BAB V
KETERKAITAN INTEGRAL DENJOY DENGAN INTEGRAL HENSTOCK

Pada Praja (2008:18) telah ditunjukkan bahwa Integral Riemann merupakan bentuk khusus dari Integral Henstock. Pada bab IV telah dijelaskan bahwa Integral Denjoy merupakan perluasan dari Integral Riemann. Pada bab ini akan ditunjukkan bahwa terdapat hubungan antara Integral Denjoy dan Integral Henstock, yaitu jika suatu fungsi terintegral Denjoy maka fungsi tersebut terintegral Henstock dan sebaliknya, sebagaimana ditunjukkan pada teorema 5.1 dan 5.2.

Teorema 5.1

Jika $f \in D^*[a,b]$ *maka* $f \in R^*[a,b]$.

Bukti:

Misal F adalah primitif-D^* dari f dan $F' = f$ pada $[a,b]-S$ dimana S adalah himpunan berukuran nol. Untuk $\xi \in [a,b]-S$, diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang. Pilih $\delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga untuk $\xi \in [a_i,b_i] \subset (\xi-\delta(\xi), \xi+\delta(\xi))$ didapat

$$\left|F(a_i,b_i) - f(\xi)(b_i - a_i)\right| \le \varepsilon(b_i - a_i). \tag{5.1}$$

Karena F kontinu dan ACG^*, maka ada barisan atas interval tutup $\{X_i\}$ pada $[a,b]$ sedemikian sehingga $[a,b]=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i$ sehingga $F\in AC(X_i)$ untuk setiap $i\in\mathbb{N}$. Misal $Y_1 = X_1$, $Y_i = X_i - (X_1\cup X_2\cup\ldots\cup X_{i-1}), i=2,3,\ldots$ dan S_{i_j} adalah himpunan atas titik-titik $x\in S\cap Y_i$ sedemikian sehingga $j-1\le |f(x)| < j$. Dapat dilihat bahwa $S_{i_j}, i, j=1,2,\ldots$ adalah tidak saling tumpang tindih dan $S=\bigcup_{i\in\mathbb{N}} S_{i_j}$.

Karena $F\in AC^*(S_{i_j})$ maka ada $\eta_{i_j} < \dfrac{\varepsilon}{2^{i+j}j}$ sedemikian sehingga untuk sembarang barisan atas interval yang tidak saling tumpang tindih (I_k) yang minimal salah satu dari titik-titik ujung dari (I_k) ada di S_{i_j} dan memenuhi

$\sum_k |I_k| < \eta_{i_j}$ maka berlaku $\sum_k |F(I_k)| < \dfrac{\varepsilon}{2^{i+j}}$.

Selanjutnya jika $F(I_i)=F(b_i)-F(a_i)$ dengan $I_i=[a_i,b_i]$. Pilih G_{i_j} sebagai gabungan atas barisan interval-interval buka sedemikian sehingga

$|G_{i_j}| < \eta_{i_j}$ dan $S_{i_j}\subset G_{i_j}$

dengan $|G_{i_j}|$ adalah panjang total dari G_{i_j}. Selanjutnya untuk $\xi_i\in S_{i_j}$, $i, j=1,2,3,\ldots$

Didefinisikan fungsi $\delta(\xi)>0$ dengan $(\xi_i-\delta(\xi_i), \xi_i+\delta(\xi_i))\subset G_{i_j}$, kemudian pilih sebarang partisi δ-fine $\dot{P}=\{[a_i,b_i];\xi_i\}$. Selanjutnya untuk $i\in\mathbb{N}$ diperoleh

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} |F(a_i,b_i) - f(\xi)(b_i-a_i)| \le \sum_{i\in\mathbb{N}} \varepsilon(b_i-a_i). \qquad (5.2)$$

Karena ada $\xi_i \notin S$ dan $\xi_i \in S$ nyatakan (5.2) dengan $\sum_{i\in\mathbb{N}} = \sum_{i\in\mathbb{N}}{}_1 + \sum_{i\in\mathbb{N}}{}_2$ dengan $\xi_i \notin S$ pada $\sum_{i\in\mathbb{N}}{}_1$ dan $\xi_i \in S$ pada $\sum_{i\in\mathbb{N}}{}_2$ sehingga didapat

$$\left|\sum_{i\in\mathbb{N}} f(\xi_i)(b_i - a_i) - F(a,b)\right| \le \sum_{i\in\mathbb{N}}{}_1 \left| f(\xi_i)(b_i - a_i) - F(a_i,b_i)\right| + \sum_{i\in\mathbb{N}}{}_2 \left|F(a_i,b_i)\right| + \sum_{i\in\mathbb{N}}{}_2 \left| f(\xi_i)(b_i - a_i)\right|$$

$$< \varepsilon(b-a) + \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \frac{\varepsilon}{2^{i+j}} + \sum_{i,j\in\mathbb{N}} j\eta_{i_j}$$

$$< \varepsilon(b-a) + 2\varepsilon.$$

Sehingga $f \in R^*$ dengan primitif $F(a,b)$ pada $[a,b]$.□

Teorema 5.2

Jika $f \in R^*[a,b]$ maka $f \in D^*[a,b]$.

