BAB III

ANALISIS SPEKTRAL PADA RUNTUN WAKTU MODEL ARIMA

Analisis spektral adalah metode yang menggambarkan kecendrungan osilasi atau getaran dari sebuah data pada frekuensi tertentu. Analisis spektral atau dinamakan juga analisis spektrum, dikenalkan oleh A. Schuster, seorang pekerja sosial, pada akhir abad ke-20 dengan tujuan mencari periodesitas tersembunyi dari data. Pada saat ini analisis spektral digunakan pada persoalan penaksiran spektrum untuk seluruh selang frekuensi. Bartlett dan Tukey, mengembangkan analisis spektral modern sekitar tahun ketiga abad ke-20, dan teorinya banyak digunakan para pengguna di bidang klimatologi, teknik kelistrikan, meteorologi dan ilmu kelautan. Anggap Z_t adalah nilai variabel pada waktu t yang digambarkan sebagai jumlah terboboti fungsi periode yang berbentuk $\cos \omega t$ dan $\sin \omega t$.

3.1 Populasi Spektrum dan Fungsi Pembangkit Autokovariansi

Anggap $\{Z_t\}$ adalah proses stasioner bernilai real pada kovariansi dengan mean $E(Z_t) = \mu$ dan autokovariansi ke- k adalah γ_k, dengan $k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Diasumsikan autokovariansi dapat dijumlahkan, sehingga fungsi pembangkit autokovariansi didefinisikan sebagai berikut:

$$\gamma(B) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k B^k \qquad (3.1.1)$$

dimana variansi proses γ_0 merupakan koefisien $B^0 = 1$ dan autokovariansi pada lag ke- k (γ_k) merupakan koefisien B^k dan B^{-k}. Jika diberikan deret autokovariansi

γ_k yang dapat dijumlahkan, maka densitas spektral ada dan didefinisikan sebagai berikut:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, e^{-i\omega k} \tag{3.1.2}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\{\ldots + \gamma_{-1}[\cos(-\omega) - i\sin(-\omega)] + \gamma_0[\cos(0) - i\sin(0)] +$$

$$\gamma_1[\cos(\omega) - i\sin(\omega)] + \cdots\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\gamma_0[\cos(0) - i\sin(0)] + \frac{1}{2\pi}\{\gamma_1[\cos(-\omega) - i\sin(-\omega) +$$

$$\cos(\omega) - i\sin(\omega)] + \gamma_2[\cos(-2\omega) - i\sin(-2\omega) +$$

$$\cos(2\omega) - \quad i\sin(2\omega)] + \cdots\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\gamma_0[\cos(0) - i\sin(0)] + \frac{1}{2\pi}\{\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k[\cos(-\omega k) - i\sin(-\omega k) +$$

$$\cos(\omega k) - i\sin(\omega k)]\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}[1 - 0] + \frac{1}{2\pi}\{\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k[\cos(-\omega k) - i\sin(-\omega k) + \cos(\omega k) -$$

$$i\sin(\omega k)]\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k \, 2\cos(\omega k)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{k=1}^{\infty}2\gamma_k \cos(\omega k)\right\}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\gamma_0 + \frac{1}{2\pi}\{2\textstyle\sum_{k=1}^{\infty}\gamma_k\cos(\omega k)\} \tag{3.1.3}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\gamma_k\cos(\omega k) \tag{3.1.4}$$

dimana $i^2 = -1$, dengan i merupakan bilangan imajiner.

ω = frekuensi (dalam radian), dengan $-\pi \leq \omega \leq \pi$.

dan

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\, e^{i\omega k}\, d\omega \tag{3.1.5}$$

Dari persamaan (3.1.1) dan (3.1.2) didapat bahwa untuk proses dengan deret autokovariansi yang dapat dijumlahkan, spektrum dan fungsi pembangkit autokovariansi mempunyai hubungan:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma\left(e^{-i\omega}\right) \tag{3.1.6}$$

Fungsi $f(\omega)$ mempunyai sifat sebagai berikut:

1) $f(\omega)$ adalah fungsi kontinu non negatif, yaitu $|f(\omega)| = f(\omega)$. $f(\omega)$ adalah spektrum deret autokovariansi, γ_k. Hal ini menunjukkan $f(\omega)$ adalah fungsi kontinu bernilai real.
2) $f(\omega) = f(\omega + 2\pi)$ dan $f(\omega)$ adalah periodik dengan periode 2π. Jika $f(\omega) = f(-\omega)$ yaitu $f(\omega)$ adalah fungsi genap simetris, maka grafiknya hanya dibuat untuk $0 \leq \omega \leq \pi$.
3) Dari persamaan (3.1.5) diperoleh:

$$var\,(Z_t) = \gamma_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\omega)\, d\omega \tag{3.1.7}$$

Spektrum $f(\omega)$ dapat diinterpretasikan sebagai dekomposisi proses variansi.

4) Spektrum $f(\omega)$ dan barisan autokovariansi, γ_k merupakan bentuk pasangan transformasi Fourier, artinya jika $f(\omega)$ diketahui maka γ_k dapat dihitung dan sebaliknya.

3.2 Representasi Fungsi Autokovariansi Spektral – Fungsi Distribusi Spektral

Secara umum untuk fungsi autokovariansi γ_k, penggambaran spektral dari γ_k dengan integral Fourier-Stieltjes adalah:

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\omega k}\, dF(\omega) \qquad (3.2.1)$$

Dimana $F(\omega)$ adalah fungsi distribusi spektral.

