BAB III
PEMBAHASAN

3.1 Model TS-GARCH

Model GARCH *univariate* terdiri dari dua persamaan. Persamaan yang pertama adalah persamaan rataan (*mean*). Persamaan ini menjelaskan tentang data terobservasi sebagai fungsi dari variable lain ditambah *error*. Persamaan yang kedua adalah persamaan variansi. Persamaan ini menjelaskan tentang penentuan perubahan variansi bersyarat dari *error* pada persamaan rataan sebagai fungsi variansi bersyarat masa lalu dan *lagged errors*.

3.1.1 Persamaan Rataan

Persamaan Rataan adalah salah satu persamaan yang sering digunakan untuk memprediksi nilai *return* saham. Persamaan rataan ini dikenal dengan model GARCH-*in-mean* (GARCH-M). Model GARCH-M pertama kali diperkenalkan oleh Engle, Lilien dan Robins pada tahun 1987. Model ini telah banyak digunakan dengan studi empiris dalam waktu bervariasi *risk premia* dan perilaku harga saham dengan variansi *return*. Model ini diformulasikan sebagai berikut

$$r_{t+1} = \mu + \gamma\sigma_t^2 + \varepsilon_{t+1} \tag{3.1}$$

Logaritma *return* pada portofolio pasar lebih besar dari laju *risk-free* dinotasikan dengan r_{t+1} dan diberikan suatu konstanta, μ, suatu variasi waktu *risk premium*, $\gamma\sigma_t^2$, dan *error* heteroskedastis, ε_{t+1}. *Error* ini memiliki variansi bersyarat σ_t^2, yang diketahui pada waktu ke t atau dapat dinyatakan sebagai $\varepsilon_{t+1} \sim \phi(0,\sigma_t^2)$. Karena tergantung pada variansi σ_t^2, maka *error* ε_{t+1} dapat dikomposisikan sebagai

$$\varepsilon_{t+1} = \sigma_t z_{t+1} \tag{3.2}$$

di mana z_{t+1} memiliki rataan nol dan variansi satu atau dapat dinyatakan sebagai z_{t+1} i.i.d $\sim \phi(0,1)$

3.1.2 Persamaan Variansi

Denominator umum dari model GARCH adalah suatu transformasi dari standar deviasi bersyarat (*conditional standard deviation*) yang berbanding terhadap fungsi *shocks* (non negatif) dari masa lalu dan sekarang, ditambah rata-rata bergerak (*moving average*) dari standar deviasi yang ditransformasi. Dalam kasus model GARCH (p,q) dari Bollerslev (1986), transformasi untuk *shocks* dan standar deviasi semuanya dalam bentuk kuadrat, sehingga modelnya adalah

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \sigma_{t-i}^2 z_{t+1-i}^2 + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{3.3}$$

dengan $\alpha_i > 0,\ \beta_j > 0,\ i = 1,2,\dots,p$ dan $j = 1,2,\dots,q$

yang direduksi dari model ARCH (q) oleh Engle (1982) ketika p = 0. Semua model GARCH dapat digeneralisasi untuk order tinggi, atau direduksi untuk model ARCH, tetapi dalam tugas akhir ini penulis hanya akan membahas model TS-GARCH. TS-GARCH pertama kali diperkenalkan oleh Taylor (1986) dan Schwert (1989). Spesifikasi modelnya berdasarkan standar deviasi, sehingga modelnya adalah sebagai berikut:

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \sigma_{t-1} |z_t| + \sum_{j=1}^{p} \beta_j \sigma_{t-1} \tag{3.4}$$

dengan $\alpha_i > 0, \beta_j > 0$, $i = 1, 2, ..., p$ dan $j = 1, 2, ..., q$

Formulasi pada proses model TS-GARCH ini identik dengan proses GARCH, kecuali pada variansi bersyarat σ_t^2, diganti dengan akar kuadratnya dan *error* kuadrat diganti dengan *error* mutlaknya (*absolute error*).

3.1.3 Proses TS-GARCH (1,1)

Misalkan z_t adalah suatu data runtun waktu dengan observasi $z_1, z_2, \ldots, z_t$, I_t merupakan himpunan informasi yang diketahui pada waktu t. proses z_t dikatakan mengikuti proses TS-GARCH (1,1) jika

$$\varepsilon_{t+1} | I_t \sim N(0, \sigma_t^2)$$

$$z_t \sim N(0,1)$$

$$\varepsilon_{t+1} = \sigma_t z_{t+1}$$

Model TS-GARCH (1,1) ini identik dengan model GARCH (1,1) untuk standar deviasi σ_t. Berikut ini adalah model dari TS-GARCH (1,1)

$$\sigma_t = \omega + \alpha\sigma_{t-1}|z_t| + \beta\sigma_{t-1} \qquad (3.5)$$

dengan ω, α, dan β adalah parameter yang diestimasi dan $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

