BAB III

VARIASI FUNGSI DAN FUNGSI KONTINU MUTLAK

Fungsi Kontinu mutlak tergeneralisasi dalam arti sempit atau ACG^* (*Generelalized Absolutely Continuous in The Restricted Sense*) adalah salah satu syarat suatu fungsi terintegralkan Denjoy. Dalam mendefinisikan fungsi ACG^* tidak terlepas dari konsep-konsep fungsi bervariasi terbatas (*Bounded Variation*) disingkat *BV* dan fungsi kontinu mutlak (*Absolutely Continuous*) disingkat AC. Berikut ini akan dibahas definisi dari variasi fungsi dan fungsi kontinu mutlak.

3.1 Variasi fungsi

Diberikan fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dan $\pi[a,b]=\{\ P \mid P \text{ partisi pada} [a,b]\}$ yaitu himpuan atas semua partisi pada interval $[a,b]$.Variasi fungsi pada suatu interval tertutup adalah ukuran nilai terbesar dari selisih-selisih nilai fungsi pada setiap partisi $P\in\pi[a,b]$ pada interval tersebut. Variasi fungsi pada suatu interval tertutup dapat dibedakan menjadi dua jenis yaitu variasi lemah dan variasi kuat. Berikut akan dibahas variasi lemah dan variasi kuat f pada $[a,b]$ beserta beberapa sifat-sifat utamanya.

3.1.1 Variasi Lemah fungsi f pada $[a,b]$

Dibawah ini definisi dari variasi lemah f pada $[a,b]$. Sebelumnya didefinisikan variasi pada suatu partisi $P \in \pi[a,b]$ dimana $P = \{I_i \mid I_i = [x_{i-1}, x_i], i = 1, 2, ..., n\}$ dengan $a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_n = b$.

Definisi 3.1.1.1

Variasi fungsi f pada partisi $P \in \pi[a,b]$ P adalah

$$\operatorname{var}(f;P) = \sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right|$$

Definisi 3.1.1.2

Variasi lemah f pada interval $[a,b]$ adalah

$$Var(f;[a,b]) = \sup_{P \in \pi[a,b]} \{\operatorname{var}(f;P)\}$$

Selanjutnya variasi lemah f pada interval $[a,b]$ terbatas yaitu jika nilainya berhingga.

Definisi 3.1.1.3

Fungsi f disebut bervariasi terbatas (BV) pada $[a,b]$ jika variasi lemah f pada $[a,b]$ berhingga atau

$$Var(f;[a,b]) < \infty .$$

Pernyataan pada definisi 3.1.1.3 ekuivalen dengan pernyataan ada bilangan $M > 0$ sedemikian sehingga $Var\left(f;[a,b]\right) \le M$. Selanjutnya fungsi yang bervariasi terbatas disebut fungsi yang BV. Pada tulisan ini, didefinisikan $BV[a,b]$ sebagai himpunan semua fungsi yang BV pada $[a,b]$ yaitu $BV[a,b] = \left\{ f \mid Var\left(f;[a,b]\right) < \infty \right\}$. Berikut ini adalah contoh fungsi BV.

Contoh 3.1.1.4

Jika fungsi f Lipschitz pada $[a,b]$ maka $f \in BV[a,b]$.

Bukti:

Karena f adalah fungsi Lipschitz pada $[a,b]$ berdasarkan Definisi 2.4.5 maka ada konstanta Lipschitz K sedemikian sehingga untuk sebarang partisi P pada $[a,b]$ dan $[x_{i-1}, x_i] \in P$ dengan $i = 1, 2, 3, \ldots, n,$ berlaku

$\left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| \le K \left| x_i - x_{i-1} \right|$. Karena $[a,b] = \bigcup_{i=1}^{n} [x_{i-1}, x_i]$ maka

$$\sum_{i=1}^{n} \left| f(x_i) - f(x_{i-1}) \right| \le \sum_{i=1}^{n} K \left| x_i - x_{i-1} \right| = K(b-a) < \infty . \square$$

Berikut ini dibahas beberapa sifat utama dari fungsi-fungsi yang bersifat BV atau $f \in BV[a,b]$.

Teorema 3.1.1.5

Jika turunan f *terbatas pada* $[a,b]$ *maka* $f \in BV[a,b]$.

Bukti:

Ambil sebarang partisi $P \in \pi[a,b]$ dengan $P = \{[x_{i-1}, x_i]; i = 1,2,3,...,n\}$. Karena f terdiferensialkan dan berdasarkan teorema nilai rata-rata maka ada $c_i \in (x_{i-1}, x_i)$ untuk sembarang $[x_{i-1}, x_i] \in P$ dengan $i = 1,2,...,n$ sehingga $|f(x_i) - f(x_{i-1})| = |f'(c_i)||(x_i - x_{i-1})|$. Kemudian karena f terbatas pada $[a,b]$ maka terdapat $M > 0$ sedemikin sehingga $|f'(x)| \le M, \forall x \in [a,b]$. Selanjutnya diperoleh,

$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})| = \sum_{i=1}^{n} |f'(c_i)|(x_i - x_{i-1}) \le M \sum_{i=1}^{n} |x_{i-1} - x_i| = M(b-a),$ dimana $M = \sup_{x\in[a,b]} \{|f'(x)|\}$.□

Teorema 3.1.1.6

Jika $f, g \in BV[a,b]$ *maka* $f+g, f-g, fg$ *adalah* $BV[a,b]$.