Jika didefinisikan $G(\omega) = \frac{F(\omega)}{\gamma_0}$ (3.2.2)

maka $G(\omega) \geq 0$ dan $\int_{-\pi}^{\pi} dG(\omega) = 1$. Jika $dF(\omega) = f(\omega)d\omega$, maka

$$p(\omega)d\omega = dG(\omega) = \frac{f(\omega)\, d\omega}{\gamma_0} \qquad (3.2.3)$$

dengan $p(\omega)$ merupakan fungsi kepadatan peluang, dimana $-\pi \leq \omega \leq \pi$ yang ditunjuk dari fungsi kepadatan spektral.

Dari persamaan (3.1.2) dan (3.1.5) maka diperoleh:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k\, e^{-i\omega k} \qquad (3.2.4)$$

$$\frac{f(\omega)}{\gamma_0} = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_k}{\gamma_0}\, e^{-i\omega k}$$

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k\, e^{-i\omega k} \qquad (3.2.5)$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k\, [(\cos(\omega k) - i\sin(\omega k))]$$

$$= \frac{1}{2\pi} \{\cdots + \rho_{-1}[\cos(-\omega) - i\sin(-\omega)] + \rho_0[\cos(0) - i\sin(0)] +$$

$$\rho_1[\cos(\omega) - i\sin(\omega)] + \cdots\}$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_k \cos(\omega k) \qquad (3.2.6)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\rho_0 + \frac{2}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k \cos(\omega k)$$

$$p(\omega) = \frac{1}{2\pi} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k \cos(\omega k) \qquad (3.2.7)$$

Dengan $-\pi \le \omega \le \pi$ dan $\rho_k = \int_{-\pi}^{\pi} p(\omega)\ e^{i\omega k}\, d\omega$ (3.2.8)

dengan $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$

3.3 Spektrum Populasi Dari Beberapa Proses Umum

Beberapa proses linear non deterministik Z_t ditulis sebagai berikut:

$$Z_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j\, a_{t-j} = \psi(B)a_t \qquad (3.3.1)$$

Dimana $\psi(B) = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j B^j, \psi_0 = 1$. Diasumsikan $E(Z_t) = 0$, diperoleh:

$$\gamma(B) = E(Z_t.Z_{t+k}) = E\left(\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\psi_i\psi_j\, a_{t-i}a_{t+k-j}\right)$$

$$= \sigma_a^2\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i.\psi_{i+k} \qquad (3.3.2)$$

Substitusikan persamaan (3.3.2) ke persamaan (3.1.1) dan dengan sifat stasioner diperoleh:

$\gamma(B) = \sigma_a^2\sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{i=0}^{\infty}\psi_i.\psi_{i+k}B^k$, diambil $j = i + k$ dan $\psi_j = 0,\ j < 0$.

$$= \sigma_a^2\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=-\infty}^{\infty}\psi_i.\psi_j B^{j-i}$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \psi_i . \psi_j B^{j-i}$$

$$= \sigma_a^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_i B^{-i} . \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j B^{j}$$

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B)\, \psi(B^{-1}) \qquad (3.3.3)$$

$\gamma(B)$ disebut fungsi pembentuk autokovariansi untuk proses linear umum.

3.3.1 Model Umum Stasioner ARIMA (*p*, 0, *q*) atau ARMA (*p*, *q*)

$$Z_t = \phi_1 . Z_{t-1} + \phi_2 . Z_{t-2} + \ldots + \phi_p . Z_{t-p} + a_t + \theta_1 . a_{t-1} + \cdots + \theta_q . a_{t-q}$$

$$Z_t - \phi_1 . Z_{t-1} - \phi_2 . Z_{t-2} - \ldots - \phi_p . Z_{t-p} = a_t + \theta_1 . a_{t-1} + \ldots + \theta_q . a_{t-q}$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots . - \phi_p B^p\right) Z_t = \left(1 + \theta_1 B + \ldots + \theta_q B^q\right) a_t$$

$$\phi_p(B)\ \ Z_t = \theta_q(B) a_t \qquad (3.3.4)$$

Dengan: $\phi_p(B) = (1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \ldots . - \phi_p B^p)$

$\theta_q(B) = (1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q)$

Sehingga persamaan (3.3.4) dapat ditulis sebagai berikut:

$$Z_t = \psi(B) a_t, \text{ dengan } \psi(B) = \frac{\theta_q(B)}{\phi_p(B)}$$

Dengan demikian fungsi pembangkit autokovariansi untuk model ARIMA (*p*, 0, *q*) akan berbentuk menjadi:

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B)\, \psi(B^{-1})$$

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \frac{\theta_q(B)\theta_q(B^{-1})}{\phi_p(B)\phi_p(B^{-1})} \tag{3.3.5}$$

Ketika model stasioner, akar-akar dari $\phi_p(B) = 0$ berada di luar lingkaran satuan. Hal ini sebagai syarat agar fungsi autokovariansi dapat dijumlahkan. Sebagai akibatnya, spektrum model stasioner ARIMA (p, 0, q) adalah sebagai berikut:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma\left(e^{-i\omega}\right)$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{\theta_q(e^{-i\omega})\theta_q(e^{i\omega})}{\phi_p(e^{-i\omega})\phi_p(e^{i\omega})} \tag{3.3.6.a}$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left|\frac{\theta_q(e^{-i\omega})}{\phi_p(e^{-i\omega})}\right|^2 \tag{3.3.6.b}$$

Bentuk persamaan (3.3.6) di atas dikenal sebagai spektrum yang berbentuk rasional.