Bukti:

Misal F adalah primitif dari $f \in R^*[a,b]$. Berdasarkan teorema 2.9.5 yang menjamin bahwa primitif F dari $f \in R^*[a,b]$ adalah kontinu dan teorema 3.3.2, F adalah kontinu dan $ACG^*[a,b]$. Kemudian berdasarkan teorema 2.9.6, maka menjamin bahwa $F'(x) = f(x)$ hampir di mana-mana di setiap $x \in [a,b]$, Sehingga berdasarkan definisi f terintegral Denjoy.□

Berikut ini adalah contoh fungsi yang terintegral Denjoy dan terintegral Henstock dan terintegral dengan nilai yang sama.

Contoh 5.3

Misalkan f fungsi Dirichlet yang didefinisikan oleh $f(x)=1$, jika x bilangan rasional dan $f(x)=0$, jika x bilangan irrasional. Akan dibuktikan fungsi f terintegral Henstock pada $[0,1]$ ke 0 dan terintegral Denjoy pada $[0,1]$ ke 0.

Bukti:

Misalkan bilangan-bilangan rasional pada $[0,1]$ disebut sebagai $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. Diberikan $\varepsilon > 0$ didefinisikan $\delta(r_k)=\frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$ dan $\delta(x)=1$, untuk x bilangan irrasional. Diketahui $\delta > 0$ adalah gauge pada $[0,1]$ dan jika partisi $\dot{P}=\{([x_{i-1},x_i],\xi_i)\}_{i=1}^{n}$ adalah $\delta-fine$, maka $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta(\xi_i)$. Karena nilai $f(r_k)(x_i - x_{i-1})$ tak nol hanya pada bilangan rasional dengan label $\xi_i = r_k$, maka

$$0 < f(r_k)(x_i - x_{i-1}) = 1(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{2\varepsilon}{2^{k+2}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$

Dan karena setiap label dapat terjadi dalam setiap dua subinterval

$$0 < \sum_{k=1}^{n} f(r_k)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2\varepsilon}{2^{k+1}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k}} = \varepsilon.$$

Dengan demikian untuk untuk ξ_i bilangan rasional maupun irrasional berlaku

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - 0 \right| < \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sebarang maka f terintegral Henstock pada $[0,1]$ dan

$$(R^*)\int_0^1 f = 0.$$

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa f terintegral Denjoy pada $[0,1]$ dan

$$(D^*)\int_0^1 f = 0.$$

Misal diberikan fungsi $F:[0,1]\rightarrow\mathbb{R}$ dengan

$$F(x)=\begin{cases} x & \text{jika } x\in\mathbb{Q} \\ 0 & \text{jika } x\in[0,1]-\mathbb{Q} \end{cases}$$

sedemikian sehingga $F' = f$ di mana-mana pada $[0,1]$.

Diberikan $X=\{X_i\}\in\alpha[0,1]$, $i=1,2,\ldots$. Akan ditunjukkan $F\in AC^*[X_i]$ untuk setiap $i=1,2,\ldots$

Kasus 1 jika $X_k=[0,1]-\mathbb{Q}$ untuk suatu k .maka $\forall x,y\in[0,1]-\mathbb{Q}$, F adalah Lipschitz pada $[0,1]-\mathbb{Q}$ sehingga berdasarkan teorema 3.2.1.6 dan 3.2.2.3 maka $F\in AC^*[X_k]$

Kasus 2 jika $X_k=\mathbb{Q}$, untuk suatu k maka $\forall x,y\in\mathbb{Q}$, F adalah Lipschitz pada $\mathbb{Q}$ sehingga berdasarkan teorema 3.2.1.6 dan 3.2.2.3 maka $F\in AC^*[X_k]$

Kasus 3 jika $X_k=[0,1]$, untuk suatu K maka $\forall x\in\mathbb{Q}$ dan $\forall y\in[0,1]-\mathbb{Q}$, maka $|F(x)-F(y)|=|x-0|=|x|\le K|x-y|, K>0$. Jadi F adalah Lipschitz pada $[0,1]$ sehingga berdasarkan teorema 3.2.1.6 dan 3.2.2.3 maka $F\in AC^*[X_k]$.

Dari kasus 1,2, dan 3 dapat dilihat bahwa $F \in AC[X_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots$

Karena $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i = [0,1]$ dan $F \in AC[X_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \ldots$ maka berdasarkan definisi $F \in ACG^*[0,1]$.