Bukti:

Karena $f, g \in BV[a,b]$ maka ada $M_1 > 0$ sehingga

$$Var(f;[a,b]) = \sup_{P\in\pi} \left\{ \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(x_{i-1})|; [x_{i-1}, x_i] \in P \right\} \le M_1$$

dan $\exists M_2 > 0$ sehingga

$$Var\left(g;[a,b]\right) = \sup_{P\in\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right|;[x_{i-1},x_i]\in P\right\} \le M_2$$

Misal $h(x) = f(x) + g(x)$, $\forall x \in [a,b]$. Pada sembarang interval $[x_{i-1},x_i]\in P$ dengan $P\in\pi[a,b]$ maka

$$\left|h(x_i) - h(x_{i-1})\right| = \left|f(x_i) + g(x_i) - \left(f(x_{i-1}) + g(x_{i-1})\right)\right|$$

$$\le \left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right| + \left|g(x_i) - g(x_{i-1})\right|$$

selanjutnya diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n}\left|h(x) - h(x_{i-1})\right| \le \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i) - g(x_{i-1})\right|$$

$$\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i\in\square}\left|h(x) - h(x_{i-1})\right|\right\} = \sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i\in\square}\left|f(x_i) + g(x_{i-1}) - \left(f(x_{i-1}) + g(x_{i-1})\right)\right|;\left[x_{i-1},x_i\right]\in P\right\}$$

$$\le \sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i) - f(x_{i-1})\right|;[x_{i-1},x_i]\in P\right\} + \sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i) - g(x_{i-1})\right|;[x_{i-1},x_i]\in P\right\}$$

$$\le M_1 + M_2 = M.$$

Jadi ada $M > 0$ sehingga

$$Var\left(h;[a,b]\right) = \sup_{P\in\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|h(x_i) - h(x_{i-1})\right|;[x_{i-1}.x_i]\in P\right\} \le M$$

dengan kata lain $f + g \in BV[a,b]$.

Misal $l(x)=f(x)-g(x),\ \ \forall x\in[a,b]$. Ambil sembarang interval $[x_{i-1},x_i]\in P$ dengan $P\in\pi[a,b]$ maka

$$\begin{aligned}
\left|l(x_i)-l(x_{i-1})\right| &= \left|f(x_i)-g(x_i)-\left(f(x_{i-1})-g(x_{i-1})\right)\right| \\
&= \left|f(x_i)-g(x_i)-f(x_{i-1})+g(x_{i-1})\right| \\
&\le \left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|+\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|
\end{aligned}$$

selanjutnya diperoleh

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n}\left|l(x)-l(x_{i-1})\right| &= \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-g(x_{i-1})-\left(f(x_{i-1})-g(x_{i-1})\right)\right| \\
&\le \sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|+\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|
\end{aligned}$$

$$\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i\in\square}\left|l(x)-l(x_{i-1})\right|\right\}=\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i\in\square}\left|f(x_i)+g(x_{i-1})-\left(f(x_{i-1})+g(x_{i-1})\right)\right|;[x_{i-1},x_i]\in P\right\}$$

$$\le \sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|;[x_{i-1},x_i]\in P\right\}+\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|;[x_{i-1},x_i]\in P\right\}$$

$$\le M_1+M_2=M$$

Jadi ada $M>0$ sehingga

$$Var\left(l;[a,b]\right)=\sup_{P\in\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|l(x_i)-l(x_{i-1})\right|;[x_{i-1}.x_i]\in P\right\}\le M$$

dengan kata lain $f-g\in BV[a,b]$.

Akan dibuktikan bahwa $fg\in BV[a,b]$.

Misal $z(x)=f(x)g(x)$, $\forall x\in[a,b]$. Pada sembarang interval $[x_{i-1},x_i]\in P$ dengan $P\in\pi[a,b]$ maka

$$\left|z(x_i)-z(x_{i-1})\right|=\left|f(x_i)g(x_i)-\left(f(x_{i-1})g(x_{i-1})\right)\right|$$

$$=\left|f(x_i)g(x_i)-f(x_i)g(x_{i-1})+f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_{i-1})\right|$$

$$\leq\left|f(x_i)g(x_i)-f(x_i)g(x_{i-1})\right|+\left|f(x_i)g(x_{i-1})-f(x_{i-1})g(x_{i-1})\right|$$

$$=\left|f(x_i)\right|\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|+\left|g(x_{i-1})\right|\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|,$$

selanjutnya diperoleh

$$\sum_{i=1}^{n}\left|z(x_i)-z(x_{i-1})\right|\leq\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)\right|\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|+\left|g(x_{i-1})\right|\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|.$$

Pilih $M_1 = \max_{x_i\in[a,b]}\left\{f(x_i)\right\}$ dan $M_2 = \max_{x_{i-1}\in[a,b]}\left\{g(x_{i-1})\right\}$

$$\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i=1}^{n}z(x)-z(x_{i-1})\right\}\leq$$

$$\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|f(x_i)\right|\left|g(x_i)-g(x_{i-1})\right|\right\}+\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|g(x_{i-1})\right|\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\right\}$$

$$\leq M_1M_1+M_2M_2=M\ .$$

Jadi ada $M>0$ sehingga

$$Var\left(z;[a,b]\right)=\sup_{P\in\pi}\left\{\sum_{i=1}^{n}\left|z(x_i)-z(x_{i-1})\right|;[x_{i-1}.x_i]\in P\right\}\leq M$$

dengan kata lain $fg\in BV[a,b]$.□

3.1.2 Variasi Kuat Fungsi f pada $[a,b]$

Selanjutnya akan didefinisikan osilasi pada suatu interval tertutup. Berbeda dengan variasi fungsi f pada $[a,b]$ dimana batas atas terkecil atas jumlah dari selisih nilai fungsi f diambil pada titik–titik ujung interval $[x_{k-1}, x_k] \subset [a,b], k = 1, 2, \ldots n$ yang tidak saling tumpang tindih, sedangkan pada suatu osilasi batas atas terkecil dari selisih nilai-nilai fungsi f diambil pada sembarang titik-titik pada interval $[x_{k-1}, x_k] \subset [a,b], k = 1, 2, \ldots n.$ Hal ini didefinisikan sebagai berikut.

Definisi 3.1.2.1

Osilasi dari f pada interval $[c,d] \subset [a,b]$

$$\omega\left(f;[c,d]\right) = \sup_{x,y\in[c,d]} \left\{\left|f(x) - f(y)\right|\right\}.$$

Perhatikan barisan interval–interval tertutup bagian dari $[a,b]$ yaitu $X = \{X_i\} = \{[x_{i-1}, x_i], i \in \mathbb{N}\}$ dengan $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [x_{i-1}, x_i] = [a,b]$. Catatan bahwa interval–interval $[x_{i-1}, x_i]$ sembarang, dalam hal ini bisa tumpang tindih ataupun tidak tumpang tindih. Selanjutnya didefinisikan $\alpha[a,b] = \{X \mid X = \{X_i\}, i \in \mathbb{N}\}$ adalah himpunan atas barisan interval–interval tutup pada $[a,b]$ dengan sifat $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} X_i = [a,b]$ sehingga untuk sembarang $P \in \pi[a,b]$ maka $P \in \alpha[a,b]$.