Jika model adalah *invertibel*, yaitu akar-akar dari $\theta_q(B) = 0$ berada di luar lingkaran satuan, $\theta_q(e^{-i\omega})\theta_q(e^{i\omega})$ tidak hilang. Dari sini invers $f(\omega)$ ada yaitu:

$$f^{-1}(\omega) = \frac{2\pi}{\sigma_a^2}\frac{\phi_p(e^{-i\omega})\phi_p(e^{i\omega})}{\theta_q(e^{-i\omega})\theta_q(e^{i\omega})} \tag{3.3.7.a}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left|\frac{\phi_p(e^{-i\omega})}{\theta_q(e^{-i\omega})}\right|^2 \tag{3.3.7.b}$$

Dari hasil invers fungsi kepadatan spektrum di persamaan (3.3.7) diperoleh invers fungsi autokovariansi ARIMA (p, 0, q) yaitu:

$$\gamma_k^{(I)} = \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\omega)\, e^{i\omega k}\, d\omega \tag{3.3.8}$$

dan invers fungsi autokorelasinya adalah:

$$\rho_k^{(I)} = \frac{1}{\gamma_0^{(I)}} \int_{-\pi}^{\pi} f^{-1}(\omega)\, e^{i\omega k}\, d\omega \tag{3.3.9}$$

3.3.2 Spektrum Proses *White Noise*

Model proses *white noise* sebagai berikut:

$$Z_t = a_t \tag{3.3.10}$$

merupakan deret variabel random yang tidak berkorelasi, dengan fungsi autokovariansinya sebagai berikut:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2, \text{jika k } = 0 \\ 0, \text{jika k} \neq 0 \end{cases} \tag{3.3.11}$$

dan fungsi pembangkit autokovariansi $\gamma(B) = \sigma_a^2$. Adapun spektrum dari proses *white noise* adalah sebagai berikut:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma\left(e^{-i\omega}\right)$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}, \text{ dengan } -\pi \leq \omega \leq \pi \tag{3.3.12}$$

Gambar dari persamaan (3.3.12) di atas adalah berupa garis lurus horisontal.

3.3.3 Spektrum Proses ARIMA (1, 0, 0) atau AR(1)

Model proses ARIMA(1, 0, 0) adalah sebagai berikut:

$$Z_t = \phi_1 a_{t-1} + a_t$$

$$Z_t - \phi_1 a_{t-1} = a_t$$

$$(1 - \phi B)Z_t = a_t$$

$Z_t = \psi(B)a_t$, dimana $\psi(B) = \frac{1}{1-\phi B}$

Fungsi pembangkit autokovariansi untuk proses ARIMA (1, 0, 0) adalah sebagai berikut:

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B)\, \psi(B^{-1})$$

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \, \frac{1}{(1-\phi B)(1-\phi B^{-1})} \qquad (3.3.13)$$

Dari persamaan (3.1.6) diperoleh spektrum ARIMA(1, 0, 0) sebagai berikut:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma\left(e^{-i\omega}\right)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{\left(1-\phi(e^{-i\omega})\right)\left(1-\phi(e^{i\omega})\right)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\phi(e^{i\omega})-\phi(e^{-i\omega})+\phi^2)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\phi(e^{i\omega}+e^{-i\omega})+\phi^2)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\phi(\cos(\omega)+i\sin(\omega)+\cos(\omega)-i\sin(\omega))+\phi^2)}$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-2\phi\cos(\omega)+\phi^2)} \qquad (3.3.14)$$

Bentuk spektrum proses ARIMA(1, 0, 0) bergantung pada tanda ϕ, artinya:

a) Jika $\phi > 0$, dan autokorelasi runtun waktu positif maka spektrum didominasi oleh komponen berfrekuensi rendah (periode panjang).

b) Jika $\phi < 0$, dan autokorelasi runtun waktu negatif maka spektrum didominasi oleh komponen berfrekuensi tinggi (periode rendah).

(Wei, 1990: 277)

Dengan kata lain, spektrum yang didominasi frekuensi rendah menandakan runtun waktu yang relatif licin, sedangkan spektrum yang didominasi frekuensi tinggi runtun waktunya lebih kasar.

Jika $\phi \approx 1$, maka model ARIMA(1, 0, 0) menjadi:

$$(1 - B)Z_t = a_t \tag{3.3.15}$$

$Z_t = \psi(B)a_t$, dimana $\psi(B) = \frac{1}{1-B}$

Persamaan (3.3.15) di atas sering disebut model *Random Walk*.

Fungsi Pembangkit autokovariansi dari persamaan (3.3.15) adalah sebagai berikut:

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B)\psi(B^{-1})$$

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \frac{1}{(1-B)(1-B^{-1})} \tag{3.3.16}$$

Adapun spektrum proses tersebut adalah sebagai berikut:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma(e^{-i\omega})$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-e^{-i\omega})(1-e^{i\omega})}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-e^{i\omega}-e^{-i\omega}+1)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \frac{1}{\left(2 - (e^{i\omega} + e^{-i\omega})\right)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \frac{1}{\left(2 - (\cos(\omega) + i\sin(\omega) + \cos(\omega) - i\sin(\omega))\right)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \frac{1}{(2 - 2\cos(\omega))}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \frac{1}{2(1 - \cos(\omega))}$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{4\pi} \frac{1}{(1-\cos(\omega))} \tag{3.3.17}$$

Hasil ini dapat digunakan sebagai spektrum model *random walk*, meskipun sebenarnya *random walk* tidak mempunyai spektrum, sebab deret autovariansinya tidak dapat dijumlahkan. Tetapi pada persamaan (3.3.17) merupakan fungsi genap non negatif, yang akan menjadi masalah ketika $\omega = 0$, sebab fungsi tersebut mempunyai ujung yang tak terbatas tingginya. Adapun kegunaan kasus ini pada analisis data adalah bahwa jika spektrum sampel ujungnya mendekati frekuensi nol dengan kuat menandakan perlunya kemungkinan dilakukan pembedaan.

