat mengamati pola demi pola (dari suatu pola gambar atau bilangan).
2. Siswa dapat menentukan hubungan antara pola-pola gambar atau bilangan tersebut.
3. Siswa dapat memperkirakan aturan yang membentuk pola-pola terbentuk. (Indrawan,2009 :25)

E. Pola Bilangan

Pengertian yang dikemukakan para ahli tentang pola, dapat dirumuskan bahwa pola adalah sebuah susunan yang mempunyai bentuk yang teratur dari bentuk yang satu ke bentuk berikutnya. Bilangan adalah sesuatu yang digunakan untuk menunjukkan kuantitas (banyak, sedikit) dan ukuran (berat, ringan, panjang, pendek, luas) suatu objek. Bilangan ditunjukkan dengan suatu tanda atau lambang yang disebut angka. Dalam beberapa kasus sering kita temui sebuah bilangan yang tersusun dari bilangan lain yang mempunyai pola tertentu, maka yang demikian itu disebut pola bilangan. (Masduki,2007:142-143)

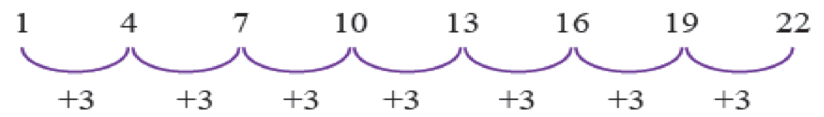
Bilangan-bilangan tersebut tersusun membentuk suatu barisan bilangan. Jadi barisan bilangan adalah himpunan bilangan yang ditulis secara berurut dengan aturan atau pola tertentu.(Yuliatmoko,2008:80) Tiap bilangam dalam barisan tersebut disebut suku barisan.

Berdasarkan polanya, barisan bilangan dibagi menjadi dua bagian, yaitu barisan arimetika (barisan hitung) dan barisan geometri (barisan ukur).

1. Barisan Aritmetika (Barisan Hitung)

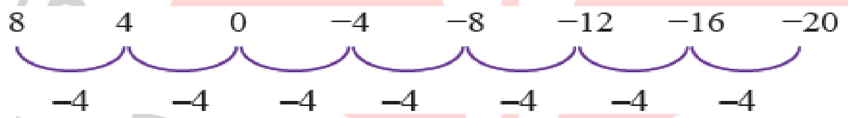
Barisan **aritmetika** adalah barisan bilangan yang mempunyai beda atau selisih yang tetap antara dua suku barisan yang berurutan.

Misal diketahui barisan bilangan:



Barisan bilangan tersebut memiliki beda atau selisih 3 antara dua suku barisan yang berurutan. Berarti, barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmetika.

Contoh lain misalnya :



Barisan bilangan tersebut memiliki beda atau selisih yang tetap antara dua suku barisan yang berurutan, yaitu –4. Berarti, barisan bilangan tersebut merupakan barisan aritmetika.

Dari kedua uraian tersebut, dapat disimpulkan bahwa barisan aritmetika memiliki beda (sering dilambangkan dengan *b*) yang tetap. Jika *b* bernilai positif maka barisan aritmetika itu dikatakan *barisan aritmetika naik*. Sebaliknya, Jika *b* bernilai negatif maka barisan aritmetika itu disebut *barisan arimetika turun*.

Untuk menentukan suku ke-n dari suatu barisan aritmatika dapat diperoleh dengan cara berikut, Apabila *a* menyatakan suku pertama, *n* menyatakan banyak suku, dan *b* adalah beda suatu barisan aritmatika, maka:

$U_1 = a$

$U_2 = a + b$

$U_3 = a + 2b$

. . .

$U_n = a + (n – 1)b$

Jadi, suku ke-*n* barisan aritmatika (U_n) dirumuskan sebagai:

$$\boxed{U_n = a + (n - 1)b}$$

Untuk mencari beda dalam suatu barisan aritmetika, dapat dilihat uraian berikut.

$U_2 = U_1 + b$ maka $b = U_2 - U_1$

$U_3 = U_2 + b$ maka $b = U_3 - U_2$

$U_4 = U_3 + b$ maka $b = U_4 - U_3$

$U_5 = U_4 + b$ maka $b = U_5 - U_4$ ...