Selanjutnya untuk bahasan di bawah ini diberikan sembarang barisan interval–interval tertutup $X = \{[x_{i-1}, x_i], i \in \mathbb{N}\}$ pada $[a,b]$ dengan $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} [x_{i-1}, x_i] = [a,b]$. Berikut adalah definisi variasi kuat suatu fungsi f pada $[a,b]$.

Definisi .3.1.2.2

Variasi kuat f pada interval $[a,b]$ adalah

$$Var^*\left(f;[a,b]\right) = \sup_{X\in\alpha[a,b]} \left\{ \sum_{i\in\mathbb{N}} \omega\left(f;[x_{i-1}, x_i]\right) \right\},$$

Selanjutnya variasi kuat f pada interval $[a,b]$ terbatas jika nilainya berhingga atau $Var^*\left(f;[a,b]\right) < \infty$, dan fungsi yang memenuhi sifat tersebut di sebut fungsi bervariasi terbatas dalam arti sempit. Berikut adalah definisi dari fungsi bervariasi terbatas dalam arti sempit.

Definisi 3.1.2.3

Fungsi f pada $[a,b]$ disebut bervariasi terbatas dalam arti sempit (BV^*) jika ada bilangan $M > 0$ sedemikian sehingga

$$Var^*\left(f;[a,b]\right) \le M .$$

Selanjutnya suatu fungsi yang bervariasi terbatas dalam arti sempit disebut fungsi yang BV^*. Pada tulisan ini, didefinisikan $BV^*[a,b]$ sebagai himpunan semua fungsi yang BV^* pada $[a,b]$ yaitu $BV^*[a,b] = \left\{ f \mid Var^*\left(f;[a,b]\right) \le M \right\}$.

Berikut ini adalah teorema yang menyatakan keterkaitan antara $f \in BV$ dengan $f \in BV^*$.

Teorema 3.1.2.4

Jika $f \in BV^*[a,b]$ maka $f \in BV[a,b]$.

Bukti:

Karena $f \in BV^*[a,b]$ maka berdasarkan definisi terdapat $M > 0$ sehingga $Var^*\left(f;[a,b]\right) \le M$ atau $\sup\limits_{X \in \alpha[a,b]} \left\{ \sum\limits_{i \in \mathbb{N}} \omega\left(f;[x_{i-1}, x_i]\right) \mid [x_{i-1}, x_i] \in X \right\} \le M$, untuk setiap $X \in \alpha[a,b]$.

Karena $P \in \pi[a,b]$ maka $P \in \alpha[a,b]$ sehingga

$\sup\limits_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum\limits_{i\in\square}\omega\left(f;[x_{i-1},x_i]\right) \mid [x_{i-1},x_i]\in P\right\}\leq M,$ kemudian karena $\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\leq\omega\left(f;[x_{i-1},x_i]\right)=\sup\limits_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\left\{\left|f(x)-f(y)\right|\right\},$ selanjutnya diperoleh $\sum\limits_{i\in\square}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\leq\sum\limits_{i\in\square}\sup\limits_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\left\{\left|f(x)-f(y)\right|\right\}.$

Sehingga untuk setiap $P\in\pi[a,b]$ maka

$$\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i\in\square}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\right\}\leq\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum_{i\in\square}\sup_{x,y\in[x_{i-1},x_i]}\left\{\left|f(x)-f(y)\right|\right\}\right\}\leq M$$

dengan demikian $\sup\limits_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sum\limits_{i\in\square}\left|f(x_i)-f(x_{i-1})\right|\right\}=Var\left(f;[a,b]\right)\leq M.$

Jadi terbukti $f\in BV^*[a,b]$ maka $f\in BV[a,b].\square$

Teorema 3.1.2.5

Jika $f\in BV[a,b]$ *maka* $f\in BV^*[a,b].$

3.1.3 Fungsi BVG dan BVG^*

Berikut ini akan didefinisikan fungsi BVG (*Generalized Bounded Variation in the Wide Sense*) dan BVG^* (*Generalized Bounded Variation in the Restricted Sense*). Kedua fungsi ini merupakan perluasan dari fungsi BV dan BV^*. Misal diberikan sembarang $X\in\alpha[a,b].$

Definisi 3.1.3.1

Fungsi f *pada* $[a,b]$ *disebut bervariasi terbatas tergeneralisasi (BVG) pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $X \in \alpha[a,b]$, $f \in BV(X_i)$ *untuk setiap* $i \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya fungsi yang bervariasi terbatas tergeneralisasi ditulis BVG. Pada tulisan ini, didefinsikan $BVG[a,b]$ sebagai himpunan semua fungsi yang BVG pada $[a,b]$ yaitu $BVG[a,b] = \{ f \mid f \in BV(X_i), \forall X_i \in X, i \in \mathbb{N} \}$.

Definisi 3.1.3.2

Fungsi f *pada* $[a,b]$ *disebut bervariasi terbatas tergeneralilsasi dalam arti sempit (* BVG^* *) pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $X = \{X_i\} \in \alpha[a,b]$, $f \in BV^*(X_i)$ *untuk setiap* $i \in \mathbb{N}$.

Selanjutnya fungsi yang bervariasi terbatas tergeneralisasi dalam arti sempit ditulis BVG^*. Pada tulisan ini didefinisikan $BVG[a,b]$ sebagai himpunan semua fungsi yang BVG^* pada $[a,b]$ yaitu $BVG^*[a,b] = \{ f \mid f \in BV^*(X_i), \forall X_i \in X, i \in \mathbb{N} \}$.

Contoh 3.1.3.3

Diberikan fungsi $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ dengan $f(x)=2x$, $\forall x\in[0,1]$, dapat ditunjukkan bahwa $f\in BVG^{*}[0,1]$.

Bukti:

Diberikan $X=\{X_i=[x_{i-1},x_i]\}\in\alpha[0,1]$, dengan X_i adalah himpunan tertutup dan terbatas pada $[0,1]$. Ambil sembarang partisi $P\in\pi[X_i]$ dengan $P=\{[c_k,d_k];k=1,2,...,m\}$. Selanjutnya ambil $x,y\in[c_k,d_k]$ dengan $[c_k,d_k]\in P$ maka $|f(x)-f(y)|=|2x-2y|=2|x-y|\le K|x-y|$, untuk suatu $K\ge 2$.