3.3.4 Spektrum Proses ARIMA(0, 0, 1) atau MA(1)

Model dari proses ARIMA(0, 0, 1) adalah sebagai berikut:

$$Z_t = a_t + \theta a_{t-1}$$

$$Z_t = (1 - \theta B)a_t, Z_t = \psi(B)a_t \text{ dengan } \psi(B) = (1 - \theta B)$$

Fungsi Pembangkit autokovariansi proses satasioner ARIMA(0, 0, 1) adalah sebagai berikut:

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B)\psi(B^{-1})$$

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 (1 - \theta B)(1 - \theta B^{-1}) \tag{3.3.18}$$

Adapun spektrum dari proses stasioner ARIMA(0, 0, 1) adalah sebagai berikut:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma\left(e^{-i\omega}\right)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left(1 - \theta e^{i\omega} - \theta e^{-i\omega} + \theta^2\right)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left(1 - \theta e^{i\omega} - \theta e^{-i\omega} + \theta^2\right)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left(1 - \theta e^{i\omega} - \theta e^{-i\omega} + \theta^2\right)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}(1 - \theta(\cos(\omega) + i\sin(\omega) + \cos(\omega) - i\sin(\omega)) + \theta^2)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}(1 - 2\theta\cos(\omega) + \theta^2)$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}(1 + \theta^2 - 2\theta\cos(\omega)) \tag{3.3.19}$$

Bentuk spektrum di atas bergantung pada tanda θ, artinya:

a) Jika $\theta > 0$, autokorelasi runtun waktu negatif dan relasinya kasar yang digambarkan dengan spektrum yang bernilai tinggi pada frekuensi tinggi.

b) Jika $\theta < 0$, autokorelasi runtun waktu positif dan licin, maka spektrum didominasi oleh komponen berfrekuensi rendah.

(Wei, 1990: 278)

3.3.5 Spektrum Model Musiman

Komponen musiman deterministik dengan periode musiman s akan mempunyai spektrum pada frekuensi harmonik (Fourier) $\omega_k = \frac{2\pi k}{s}$, dengan $k = \pm1, \pm2, \ldots, \pm[s/2]$. Spektrum model musiman dengan musiman 12 mempunyai model sebagai berikut:

$$(1-\Phi B^{12})Z_t = a_t \tag{3.3.20}$$

$Z_t = \psi(B)a_t$, dimana $\psi(B) = \frac{1}{1-\Phi B^{12}}$

Fungsi Pembangkit autokovariansi adalah sebagai berikut:

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \psi(B)\psi(B^{-1})$$

$$\gamma(B) = \sigma_a^2 \frac{1}{(1-\Phi B^{12})(1-\Phi B^{-12})} \tag{3.3.21}$$

Jika prosesnya stasioner, maka spektrum ada yaitu sebagai berikut:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi}\gamma\left(e^{-i\omega}\right)$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\Phi e^{i12\omega})(1-\Phi e^{-i12\omega})}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\Phi e^{-i12\omega}-\Phi e^{i12\omega}+\Phi^2)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\Phi(e^{-i12\omega}+e^{i12\omega})+\Phi^2)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-\Phi(\cos(12\omega)-i\sin(12\omega)+\cos(12\omega)+i\sin(12\omega))+\Phi^2)}$$

$$f(\omega) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\frac{1}{(1-2\Phi\cos(12\omega)+\Phi^2)} \tag{3.3.22}$$

Dimana $\cos(12\omega) = -1$ pada $\omega = \frac{\pi(2k-1)}{12}$, untuk k = 1, 2, 3, . . ., 6, dan $\cos(12\omega) = 1$ untuk $\omega = 0$ dan $\omega = \frac{2\pi k}{12}$ dengan k = 1, 2, 3, . . ., 6.

Bentuk spektrum persamaan (3.3.22) diatas bergantung pada tanda Φ, artinya: untuk $\Phi > 0$ dan $\Phi < 0$, selain puncak pada $\omega = 0$, spektrum akan menunjukkan pada lembah yaitu pada frekuensi harmonik musiman $\omega = \frac{\pi(2k-1)}{12}$

untuk *k* = 1, 2, 3, . . ., 6 dan akan mencapai puncak pada frekuensi $\omega = \frac{2\pi k}{12}$ untuk *k* = 1, 2, 3, . . ., 6.