$U_n = U_{n-1} + b$ *maka* $b = U_n - U_{n-1}$

Jadi, beda suatu barisan aritmetika dinyatakan sebagai berikut.

$$\boxed{b = U_n - U_{n-1}}$$ (Nunik.A,2007:109)

Jumlah suku-suku barisan dari barisan aritmetika disebut deret aritmetika. rumus untuk menghitung jumlah *n* suku deret aritmetika adalah sebagai berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}(a + U_n)$$

Oleh karena $U_n = a + (n – 1)\, b$, rumus tersebut juga dapat ditulis sebagai berikut.

$$S_n = \frac{n}{2}(2a + (n - 1)\, b)$$ (Nunik.A,2007:115)

2. Barisan Geometri (Barisan Ukur)

Barisan geometri adalah barisan bilangan yang mempunyai rasio tetap antara dua suku barisan yang berurutan. Berbeda dengan barisan aritmetika, selisih antar suku barisan disebut **rasio.** Artinya, suku barisan ditentukan oleh perkalian atau pembagian oleh suatu bilangan tetap dari suku barisan sebelumnya.

Misal diketahui barisan bilangan:

$$3 \xrightarrow{\times 2} 6 \xrightarrow{\times 2} 12 \xrightarrow{\times 2} 24 \xrightarrow{\times 2} 48 \xrightarrow{\times 2} 96 \xrightarrow{\times 2} 192$$

Barisan bilangan tersebut memiliki rasio yang tetap, yaitu 2 atau r = 2. Berarti, barisan tersebut merupakan barisan geometri

Contoh barisan bilangan lain misalnya:

$$81 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 27 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 9 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 3 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} 1 \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{3} \xrightarrow{\times \frac{1}{3}} \frac{1}{9}$$

Barisan bilangan tersebut memiliki rasio yang tetap, yaitu $\frac{1}{3}$. Berarti, bilangan tersebut merupakan barisan geometri.

Uraian tersebut memperjelas bahwa barisan geometri memiliki rasio tetap. Jika r bernilai lebih besar dari 1, barisan geometri tersebut merupakan *barisan geometri naik*. Adapun jika r lebih kecil dari 1, barisan geometri tersebut merupakan *barisan geometri turun*.

Untuk mencari suku ke-n dari barisan geometri dapat dilihat uraian berikut,

Misal barisan bilangan geometri sebagai berikut.

$U_1, U_2, U_3, U_5, U_6, \ldots, U_{n-1}, U_n$

Dari barisan tersebut diperoleh :

$U_1 = a$

$U_2 = U_1 \times = a \times r = ar$

$U_3 = U_2 \times r = (a \times r) \times r = ar^2$

$U_4 = U_3 \times r = (a \times r^2) \times r = ar^3$

$U_5 = U_4 \times r = (a \times r^3) \times r = ar^4$

$U_6 = U_5 \times r = (a \times r^4) \times r = ar^5$

...

$U_n = U_{n-1} \times r = (a \times r^{n-2}) \times r = ar^{n-1}$

Jadi, untuk mencari suku ke-n barisan geometri digunakan rumus sebagai berikut.

$$\boxed{U_n = ar^{n-1}}$$

Untuk mencari rasio dalam suatu barisan geometri, sebagai berikut.

$$U_2 = U_1 \times r \text{ maka } r = \frac{U_2}{U_1}$$

$$U_3 = U_2 \times r \text{ maka } r = \frac{U_3}{U_2}$$

$$U_4 = U_3 \times r \text{ maka } r = \frac{U_4}{U_3}$$

$$\vdots$$

$$U_n = U_{n-1} \times r \text{ maka } r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

Jadi, rasio pada barisan geometri dapat dinyatakan sebagai berikut.

$$r = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$ (Nunik.A,2007:112)

Sama seperti deret aritmetika, deret geometri pun merupakan jumlah suku-suku dari suatu barisan geometri.

Untuk menentukan jumlah suku-suku deret geometri dapat dinyatakan dengan rumus sebagai berikut.

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$ atau $$S_n = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$