Berdasarkan Definisi 2.4.5 f adalah Lipschitz pada $[c_k,d_k]$.

Karena $[x_{i-1},x_i]=\bigcup_{i=1}^{m}[c_k,d_k]$ maka berdasarkan contoh 3.1.1.4 maka $f\in BV[X_i]$.

Kemudian karena $f\in BV[X_i]$ berdasarkan teorema 3.1.2.5 maka $f\in BV^{*}[X_i]$.

Selanjutnya karena $f\in BV^{*}[X_i]$ untuk setiap $i=1,2,...$ maka berdasarkan definisi $f\in BVG^{*}[a,b]$. □

Berikut ini adalah teorema yang menyatakan hubungan antara fungsi yang BVG dan fungsi yang BVG^{*}.

Teorema 3.1.3.4

Jika $f\in BVG^{*}[a,b]$ *maka* $f\in BVG[a,b]$

Bukti:

Karena $f \in BVG^{*}[a,b]$ maka berdasarkan definisi untuk setiap $X \in \alpha[a,b]$ dengan $X = \{X_i\}$ maka $f \in BV^{*}(X_i)$. Karena $f \in BV^{*}(X_i)$ maka berdasarkan teorema 3.1.2.4 maka $f \in BV(X_i)$. Selanjutnya, berdasarkan definisi 3.1.3.1 $f \in BVG[a,b]$.

Dengan demikian terbukti bahwa jika $f \in BVG[a,b]$ maka $f \in BVG^{*}[a,b]$.□

3. 2 Fungsi Kontinu Mutlak

Selanjutnya berikut akan dibahas definisi fungsi AC (*Absolutely Continuous), ACG (Generalized absolutely continuous in the Wide Sense),* AC^{*} *(Absolutely Continuous in the Restricted Sense),* dan ACG^{*} *(Generalized Absolutely Continuous in the Restricted Sense)* yang merupakan konsep dasar dari Integral Denjoy.

3.2.1 Fungsi AC

Berikut ini adalah definisi dari fungsi f yang kontinu mutlak pada interval $[a,b]$. Dalam hal ini interval $[a,b]$ dibagi menjadi interval bagian tutup yang tidak saling tumpang tindih.

Definisi 3.2.1.1

Sebuah fungsi f disebut kontinu mutlak dalam arti luas (AC) pada $[a,b]$ jika untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\eta > 0$ sedemikian sehingga jika

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| < \eta \text{ maka } \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon ,$$

dengan $\{[a_k, b_k], 1 \le k \le n\}$ adalah koleksi berhingga atau tak berhingga atas interval-interval yang tidak saling tumpang tindih dengan titik-titik ujung $a_k, b_k \in [a,b]$.

Pada tulisan ini, didefinisikan $AC[a,b]$ sebagai himpunan semua fungsi yang AC pada $[a,b]$ yaitu $AC[a,b] = \{ f \mid f$ adalah AC pada $[a,b] \}$.

Selanjutnya teorema berikut menjelaskan bahwa fungsi yang AC adalah selalu kontinu.

Teorema 3.2.1.2

Jika $f \in AC[a,b]$ maka f kontinu di $[a,b]$.

Bukti:

Karena $f \in AC[a,b]$ maka berdasarkan definisi jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang maka ada $\eta > 0$ sedemikian sehingga untuk setiap barisan berhingga atau tak berhingga atas interval–interval $\{[a_k, b_k]\}$, untuk setiap $i \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga $\sum_{k\in \mathbb{N}} |b_k - a_k| < \eta$ maka

$$\sum_{k\in \mathbb{N}} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon .$$

Ambil sembarang $x \in [a,b]$, maka terdapat $i \in \mathbb{N}$ sehingga $x \in [a_i, b_i]$.

Karena $|b_i - a_i| < \sum_{k\in \mathbb{N}} |a_k - b_k| < \eta$, dan $\forall y \in [a,b]$ dengan $|x - y| < \eta$ maka

$$|f(x) - f(y)| \le \sum_{k\in \mathbb{N}} |f(a_k) - f(b_k)| < \varepsilon.$$

Dengan demikian f kontinu di $x \in [a,b]$.□

Berikut ini adalah contoh fungsi kontinu tetapi $f \notin AC[a,b]$.

Contoh 3.2.1.3

Diberikan $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dengan aturan

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \dfrac{1}{x^2}, & \text{untuk } x \in (0,1] \\ 0 & ,\text{untuk } x = 0 \end{cases}$$

Bukti:

Dapat ditunjukkan f kontinu pada $[0,1]$. Selanjutnya akan ditunjukkan $f \notin AC[a,b]$.

Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang , pilih untuk $n \in \mathbb{N}$ sedemikian sehingga

$$\sqrt{\frac{2}{(2n-1)\pi}} < \eta$$

misal $\{[a_i, b_i]\}, i \in \mathbb{N}$ adalah koleksi atas interval tutup yang tidak saling tumpang tindih pada $[a,b]$ dengan

$$a_i = \sqrt{\frac{2}{\pi(2i+1)}} \text{ dan } b_i = \sqrt{\frac{2}{\pi(2i-1)}}, \text{ dengan } \sum_{i\in\mathbb{N}} (b_i - a_i) = \sqrt{\frac{2}{(2n-1)\pi}} < \eta$$

sehingga

$$\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{N}} \left| f(b_i) - f(a_i) \right| &= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left| b_i^2 \sin\frac{1}{b_i^2} - a_i^2 \sin\frac{1}{a_i^2} \right| \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left| \frac{2}{(2i-1)\pi} \sin\left(i\pi - \tfrac{\pi}{2}\right) - \frac{2}{(2i+1)\pi} \sin\left(i\pi + \tfrac{\pi}{2}\right) \right| \\
&= \sum_{i\in\mathbb{N}} \left| \frac{2}{(2i-1)\pi} + \frac{2}{(2i+1)\pi} \right| = \frac{2}{\pi} \sum_{i\in\mathbb{N}} \left| \frac{4i}{(4i^2-1)} \right| > \sum_{i\in\mathbb{N}} \frac{2}{\pi i} \to \infty
\end{aligned}$$

Jadi $f \notin AC[0,1]$.□

Berikut ini akan disajikan beberapa sifat utama dari fungsi-fungsi yang bersifat AC.

Teorema 3.2.1.4

Jika $f, g \in AC[a,b]$ maka $f+g, f-g, fg,$ adalah $AC[a,b]$.