3.4 Estimasi Spektrum Populasi

3.4.1 Periodogram

Diberikan data runtun waktu dengan *n* observasi dalam bentuk polinomial trigonometrik adalah:

$$Z_t = \sum_{k=0}^{[n/2]} (a_k \cos \omega_k t + b_k \sin \omega_k t) + e_t \qquad (3.4.1)$$

Dimana $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}, k = 0, 1, \cdots, [n/2]$ adalah frekuensi Fourier dan a_k serta b_k dinamakan koefisien Fourier yang dapat diperoleh dengan menggunakan metode *Least Square Error,* persamaan (3.4.1) dikenal sebagai deret Fourier. Penggambaran Fourier di atas dapat dipandang sebagai model regresi sederhana sebagai berikut:

$$Z_t = X_t \beta + e_t \qquad (3.4.2)$$

dengan;

$$X_t = [\cos \omega_0 t \quad \sin \omega_0 t \quad \cos \omega_1 t \quad \sin \omega_1 t \quad \cdots \quad \cos \omega_{n/2} t \quad \sin \omega_{n/2} t]$$

dan $\beta' = [a_0 \quad b_0 \quad a_1 \quad b_1 \quad \cdots \quad a_{n/2} \quad b_{n/2}]$, serta $e_t \sim N(0, \sigma^2)$.

Dengan menggunakan metode *LSE* didapat nilai $\hat{\beta}$ sebagai berikut:

$$b = \hat{\beta} = [\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t]^{-1} [\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t] \qquad (3.4.3)$$

Persamaan (3.4.2) di atas dapat ditulis dalam bentuk matriks sebagai berikut:

$$Z_t = [\cos\omega_0 t \quad \sin\omega_0 t \quad \cos\omega_1 t \quad \sin\omega_1 t \quad \cdots \quad \cos\omega_{n/2} t \quad \sin\omega_{n/2} t]\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{n/2} \\ b_{n/2} \end{bmatrix} \qquad (3.4.4)$$

$\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t =$

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{t=1}^{n}\sin\omega_0 t\cos\omega_0 t & \sum_{t=1}^{n}\cos\omega_1 t\cos\omega_0 t & \cdots & \sum_{t=1}^{n}\sin\omega_{n/2} t\cos\omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n}\cos\omega_0 t\sin\omega_0 t & \sum_{t=1}^{n}\sin^2\omega_0 t & \sum_{t=1}^{n}\cos\omega_1 t\sin\omega_0 t & \cdots & \sum_{t=1}^{n}\sin\omega_{n/2} t\sin\omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n}\cos\omega_0 t\cos\omega_1 t & \sum_{t=1}^{n}\sin\omega_0 t\cos\omega_1 t & \sum_{t=1}^{n}\cos^2\omega_1 t & \cdots & \sum_{t=1}^{n}\sin\omega_{n/2} t\cos\omega_1 t \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{t=1}^{n}\cos\omega_0 t\sin\omega_{n/2} t & \sum_{t=1}^{n}\sin\omega_0 t\sin\omega_{n/2} t & \sum_{t=1}^{n}\cos\omega_1 t\sin\omega_{n/2} t & \cdots & \sum_{t=1}^{n}\sin^2\omega_{n/2} t \end{bmatrix}$$

Dapat dibuktikan bahwa:

a) $\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi kti}{n}} = \begin{cases} n, \text{ untuk} & k = 0 \\ 0, \text{ untuk} & k = \pm 1, \cdots, \pm(n-1) \end{cases}$

b) $\sum_{t=1}^{n} \cos\omega_k t = 0, \text{untuk } k = 1, 2, 3, \cdots, \frac{n-1}{2}$

$$\sum_{t=1}^{n} \sin\omega_k t = 0, \text{untuk } k = 1, 2, 3, \cdots, \frac{n-1}{2}$$

c) $\sum_{t=1}^{n} \cos\omega_j t \cos\omega_k t = \begin{cases} 0, & \text{untuk } k \neq j \\ \frac{n}{2}, & \text{untuk } k = j \end{cases}$

d) $\sum_{t=1}^{n} \sin\omega_j t \sin\omega_k t = \begin{cases} 0, & \text{untuk } k \neq j \\ \frac{n}{2}, & \text{untuk } k = j \end{cases}$

e) $\sum_{t=1}^{n} \cos\omega_j t \sin\omega_k t = 0$, untuk semua j dan k.

Bukti:

a) $\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi kti}{n}}$

Untuk k = 0, maka diperoleh:

$$\sum_{t=1}^{n} e^{2\pi*0*ti} = \sum_{t=1}^{n} e^{0} = \sum_{t=1}^{n} 1 = n$$

Untuk k = ±1, ±2, . . ., ±(n - 1)

misalkan $Z = e^{\frac{2\pi ki}{n}}$, sehingga persamaan (a) dapat ditulis sebagai berikut:

$\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi kti}{n}} = \sum_{t=1}^{n} Z^{t} = \frac{1-Z^{n}}{1-Z}$, untuk 0 < |k| < n dan $Z \neq 1$ (3.4.5)

$Z = e^{\frac{2\pi ki}{n}} \Leftrightarrow Z^{n} = e^{\left(\frac{2\pi ki}{n}\right)n} = e^{2\pi ki} = \cos(2\pi k) + i\sin(2\pi k) = 1,$

untuk $k = \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm(n-1)$ (3.4.6)

Substitusikan persamaan (3.4.6) ke persamaan (3.4.5), sehingga diperoleh:

$$\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi kti}{n}} = \frac{1-Z^{n}}{1-Z} = \frac{1-1}{1-Z} = 0, \text{untuk } k = \pm 1, \cdots, \pm(n-1).$$

b) Dari hasil (a) diperoleh:

$$\sum_{t=1}^{n} e^{\frac{2\pi kti}{n}} = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n} (\cos\omega_k t + i\sin\omega_k t) = 0$$