3.2 Identifikasi Model

Identifikasi model adalah tahap awal dari tiga tahapan analisis yang diperkenalkan oleh Box-Jenkins (1994). Bentuk model TS-GARCH sementara dipilih setelah melalui beberapa langkah. Identifikasi model volatilitas TS-GARCH melalui beberapa langkah dapat dilihat pada bagan berikut:

Gambar 3.1

Bagan Langkah-langkah Indentifikasi Model TS-GARCH

3.3 Estimasi Parameter

Untuk dapat memprediksi model volatilitas yang akan digunakan pada data runtun waktu, hal yang pertama data tersebut harus cocok dengan model TS-GARCH. Hal ini dilakukan melalui estimasi parameter dalam model tersebut. Metode yang paling umum dari estimasi ini adalah *Maximum Likelihood Estimation* (MLE). MLE akan efisien jika $z_{t+1} \sim N(0,1)$.

Misalkan model yang diobservasi adalah y_t, di mana $y_t = f(X,\theta) + z_t$.

Asumsikan ε_{t+1} adalah mengikuti proses TS-GARCH (1,1) dengan

$$\varepsilon_{t+1} = \sigma_t z_{t+1}$$

dan Z_t variabel acak yang independen dan identik dengan $t = 1, 2, ..., n$, maka fungsi *likelihood* dari sampel acak itu adalah Gaussian, dengan bentuk fungsi *log-likelihood* sebagai berikut:

$$L_T(\theta) = \frac{1}{2T}\sum_{t=1}^{T} l_t(\theta), \text{ di mana } l_t(\theta) = -\left(\ln \sigma_t(\theta) + \frac{|\varepsilon_{t+1}|}{\sigma_t(\theta)}\right) \qquad (3.6)$$

dengan L_T adalah fungsi *quasi-likelihood* dan $\theta = (\omega, \alpha, \beta)$ menotasikan vektor dari parameter tidak diketahui.

Untuk menemukan pendekatan estimasi parameter maka digunakan metode iteratif. Algoritma optimisasi untuk iterasi dimulai dari suatu nilai awal, misalkan θ_0. Kemudian θ_0 digunakan untuk mencari θ_1. Proses iteratif estimator

$\hat{\theta}$ dilakukan sampai diperoleh jarak yang kecil antara $\hat{\theta}_{t-1}$ dan $\hat{\theta}_t$. Metode iteratif yang digunakan adalah metode *Newton-Raphson*, *Method of Scoring*, dan iterasi *Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH).*

3.3.1 Metode Newton-Raphson

Secara umum metode Newton-Raphson melekukan aproksimasi dengan deret Taylor orde kedua untuk fungsi Likelihood di sekitar nilai awal, yaitu θ_0

$$l_t = l_t\big|_{\theta_0} + \frac{\partial l_t}{\partial \theta'}\bigg|_{\theta_0}(\theta-\theta_0) + \frac{1}{2}(\theta-\theta_0)'\frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta\partial\theta'}\bigg|_{\eta_0}(\theta-\theta_0) \tag{3.7}$$

Untuk memperoleh kondisi optimum, fungsi di atas diturunkan terhadap parameter θ kita samakan hasilnya dengan nol

$$\frac{\partial l_t}{\partial\theta} = 0 + \left[\frac{\partial l_t}{\partial\theta'}\bigg|_{\theta_0}\right] + \frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta\partial\theta'}\bigg|_{\theta_0}(\theta-\theta_0) = 0 \tag{3.8}$$

Berdasarkan persamaan (3.7) dan (3.8), secara implisit θ_1 dapat ditaksir seperti proses berikut:

$$\frac{\partial l_t}{\partial\theta} = \left[\frac{\partial l_t}{\partial\theta'}\bigg|_{\theta_1}\right] + \frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta\partial\theta'}\bigg|_{\theta_1}(\theta_1-\theta_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_1 = \theta_0 - \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta\partial\theta'}\bigg|_{\theta_0}\right)^{-1}\left[\frac{\partial l_t}{\partial\theta}\bigg|_{\theta_0}\right]$$

Bentuk terakhir dapat dinyatakan dalam bentuk umum, yaitu:

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta\partial\theta'}\bigg|_{\theta_n} \right)^{-1} \left[\frac{\partial l_t}{\partial\theta}\bigg|_{\theta_n} \right] \tag{3.9}$$

di mana,

$$t_n = 1\,, P_n = \left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta\partial\theta'}\bigg|_{\theta_n} \right)^{-1}, \gamma_n = \frac{\partial l_t}{\partial\theta}\bigg|_{\theta_n}$$

Bila iterasi sudah konvergen $\theta_{n+1} = \theta_n$, maka dipenuhilah kondisi orde pertama.