Bukti:

Akan dibuktikan $f+g\in AC[a,b]$.

Karena $f\in AC[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon>0$ sembarang ada $\eta_1>0$ sedemikian sehingga $\forall\,[a_k,b_k]$ adalah barisan atas interval-interval bagian dari $[a,b]$ yang tidak saling tumpang tindih jika

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}|b_k-a_k|<\eta \text{ maka } \sum_{k\in\mathbb{N}}|f(b_k)-f(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.1}$$

karena $g\in AC[a,b]$ maka jika diberikan $\varepsilon>0$ sembarang ada $\eta_2>0$ sedemikian sehingga $\forall\,[a_k,b_k]$ adalah barisan atas interval-interval bagian dari $[a,b]$ yang tidak saling tumpang tindih jika

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}|b_k-a_k|<\eta_2 \text{ maka } \sum_{k\in\mathbb{N}}|g(b_k)-g(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{3.2}$$

pilih $\eta=\min\{\eta_1,\eta_2\}$ sedemikian sehingga jika diberikan $\varepsilon>0$ sembarang maka ada $\eta>0$ sedemikian sehingga jika

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}|b_k-a_k|<\eta \text{ maka}$$

$$\sum_{k\in\mathbb{N}}\left|f(b_k)+g(b_k)-\left(f(a_k)+g(a_k)\right)\right|=\sum_{k\in\mathbb{N}}\left|f(b_k)-f(a_k)+g(b_k)-g(a_k)\right|$$

$$\leq\sum_{k\in\mathbb{N}}|f(b_k)-f(a_k)|+\sum_{k\in\mathbb{N}}|g(b_k)-g(a_k)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Akan dibuktikan $f-g\in AC[a,b]$

Berdasarkan (3.1) dan (3.2)

plih $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ sedemikian sehingga jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang maka ada $\eta > 0$ sedemikian sehingga $\forall [a_k, b_k]$ adalah barisan atas interval-interval bagian dari $[a,b]$ yang tidak saling tumpang tindih $\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| < \eta$ maka

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left| f(b_k) - g(a_k) - \left(f(a_k) - g(a_k) \right) \right| = \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| f(b_k) - f(a_k) + g(a_k) - g(b_k) \right|$$

$$\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| + \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| g(b_k) - g(a_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Akan dibuktikan $fg \in AC[a,b]$

Karena $f \in AC[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\eta > 0$ sedemikian sehingga $\forall [a_k, b_k]$ adalah barisan atas interval-interval bagian dari $[a,b]$ yang tidak saling tumpang tindih jika

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| < \eta \quad \text{maka} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Karena $g \in AC[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ ada $\eta > 0$ sedemikian sehingga $\forall [a_k, b_k]$ adalah barisan atas interval-interval bagian dari $[a,b]$ yang tidak saling tumpang tindih jika

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| < \eta \quad \text{maka} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left| g(b_k) - g(a_k) \right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang. Pilih $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$ dan $M = \max\{M_1, M_2\}$ dengan $M_1 = \max\{f(a_i)\}$ dan $M_2 = \max\{g(b_i)\}, i \in \mathbb{N}$.

$$\left| f(a_i)g(a_i) - f(b_i)g(b_i) \right| = \left| f(a_i)g(a_i) - f(a_i)g(b_i) + f(a_i)g(b_i) - f(b_i)g(b_i) \right|$$

$$\leq \left| f(a_i)g(a_i) - f(a_i)g(b_i) \right| + \left| f(a_i)g(b_i) - f(b_i)g(b_i) \right|$$

$$= \left| f(a_i) \right| \left| g(a_i) - g(b_i) \right| + \left| g(b_i) \right| \left| f(a_i) - f(b_i) \right|$$

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \left| f(a_i) g(a_i) - f(b_i) g(b_i) \right| \le \sum_{i \in \mathbb{N}} \left| f(a_i) \right| \left| g(a_i) - g(b_i) \right| + \left| g(b_i) \right| \left| f(a_i) - f(b_i) \right|$$

$$\le M \frac{\varepsilon}{2M} + M \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

Karena $\varepsilon > 0$ sembarang maka $fg \in AC[a,b]$.□

Teorema 3.2.1.5

Jika $f \in AC[a,b]$ *maka* $f \in BV[a,b]$.

Bukti:

Karena $f \in AC[a,b]$ maka jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang ada $\eta > 0$ sedemikian sehingga untuk $\{[a_k, b_k], 1 \le k \le n\}$ adalah koleksi berhingga atau tak berhingga atas interval-interval yang tidak saling tumpang tindih dengan titik-titik ujung $a_k, b_k \in [a,b]$, jika

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| b_k - a_k \right| < \eta \text{ maka } \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| < \varepsilon,$$

sehingga

$$\sup_{[a_k, b_k] \in P} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| b_k - a_k \right| \right\} < \eta \text{ maka } \sup_{[a_k, b_k] \in P} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| f(b_k) - f(a_k) \right| \right\} < \varepsilon.$$

Selanjutnya untuk setiap $P \in \pi[a,b]$ dengan panjang $(b-a)$

$$\sup_{P \in \pi[a,b]} \left\{ \sup_{[a_k, b_k] \in P} \left\{ \sum_{k \in \mathbb{N}} \left| b_k - a_k \right| \right\} \right\} < \frac{(b-a)\varepsilon}{\eta}$$

sehingga

$$\sup_{P\in\pi[a,b]}\left\{\sup_{[a_k,b_k]\in P}\left\{\sum_{k\in\mathbb{N}}\left|f(b_k)-f(a_k)\right|\right\}\right\}<(b-a)$$

dengan kata lain $Var\left(f;[a,b]\right)\leq(b-a)$. Jadi $Var\left(f;[a,b]\right)$ terbatas.□

Teorema 3.2.1.6

Jika f adalah fungsi Lipschitz pada $[a,b]$ maka $f\in AC[a,b]$.