$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n} \cos\omega_k t + i\ \sum_{t=1}^{n} \sin\omega_k t = 0$ (3.4.7)

Dari persamaan (3.4.7) hasilnya sama dengan nol, jika komponen real dan imajiner keduanya sama dengan nol, sehingga $\sum_{t=1}^{n} \cos\omega_k t = 0$ dan $i\ \sum_{t=1}^{n} \sin\omega_k t = 0 \Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n} \sin\omega_k t = 0.$

c) $\sum_{t=1}^{n} \cos\omega_j t \cos\omega_k t$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2}\left(e^{\omega_j ti} + e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\omega_k ti} + e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{(\omega_j+\omega_k)ti} + e^{(\omega_j-\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j+\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j-\omega_k)ti}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti(k+j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(-k+j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(k-j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(-k-j)}{n}}\right\} \quad (3.4.8)$$

Dari hasil (a) diperoleh:

Jika $k \neq j$, maka persamaan (3.4.8) hasilnya = 0.

Jika $k = j$, maka persamaan (3.4.8) akan menjadi:

$$\sum_{t=1}^{n}\cos\omega_j t\cos\omega_k t = \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{2}\left(e^{\omega_j ti} + e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2}\left(e^{\omega_k ti} + e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti2k}{n}} + e^{0} + e^{0} + e^{\frac{2\pi ti(-2k)}{n}}\right\}$$

$$= \frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}(0+1+1+0)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}1 = \frac{n}{2}$$

d) $\sum_{t=1}^{n}\sin\omega_j t\sin\omega_k t$

$$= \sum_{t=1}^{n}\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_j ti} - e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_k ti} - e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{(\omega_j+\omega_k)ti} - e^{(\omega_j-\omega_k)ti} - e^{(-\omega_j+\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j-\omega_k)ti}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti(k+j)}{n}} - e^{\frac{2\pi ti(-k+j)}{n}} - e^{\frac{2\pi ti(k-j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(-k-j)}{n}}\right\} \quad (3.4.9)$$

Dari hasil (a) diperoleh:

Jika $k \neq j$, maka persamaan (3.4.9) hasilnya = 0.

Jika $k = j$, maka persamaan (3.4.9) akan menjadi:

$$\sum_{t=1}^{n} \sin \omega_j t \sin \omega_k t = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2i}\left(e^{\omega_j ti} - e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_k ti} - e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti2k}{n}} - e^{0} - e^{0} + e^{\frac{2\pi ti(-2k)}{n}}\right\}$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n}(0 - 1 - 1 + 0)$$

$$= -\frac{1}{4}\sum_{t=1}^{n} -2 = \frac{n}{2}$$

e) $\sum_{t=1}^{n} \cos \omega_j t \sin \omega_k t$

$$= \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2}\left(e^{\omega_j ti} + e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_k ti} - e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= \frac{1}{4i}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{(\omega_j+\omega_k)ti} - e^{(\omega_j-\omega_k)ti} + e^{(-\omega_j+\omega_k)ti} - e^{(-\omega_j-\omega_k)ti}\right\}$$

$$= \frac{1}{4i}\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti(k+j)}{n}} - e^{\frac{2\pi ti(-k+j)}{n}} + e^{\frac{2\pi ti(k-j)}{n}} - e^{\frac{2\pi ti(-k-j)}{n}}\right\} \qquad (3.4.10)$$

Dari hasil (a) diperoleh:

Jika $k \neq j$, maka persamaan (3.4.10) hasilnya = 0.

Jika $k = j$, maka persamaan (3.4.10) akan menjadi:

$$\sum_{t=1}^{n} \cos \omega_j t \sin \omega_k t = \sum_{t=1}^{n} \frac{1}{2}\left(e^{\omega_j ti} + e^{-\omega_j ti}\right)\frac{1}{2i}\left(e^{\omega_k ti} - e^{-\omega_k ti}\right)$$

$$= -\frac{1}{4}i\sum_{t=1}^{n}\left\{e^{\frac{2\pi ti2k}{n}} - e^{0} + e^{0} - e^{\frac{2\pi ti(-2k)}{n}}\right\}$$

$$\sum_{t=1}^{n} \cos \omega_j t \sin \omega_k t = -\frac{1}{4} i \sum_{t=1}^{n} (0 - 1 + 1 - 0) = 0$$

Sehingga diperoleh:

$$\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.4.11)$$

$$\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} \cos \omega_1 t \\ \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_1 t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} \sin \omega_{n/2} t \end{bmatrix} [Z_t] = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_0 t \\ \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_1 t \\ \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_1 t \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_{n/2} t \end{bmatrix}$$

Dari persamaan (3.4.3) diperoleh:

$$b = \hat{\beta} = \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t \right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t \right]$$

$$\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{n/2} \\ b_{n/2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1} \sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t \qquad (3.4.12)$$

Dari persamaan (3.4.12) diperoleh nilai $\hat{\beta}$ yaitu:

$$a_0 = \left(\sum_{t=1}^{n} cos^2\omega_0 t\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \cos\omega_0 t\, Z_t = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \cos\omega_0 t$$

$$b_0 = \left(\sum_{t=1}^{n} sin^2\omega_0 t\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \sin\omega_0 t\, Z_t$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} sin^2\left(\frac{2\pi * 0}{n} t\right)\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin\omega_0 t$$