3.3.2 *Method of Scoring*

Pada *Method of Scoring*, algoritma iterasi menggunakan nilai ekspektasi dari fungsi *Likelihood*. Algoritmanya dinyatakan sebagai berikut

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \left[E\left(\frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta\partial\theta'} \right)\bigg|_{\theta_n} \right]^{-1} \frac{\partial l_t}{\partial\theta}\bigg|_{\theta_n} \tag{3.10}$$

di mana,

$$t_n = 1\,, P_n = -E\left[\frac{\partial^2 l_t}{\partial\theta\partial\theta'}\bigg|_{\theta_n} \right], \gamma_n = \frac{\partial l_t}{\partial\theta}\bigg|_{\theta_n}$$

3.3.3 Iterasi Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH)

Metode ini mengeksploitasi algoritma iterasi dari *Method of Scoring*. Namun pada iterasi BHHH ditambahkan dengan *the law of large number* dan matriks informasi. Diketahui p_n dari *method of scoring* adalah sebagai berikut:

$$P_n = \left[-E \left. \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1} = \left[-E \left. \frac{\partial^2 \sum_{t=1}^{T} l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1} = \left[-E \sum_{t=1}^{T} \left. \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1}$$

Selanjutnya,

$$P_n = \left[-\sum_{t=1}^{T} E \left. \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1} = \left[-T.E \left. \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1} = \left[-T.\frac{1}{t} \sum_{t=1}^{T} \left. \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1}$$

Akhirnya diperoleh

$$P_n = \left[-\sum_{t=1}^{T} \left. \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1}$$

Sehengga bentuk umum dari skema iterasi BHHH dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \left[-\sum_{t=1}^{T} \left. \frac{\partial^2 l_t}{\partial \theta \partial \theta'} \right|_{\theta_n} \right]^{-1} \left. \frac{\partial l_t}{\partial \theta} \right|_{\theta_n} \qquad (3.11)$$

Dari ketiga metode iteratif di atas, dalam tugas akhir ini penulis menggunakan metode iterasi *Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH).*

3.4 Verifikasi Model

Setelah melalui tahap identifikasi dan estimasi parameter, model TS-GARCH yang didapat bisa digunakan untuk peramalan dalam memenetapkan kapan suatu peristiwa akan terjadi atau peristiwa apa yang akan terjadi, sehingga tindakan yang tepat dapat dilakukan. Untuk mencegah galat peramalan yang terlalu besar, langkah berikutnya adalah dengan melakukan verifikasi model. Dalam langkah ini dilakukan pemeriksaan kecocokan model yang didapat dengan data yang ada. Jika model kurang cocok, maka langkah ini memberikan gambaran ke arah mana model tersebut harus dimodifikasi menjadi model yang lebih baik.

Jika terdapat data berlebih maka sebagian data digunakan untuk identifikasi dan estimasi dan sebagian lagi dapat digunakan untuk pengecekan model. Tetapi bila jumlah data terbatas maka identifikasi, estimasi parameter dan verifikasi model dapat menggunakan data yang sama. Jika diperlukan model yang lebih luas, biasanya dilakukan *overfitting* untuk selanjutnya diperiksa keunggulannya.

Pada model TS-GARCH ini, verifikasi dilakukan untuk uji signifikansi parameter. Parameter yang akan diuji adalah ω , α , dan β. Pengujian yang dapat dilakukan terdapat dua jenis, yaitu berdasarkan keberartian koefisien dan berdasarkan kriteria informasi (*information criteria*).

3.4.1 Pengujian Berdasarkan Keberartian Koefisien

Langkah pengujian keberartian koefisien pada model volatilitas tidak berbeda dengan pengujian pada model runtun waktu yang bersifat homoskedastis.

3.4.2 Kriteria Informasi (*Information Criteria*)

Information Criteria sering digunakan sebagai panduan untuk seleksi model peramalan yang akan digunakan digunakan (Eviews UG,2004). Untuk seleksi model mendapatkan model yang terbaik, pilihlah model dengan nilai *Information Criteria* yang terkecil. *Information Criteria* telah digunakan secara luas dalam analisis data runtun waktu untuk menentukan panjang lag yang paling cocok untuk diaplikasikan dalam suatu model.

Adapun jenis-jenis *Information Criteria* antara lain:

Aikake Information Criterion (AIC)

Schwarz Information Criterion (SIC)

dengan rumus seperti dinyatakan dalam tabel sebagai berikut:

Tabel 3.1 Jenis-jenis *Information Criteria* dan rumusnya

Aikake Information Criterion (AIC)	$-2(l/T)+(2k/T)$
Schwarz Information Criterion (SIC)	$-2(l/T)+k(\ln T)/T$

di mana $l = -\frac{T}{2} + \ln(2\pi) + \ln(\hat{u}'\hat{u}/T)$

AIC banyak digunakan untuk data yang jumlahnya besar, bahkan data yang jumlahnya tak terhingga. Sedangkan SIC digunakan pada data yang relatif kecil.