Bukti:

Diberikan $\varepsilon>0$ sembarang ada $\eta>0$ sehingga $0<\eta<\dfrac{\varepsilon}{M}$. Selanjutnya untuk koleksi berhingga atas interval-interval yang tidak saling tumpang tindih $\{[a_i,b_i]\}$, dengan $a_i,b_i\in[a,b]$ dan memenuhi

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i-a_i)<\eta$$

maka berakibat

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|<M\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i-a_i)<M\eta=\varepsilon\,.$$

Karena $\varepsilon>0$ sebarang maka f adalah $AC[a,b]$.□

3.2.2 Fungsi AC^*

Selanjutnya akan didefinisikan fungsi yang AC^*. Fungsi yang AC^* merupakan kasus khusus dari fungsi yang AC hal ini dapat dilihat pada definisi berikut.

Definisi 3.2.2.1

Sebuah fungsi f *disebut kontinu mutlak dalam arti sempit (* AC^* *) pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $\varepsilon > 0$ *ada* $\eta > 0$ *sedemikian sehingga jika*

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| < \eta \text{ maka } \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega(f;[a_k,b_k]) < \varepsilon ,$$

dengan $\{[a_k,b_k], 1 \le k \le n\}$ *adalah koleksi berhingga atau tak berhingga atas interval-interval yang tidak saling tumpang tindih dengan titik-titik ujung* $a_k, b_k \in [a,b]$.

Selanjutnya fungsi yang kontinu mutlak dalam arti sempit disebut fungsi yang AC^*. Pada tulisan ini, didefinisikan $AC^*[a,b]$ sebagai himpunan semua fungsi yang AC^* pada $[a,b]$ yaitu $AC^*[a,b] = \{ f \mid f$ adalah AC^* pada $[a,b]\}$. Dalam hal ini dapat dilihat pula bahwa jika $f \in AC^*[a,b]$ maka $f \in BV^*[a,b]$. Berikut ini adalah teorema yang menyatakan bahwa fungsi yang $AC^*[a,b]$ adalah $AC[a,b]$.

Teorema 3.2.2.2

Jika $f \in AC^*[a,b]$ *maka* $f \in AC[a,b]$.

Bukti:

Karena $f \in AC^{*}[a,b]$ berdasarkan definisi jika diberikan $\varepsilon > 0$ sebarang ada $\eta > 0$ sedemikian sehingga untuk sebarang barisan atas interval $\{[a_k, b_k]\}$ yang tidak saling tumpang tindih sedemikian sehingga jika

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |b_k - a_k| < \eta \quad maka \quad \sum_{k\in\mathbb{N}} \omega(f;[a_k,b_k]) < \varepsilon.$$

Perhatikan $\omega(f;[a_k,b_k]) = \sup\limits_{x,y\in[a_k,b_k]} \{|f(x) - f(y)|\}$ sehingga

$|f(b_k) - f(a_k)| \le \sup\limits_{x,y\in[a_k,b_k]} \{|f(x) - f(y)|\}$, untuk suatu $k \in \mathbb{N}$. Kemudian untuk setiap $k \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(b_k) - f(a_k)| \le \sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{x,y\in[a_k,b_k]} \{|f(x) - f(y)|\} < \varepsilon$$

akibatnya

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon .$$

Dengan kata lain jika $f \in AC[a,b]$.□

Selanjutnya teorema berikut menyatakan hubungan antara $f \in AC[a,b]$ dengan $f \in AC^{*}[a,b]$.

Teorema 3.2.2.3

Jika $f \in AC[a,b]$ *maka* $f \in AC^{*}[a,b]$.

Bukti:

Karena $f \in AC[a,b]$ berdasarkan definisi jika diberikan $\varepsilon > 0$ sembarang maka terdapat $\eta > 0$ sedemikian sehingga untuk $\{[a_i, b_i]\}, i \in \mathbb{N}$ adalah koleksi berhingga atas interval yang tidak saling tumpang tindih pada $[a,b]$ dengan $a_i, b_i \in [a,b]$ yang memenuhi $\sum_{i \in \mathbb{N}} (b_i - a_i) < \eta$ maka

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \left| f(b_i) - f(a_i) \right| < \varepsilon. \tag{3.3}$$

Karena $f \in AC[a,b]$ maka f kontinu pada $[a,b]$ (Teorema 3.2.1.2). Karena f kontinu pada $[a,b]$ maka terdapat $x_i, y_i \in [a_i, b_i]$ sedemikian sehingga

$f(x_i) = \sup\limits_{x \in [a_i, b_i]} \{f(x)\}$ dan $f(y_i) = \inf\limits_{y \in [a_i, b_i]} \{f(y)\}$

maka diperoleh

$$\begin{aligned} f(x_i) - f(y_i) &= \sup_{x, y \in [a_i, b_i]} \{f(x) - f(y)\} \\ &= \omega(f; [a_i, b_i]) \end{aligned} \tag{3.4}$$

Ambil $z_i = \min\{x_i, y_i\}$ dan $\bar{z}_i = \max\{x_i, y_i\}$ maka didapat

$[z_i, \bar{z}_i] \subseteq [a_i, b_i], \forall i \in \mathbb{N}$.

Akibatnya $\sum_{i \in \mathbb{N}} (z_i - \bar{z}_i) \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} (b_i - a_i) < \eta.$

Berdasarkan (3.3) dan (3.4) diperoleh

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} \omega(f : [a_i, b_i]) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \left| f(\bar{z}_i) - f(z_i) \right| < \varepsilon. \tag{3.5}$$

Karena (3.5) berlaku untuk setiap $\varepsilon > 0$ maka $f \in AC^*[a,b]$. □

Contoh 3.2.2.4

Diberikan fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dengan aturan

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{untuk setiap } x\in \textit{rasional}\\ 0, & \text{untuk setiap } x\in \textit{irrasional}\end{cases}$$

Bukti:

Diberikan $\varepsilon>0$ sembarang , pilih $\eta=\varepsilon>0$. Jika $\{[a_i,b_i]\}, i\in\mathbb{N}$ adalah koleksi atas interval tutup yang tidak saling tumpang tindih pada $[a,b]$ dengan $a_i,b_i\in[a,b]-\mathbb{Q}$ dan misal

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i-a_i)<\eta$$

maka diperoleh

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}\left|f(b_i)-f(a_i)\right|=\sum_{i\in\mathbb{N}}0=0<\varepsilon.$$

Karena untuk setiap $\varepsilon>0$ sembarang maka $f\in AC\left[[a,b]-\mathbb{Q}\right]$. Kemudian berdasarkan teorema 3.2.2.3 maka $f\in AC^*\left[[a,b]-\mathbb{Q}\right]$.

Selanjutnya akan ditunjukkan $f\notin AC^*[a,b]$.