$= (0)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin\omega_0 t$ (tidak terdefinisi)

$$a_k = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \cos\omega_k t\, Z_t = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \cos\omega_k t \text{ , untuk } k = 1, 2, \cdots, \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$b_k = \left(\frac{n}{2}\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} \sin\omega_k t\, Z_t = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \sin\omega_k t \text{ , untuk } k = 1, 2, \cdots, \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

$$a_{\frac{n}{2}} = \left(\sum_{t=1}^{n} cos^2\omega_{\frac{n}{2}} t\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos\omega_{\frac{n}{2}} t$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} cos^2\left(\frac{2\pi * \frac{n}{2}}{n} t\right)\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos\omega_{\frac{n}{2}} t$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} 1\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos\omega_{\frac{n}{2}} t = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \cos\omega_{\frac{n}{2}} t$$

$$b_{\frac{n}{2}} = \left(\sum_{t=1}^{n} sin^2\omega_{\frac{n}{2}} t\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin\omega_{\frac{n}{2}} t$$

$$= \left(\sum_{t=1}^{n} sin^2\left(\frac{2\pi * \frac{n}{2}}{n} t\right)\right)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin\omega_{\frac{n}{2}} t$$

$$= (0)^{-1} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_{\frac{n}{2}} t \text{ (tidak terdefinisi)}$$

Atau dalam bentuk yang lebih sederhana adalah sebagai berikut:

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_k t \,, \text{untuk } k = 0 \text{ dan } k = n/2 \\ \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \cos \omega_k t \,, \text{untuk } k = 1, 2, \cdots, \left(\frac{n-1}{2}\right) \end{cases} \tag{3.4.13}$$

$$b_k = \frac{2}{n} \sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_k t \,, \text{untuk } k = 1, 2, \cdots, \left(\frac{n-1}{2}\right)$$

Jumlah kuadrat kesalahan pada persamaan (3.4.2) dengan menggunakan estimasi kuadrat terkecil (*OLS*) adalah:

$$\sum_{t=1}^{n} e_t^2 = \sum_{t=1}^{n} Z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^{n} Z_t X_t\right] \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right] \tag{3.4.14}$$

Jika terdapat banyak variabel bebas dan antar variabel bebas tersebut tidak berkorelasi atau saling independen, maka residual *OLS* $\hat{e}_t = 0$ sehingga persamaan (3.4.14) akan menjadi:

$$0 = \sum_{t=1}^{n} Z_t^2 - \left[\sum_{t=1}^{n} Z_t X_t\right] \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right]$$

$$\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = \left[\sum_{t=1}^{n} Z_t X_t\right] \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right] \tag{3.4.15}$$

Dari persamaan (3.4.3) diperoleh:

$$b = \hat{\beta} = \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right]$$

$$\Leftrightarrow \sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t = \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right] \beta$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ a_1 \\ b_1 \\ \vdots \\ a_{n/2} \\ b_{n/2} \end{bmatrix} \qquad (3.4.16)$$

Substitusikan persamaan (3.4.16) dan persamaan (3.4.11) ke persamaan (3.4.15) sehingga diperoleh:

$$\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = \left[\sum_{t=1}^{n} Z_t X_t\right] \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' X_t\right]^{-1} \left[\sum_{t=1}^{n} X_t' Z_t\right]$$

$$\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = \beta' \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \beta$$

$$= \beta' \begin{bmatrix} n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \frac{n}{2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{n}{2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \beta$$

$$= \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & a_1 & b_1 & \cdots & a_{n/2} & b_{n/2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n a_0 \\ 0 * b_0 \\ \frac{n}{2} a_1 \\ \frac{n}{2} b_1 \\ \vdots \\ n a_{n/2} \\ 0 * b_{n/2} \end{bmatrix}$$

$$= na_0^2 + 0 + \frac{n}{2}a_1^2 + \frac{n}{2}b_1^2 + \cdots + \frac{n}{2}a_{(n-1)/2}^2 + \frac{n}{2}b_{(n-1)/2}^2 + na_{n/2}^2 + 0$$

Didapat:

$$\sum_{t=1}^{n} Z_t^2 = \begin{cases} na_0^2 + \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a_k^2 + b_k^2),\ \text{jika } n \text{ ganjil} \\ na_0^2 + \frac{n}{2}\sum_{k=1}^{\left(\frac{n-1}{2}\right)}(a_k^2 + b_k^2) + na_{n/2}^2,\ \text{jika } n \text{ genap} \end{cases} \quad (3.4.17)$$

Fungsi frekuensi yang diberikan oleh jumlah kuadrat ternormalisasi dinamakan periodogram, dengan demikian periodogram didefinisikan sebagai berikut:

$$I(\omega_k) = \begin{cases} na_0^2, \quad \text{jika } k = 0 \\ \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2), \text{jika } k = 1, 2, \cdots, [(n-1)/2] \\ na_{n/2}^2, \quad \text{jika } k = \frac{n}{2} \text{ untuk } n \text{ genap} \end{cases} \quad (3.4.18)$$