Karena $F \in ACG^*[0,1]$ dan $F' = f$ di mana-mana pada $[0,1]$ maka berdasarkan definisi $f \in D^*[0,1]$.

Selanjutnya diperoleh

$$D^*\int_0^1 f(x)dx = F(0) - F(1) = x - x = 0. \square$$

Contoh 5.4

Misalkan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, didefinisikan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & \text{, jika } x = \dfrac{1}{k} \text{ dengan } k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{, jika } x \in [0,1] - \left\{ \dfrac{1}{k} : k \in \mathbb{N} \right\} \end{cases}$$

Akan ditunjukkan f terintegral Denjoy dan juga terintegral Henstock pada $[0,1]$.

Pertama akan ditunjukkan f terintegral Denjoy pada $[0,1]$.

Misalkan didefinisikan fungsi $F : [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan aturan

$$F(x) = \begin{cases} \ln x & \text{jika } x = \dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{jika } x \in [0,1] - \left\{ x = \dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\} \end{cases}$$

sedemikian sehingga $F' = f$ di mana-mana pada $[0,1]$.

Diberikan $X = \{X_i\} \in \alpha[0,1]$, $i = 1, 2, \dots$. Akan ditunjukkan $F \in AC^*[X_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots$

Kasus 1: Jika $X_j = \left\{ \frac{1}{k} \mid k \in \mathbb{N} \right\}$ untuk suatu j maka $\forall x, y \in X_j$, F adalah Lipschitz pada X_j sehingga berdasarkan teorema 3.2.1.6 dan 3.2.2.3 maka $F \in AC^*[X_j]$.

Kasus 2: Jika $X_j = [0,1] - \left\{ x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\}$ untuk suatu j maka $\forall x, y \in [0,1] - \left\{ x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\}$, F adalah Lipschitz pada $[0,1] - \left\{ x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\}$ sehingga berdasarkan teorema 3.2.1.6 dan 3.2.2.3 maka $F \in AC^*[X_j]$

Kasus 3: Jika $X_j = [0,1]$ untuk suatu j .maka $\forall x [0,1] - \left\{ x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\}$ dan $\forall y \in \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}$, ,

$|F(x) - F(y)| = |\ln x - 0| = |\ln x| \leq K|x - y|, K > 0$

sehingga F adalah Lipschitz pada $[0,1]$ sehingga berdasarkan teorema 3.2.1.6 dan 3.2.2.3 maka $F \in AC^*[X_j]$.

Dari kasus 1,2, dan 3 dapat dilihat bahwa $F \in AC[X_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots$

Karena $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} X_i = [0,1]$ dan $F \in AC[X_i]$ untuk setiap $i = 1, 2, \dots$ maka berdasarkan definisi $F \in ACG^*[0,1]$.

Karena $F \in ACG^*[0,1]$ dan $F' = f$ di mana-mana pada $[0,1]$ maka berdasarkan definisi $f \in D^*[0,1]$.

Kemudian

$$D^*\int_0^1 f(x)dx = F(1) - F(0) = \ln(1) - 0 = 0. \square$$

Berikut ini akan ditunjukkan fungsi $f \in R^*[0,1]$ dan nilai $(R^*)\int_0^1 f(x)dx = 0.$

Diberikan sembarang $\varepsilon > 0,$ dan didefinisikan gauge pada $[0,1]$ sebagai :

$$\delta_\varepsilon(x) = \begin{cases} \varepsilon x \big/ 2^{\frac{2x+1}{x}} & \text{,jika } x = \dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \\ 1 & \text{,jika } \; x \in [0,1] - \left\{ x = \dfrac{1}{k}, k \in \mathbb{N} \right\} \end{cases}$$

Jika $\dot{P}$ merupakan $\delta - fine$ pada $[0,1],$ maka $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta_\varepsilon(\xi_i).$ Berikutnya, karena hanya $x = \dfrac{1}{k}$ yang berpengaruh terhadap jumlah Riemann, sehingga dipilih $\xi_i = \dfrac{1}{k}.$ Akibatnya

$$0 < f\left(\frac{1}{k}\right)(x_i - x_{i-1}) = k(x_i - x_{i-1}) \leq k2\delta_\varepsilon(\xi_i) = 2k \, \varepsilon\xi_i \big/ 2^{\frac{2\xi_i+1}{\xi_i}} = \frac{\varepsilon}{2^{k+1}}.$$ Selanjutnya

dengan menjumlahkan pada $\dot{P},$ didapatkan :

$$0 \leq S(f;\dot{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} k(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} = \varepsilon.$$

Dapat disimpulkan bahwa $f \in R^*[0,1]$ dan $(R^*)\int_0^1 f(x)dx = 0. \square$