Pilih $\varepsilon>0$, dengan $0<\varepsilon<1$. Diberikan $\eta>0$ sembarang maka untuk $\{[a_i,b_i]\}, i\in\mathbb{N}$ koleksi berhingga atau tak berhingga atas interval tutup dengan $a_i,b_i\in[a,b]$ sedemikian sehingga

$$\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i-a_i)<\eta$$

maka diperoleh

$$\omega\left(f;[a_i,b_i]\right)=\sup\left\{\left|f(x)-f(y)\right|:x,y\in[a_i,b_i],i\in\square\right\}=1$$

sehingga

$$\sum_{i\in\square}\omega\left(f;[a_i,b_i]\right)=\sum_{i\in\square}1>\varepsilon.\ \square$$

3.2.3 Fungsi ACG dan ACG^*

Selanjutnya akan dibahas definisi dari fungsi ACG (*Generalized absolutely continuous in the wide sense*) dan ACG^* (*Generalized absolutely continuous in the restricted sense*). Kedua fungsi ini merupakan perluasan dari fungsi yang AC dan AC^*.

Definisi 3.2.3.1

Suatu fungsi f *disebut kontinu mutlak tergeneralisasi (* ACG *) pada* $[a,b]$ *jika untuk setiap* $X=\{X_i\}\in\alpha[a,b]$, $f\in AC[X_i]$.

Didefinisikan $ACG[a,b]$ sebagai himpunan semua fungsi yang ACG pada $[a,b]$ yaitu $ACG[a,b]=\left\{f\mid f\in AC[X_i],\forall X_i\in X\right\}$.

Definisi 3.2.3.2

Sebuah fungsi f *disebut kontinu mutlak tergeneralisasi dalam arti sempit (* ACG^* *) pada* $[a,b]$*, jika untuk setiap* $X_i\in X$, $X\in\alpha[a,b]$, $f\in AC^*[X_i]$.

Didefinisikan $ACG^*[a,b]$ sebagai himpunan semua fungsi yang ACG^* pada $[a,b]$ yaitu $ACG^*[a,b] = \{f \mid f \in AC^*[X_i], \forall X_i \subseteq [a,b], i = 1,2,...,n\}$

Teorema berikut menyatakan syarat perlu dan cukup dari suatu fungsi yang ACG^*.

Teorema 3.2.3.3

Fungsi f yang kontinu pada $[a,b]$ dan terdiferensialkan hampir di mana-mana pada $[a,b]$ (terdiferensialkan hampir di mana-mana pada $[a,b]$ kecuali hanya untuk beberapa titik pada $[a,b]$) adalah ACG^*.

Bukti:

Misal f terdiferensialkan di mana-mana pada $[a,b]$ dan X_{ni} adalah himpunan titik-titik $x \in \left[a + \frac{i-1}{n}, a + \frac{i}{n}\right]$ dan $x \in [a,b]$ sedemikian sehingga

$$|f(t) - f(x)| \leq n(t-x) \text{ dengan } 0 \leq t - x \leq \frac{1}{n}.$$

Dapat dilihat bahwa $[a,b] = \bigcup_{n,i \in \mathbb{N}} X_{ni}$. Ambil barisan interval-interval yang tidak saling tumpang tindih I_k yang titik-titik ujungnya ada di X_{ni} maka $\omega(f; I_k) \leq 2n|I_k|$ dan untuk setiap $\varepsilon > 0$ pilih $\eta > 0$ dengan $2n\eta < \varepsilon$ sehingga

$$\sum_k |I_k| < \eta$$

mengakibatkan

$$\sum_k \omega(f;I_k) \le 2n\sum_k |I_k| < \varepsilon.$$

dengan kata lain f adalah $AC^*[X_{ni}]$. Akibatnya f adalah $ACG^*[a,b]$.□

Teorema 3.2.3.4

Jika $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *adalah kontinu dan* $ACG^*[a,b]$ *dan* $f'\ge 0$ *hampir di mana-mana pada* $[a,b]$ *maka* f *monoton naik.*

Teorema 3.2.3.5

Misal $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ *adalah* $ACG^*[a,b]$. *Jika* $f^{'}=0$ *hampir di mana-mana pada* $[a,b]$ *maka* F *adalah konstan pada* $[a,b]$.

Teorema 3.2.3.6

Jika f *dan* $g \in ACG^*[a,b]$ *maka dan* $f'=g'$ *hampir di mana-mana pada* $[a,b]$ *maka untuk suatu* $c\in\mathbb{R}$, $f=g+c$.

Bukti:

Karena $f'=g'$ hampir di mana-mana pada $[a,b]$ maka $f'-g'=0$ hampir di mana-mana pada $[a,b]$. Berdasarkan Teorema 3.2.3.7 $f-g$ adalah konstan.□

Berikut adalah contoh dari fungsi $f\in AC^*[a,b]$ maka $f\in ACG^*[a,b]$ tetapi apabila $f\in ACG^*[a,b]$ tidak mengakibatkan $f\in AC^*[a,b]$.

Contoh 3.2.3.7

Perhatikan fungsi $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ dengan aturan

$$f(x)=\begin{cases} x^2\sin\dfrac{1}{x^2}, & \text{untuk setiap } x\in(0,1] \\ 0 & , \text{ untuk } x=0 \end{cases}$$

maka $f\in ACG^*[0,1]$ tetapi $f\notin AC^*[0,1]$.

Bukti:

Telah dibuktikan pada contoh 3.2.1.3 bahwa $f\notin AC[a,b]$ maka berdasarkan teorema 3.2.2.2 $f\notin AC^*[a,b]$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $f\in ACG^*[a,b]$.

Pilih $X_1=\{0\}$ dan $X_n=\{[\frac{1}{n},1]\}, n=2,3,...$ maka diperoleh

$$[0,1]=\bigcup_{n=1} X_n .$$

Dapat diperlihatkan bahwa $f\in AC^*[X_1]$. Kemudian untuk $X_n, n=2,3,..$ dibuktikan sebagai berikut.

Ambil fungsi $g,h:[0,1]\to \mathbb{R}$ dengan $g(x)=x^2$ dan

$h(x)=\sin\frac{1}{x^2}$, untuk $0<x\le 1$ (3.6)

maka

$$|g(x)-g(y)|=|x^2-y^2|\le 2|x-y| \tag{3.7}$$

$$|h(x)-h(y)|=\left|\sin\tfrac{1}{x^2}-\sin\tfrac{1}{y^2}\right|=\left|2\cos\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)\sin\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right)\right|$$

$$\le 2.1\tfrac{1}{2}\left|\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right|=\frac{1}{(xy)^2}\left|x^2-y^2\right|$$

berdasarkan (3.7) didapat $|h(x)-h(y)|\le 2\frac{1}{(xy)^2}|x-y|$ untuk

$x,y\in\left[\frac{1}{n},1\right], n=2,3,..$

sehngga $\forall n$ dan $x,y\in\left[\frac{1}{n},1\right], n=2,3,..$ diperoleh $|h(x)-h(y)|\le 2n^4|x-y|$

Tulis $K_n=2n^4$ maka $\forall x,y\in X_n$, $n=2,3,...$ terdapat K_n sedemikian sehingga

$$|h(x)-h(y)|\le K_n|x-y| \tag{3.8}$$

berdasarkan (3.7) dan (3.8) fungsi g dan h memenuhi Lipschitz pada $X_n, n=2,3,...$

Berdasarkan teorema diperoleh f dan g adalah $AC[X_n]$. Karena $f=gh$ berdasarkan teorema 3.2.2.3 $f\in AC^*[X_n]$. Oleh karena itu untuk setiap

$n = 1, 2, 3, \ldots$ terdapat koleksi interval tutup $\{X_n\}$ dimana f adalah AC^* pada X_n dan memenuhi $[0,1] = \bigcup_{i=1} X_n$.

Dengan kata lain f adalah ACG^* pada $[0,1]$.□

Pada teorema berikut akan dijelaskan bahwa pada fungsi ACG^* juga berlaku sifat-sifat dasar. Teorema ini akan banyak berguna dalam membuktikan beberapa sifat dasar Integral Denjoy yang akan dibahas pada bab selanjutnya.

Teorema 3.2.3.8

Jika $f, g \in ACG^*[a,b]$ *maka* $f+g,\ fg \in ACG^*[a,b]$.

Bukti:

Akan dibuktikan jika $f, g \in ACG^*[a,b]$ maka $f+g,\ fg \in ACG^*[a,b]$.

Karena $f, g \in ACG^*[a,b]$ maka berdasarkan definisi $f, g \in AC^*[X_i]$, $\forall X_i \in X$ dengan $X_i = [x_{i-1}, x_i]$ dan $X \in \alpha[a,b]$. Kemudian karena $f, g \in AC^*[X_i]$ berdasarkan teorema 3.2.2.2 $f, g \in AC\ [X_i]$. Selanjutnya berdasarkan teorema 3.2.1.4 $f+g$, $fg \in AC[X_i]$. Kemudian berdasarkan teorema 3.2.2.3 $f+g,\ fg \in AC^*[X_i]$. Akibatnya berdasarkan definisi $f+g,\ fg \in ACG^*[a,b]$.□

3.3 Keterkaitan Fungsi BVG^* dan ACG^* dengan Integral Henstock

Pada bagian ini akan dibahas Teorema yang menyatakan keterhubungan antara $f \in BVG^*[a,b]$ dan $f \in ACG^*[a,b]$ dengan fungsi yang terintegral Henstock untuk kemudian teorema-teorema tersebut akan digunakan untuk membuktikan bahwa jika f terintegral Denjoy maka f terintegral Henstock dan sebaliknya yang akan dijelaskan pada bab selanjutnya.

Teorema 3.3.1

Jika $f \in R^*[a,b]$ dengan primitif F maka $F \in BVG^*[a,b]$.

Bukti:

Karena $f \in R^*[a,b]$ maka untuk setiap $\varepsilon > 0$ sembarang ada $\delta(\xi) > 0,\ \forall \xi \in [a,b]$ sedemikian sehingga untuk setiap parisi δ -fine $\dot{P} = \{[u_i, v_i], \xi_i\}$ maka $\sum_{i \in \square} \left| F(u_i, v_i) - f(\xi_i)(v_i - u_i) \right| < \varepsilon.$

Untuk $\varepsilon = 1$ dan $\delta(\xi) \leq 1,$ misal X_{n_i} adalah himpunan atas titik-titik $x \in \left[a + \dfrac{(i-1)}{n}, a + \dfrac{i}{n} \right]$ dan $x \in [a,b]$ sedemikian sehingga

$|f(x)| \leq n$ dan $\dfrac{1}{n} < \delta(\xi) \leq \dfrac{1}{n-1},$ sehingga dapat dilihat bahwa $[a,b] = \bigcup_{n,i} X_{n_i}$, $i = 1, 2, \ldots$ dan $n = 2, 3, \ldots$.

Ambil sembarang barisan berhingga atas interval-interval $\{[a_k, b_k]\}$ yang tidak saling tumpang tindih dengan $a_k, b_k \in X_{n_i}$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Karena f terintegralkan Henstock pada $[a,b]$ maka interval-interval $\{[a_k, b_k]\}$ membentuk partisi bagian dari partisi $[a,b]$ yang δ-fine. Tulis $a_k \le u_k \le v_k \le b_k$, sehingga

$$\begin{aligned}\sum_k |F(u_k, v_k)| &\le \sum_k |F(a_k, b_k)| + \sum_k |F(a_k, u_k)| + \sum_k |F(v_k, b_k)| \\ &< 3\varepsilon + 2\sum_k |f(a_k)(b_k - a_k)| + \sum_k |f(b_k)(b_k - v_k)| \\ &< 3 + 3n(b-a).\end{aligned}$$

Ini artinya $F \in BV^*\left[X_{n_i}\right]$. Akibatnya $F \in BVG^*[a,b]$.□

Teorema 3.3.2

Jika $f \in R^*[a,b]$ *dengan primitif* F *maka,* $F \in ACG^*[a,b]$.

Bukti:

Karena $f \in R^*[a,b]$ maka berdasarkan teorema 2.8.5 primitif F dari f kontinu. Selanjutnya berdasarkan teorema 2.8.6 maka primitif F dari $f \in R^*[a,b]$ terdiferensialkan hampir di mana-mana pada $[a,b]$ dengan $F' = f$ hampir di mana-mana pada $[a,b]$. Kemudian berdasarkan Teorema 3.2.3.3 maka $F \in ACG^*[a,b]$.□