3.4.2 Sifat-sifat Sampling Periodogram

Diasumsikan $Z_1, Z_2, \cdots, Z_t$ *iid* berdistribusi $N(0, \sigma^2)$, maka

$$E(a_k) = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} E(Z_t)\cos(\omega_k t) = 0$$

dan;

$$Var\ (a_k) = E(a_k - \mu)^2 = E(a_k)^2$$

$$= E\left(\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \cos(\omega_k t)\right)^2$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{t=1}^{n} E(Z_t)^2 \cos^2(\omega_k t)$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{t=1}^{n} \sigma^2 \cos^2(\omega_k t)$$

$$= \frac{4\sigma^2}{n^2}\sum_{t=1}^{n} \cos^2(\omega_k t)$$

$$Var\ (a_k) = \frac{4\sigma^2}{n^2}\frac{n}{2} = \frac{2\sigma^2}{n}$$

Dari sini a_k untuk k = 0, 1, . . ., [(*n*-1)/2] *iid* berdistribusi $N(0, \frac{2\sigma^2}{n})$ sehingga $\frac{a_k}{\sigma\sqrt{2/n}} \sim N(0,1)$. Dengan demikian $\frac{n a_k^2}{2\sigma^2} \overset{iid}{\sim} \chi^2(1)$. Demikian juga dengan:

$E(b_k) = \frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} E(Z_t)\sin(\omega_k t) = 0$, dan

$$Var\ (b_k) = E(b_k - \mu)^2 = E(b_k)^2$$

$$= E\left(\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \sin \omega_k t\right)^2$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{t=1}^{n} E(Z_t)^2 \sin^2(\omega_k t)$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{t=1}^{n} \sigma^2 \sin^2(\omega_k t)$$

$$= \frac{4\sigma^2}{n^2}\sum_{t=1}^{n} \sin^2(\omega_k t)$$

$$Var\ (b_k) = \frac{4\sigma^2}{n^2}\frac{n}{2} = \frac{2\sigma^2}{n}$$

Dari sini b_k untuk k = 0, 1, . . ., [(n-1)/2] *iid* berdistribusi $N(0, \frac{2\sigma^2}{n})$ sehingga $\frac{b_k}{\sigma\sqrt{2/n}} \sim N(0,1)$. Dengan demikian $\frac{nb_k^2}{2\sigma^2} \overset{iid}{\sim} \chi^2(1)$. Selanjutnya $\frac{na_k^2}{2\sigma^2}$ dan $\frac{nb_j^2}{2\sigma^2}$ saling independen untuk k = 0, 1, . . ., [(n-1)/2] dan j = 0, 1, . . ., [(n-1)/2]. Karena a_k dan b_j adalah normal dan sifat ortogonalitas sinus dan kosinus, maka:

$$Cov(a_k, b_j) = E(a_k b_j) - E(a_k)E(b_j) = E(a_k b_j)$$

$$= E\left(\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \cos(\omega_k t) . \frac{2}{n}\sum_{u=1}^{n} Z_u \sin \omega_j u\right)$$

$$= \frac{4}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\left[E(Z_t^2) \cos \omega_k t \,.\, \sin \omega_j t\right]$$

$$= \frac{4\sigma^2}{n^2}\sum_{t=1}^{n}\left[\cos \omega_k t \,.\, \sin \omega_j t\right]$$

$$Cov(a_k, b_j) = 0, \text{untuk semua } k \text{ dan } j \tag{3.4.19}$$

Ordinat periodogram didefinisikan sebagai berikut:

$$\frac{I(\omega_k)}{\sigma^2} = \frac{n}{2\sigma^2}(a_k^2 + b_k^2), \text{untuk } k = 1, 2, \cdots, [(n-1)/2] \tag{3.4.20}$$

Dengan demikian ordinat periodogram pada persamaan (3.4.20) berdistribusi $\chi^2(2)$.

Untuk *k* = 0, diperoleh:

$$E(a_0) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E(Z_t)\cos\omega_0 t = 0$$

dan;

$$Var(a_0) = E(a_0 - \mu)^2 = E(a_0)^2$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \cos\omega_0 t\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} E(Z_t)^2 cos^2\omega_0 t$$

$$= \frac{1}{n^2}\sum_{t=1}^{n} \sigma^2 cos^2\omega_0 t$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2}\textstyle\sum_{t=1}^{n} cos^2 0$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2}\textstyle\sum_{t=1}^{n} 1 = \frac{\sigma^2}{n^2}.n = \frac{\sigma^2}{n}$$

Sehingga a_0 berdistribusi $N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ akibatnya $\frac{a_0}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. Dengan demikian $\frac{na_0^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$.

Untuk *n* genap, dengan $k = n/2$, diperoleh:

$$E(a_{n/2}) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E(Z_t)\cos\omega_{n/2} t = 0$$

dan;

$$Var(a_{n/2}) = E(a_{n/2} - \mu)^2 = E(a_{n/2})^2$$

$$= E\left(\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t \cos\omega_{n/2} t\right)^2$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{n} E(Z_t)^2 cos^2 \omega_{n/2} t$$

$$= \frac{1}{n^2} \sum_{t=1}^{n} \sigma^2 cos^2 \omega_{n/2} t$$

$$= \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{t=1}^{n} cos^2 \omega_{n/2} t$$

$$Var(a_k) = \frac{\sigma^2}{n^2} \sum_{t=1}^{n} 1 = \frac{\sigma^2}{n^2} . n = \frac{\sigma^2}{n}$$

Dari sini $a_{n/2}$ berdistribusi $N(0, \frac{\sigma^2}{n})$ sehingga $\frac{a_{n/2}}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$. Dengan demikian $\frac{n a_{n/2}^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$. Jadi ordinate periodogram adalah $\frac{I(0)}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$ dan $\frac{I(\pi)}{\sigma^2} \sim \chi^2(1)$.

3.4.3 Uji Untuk Komponen Periodik Yang Tidak Diketahui

Pada prakteknya, runtun waktu berisi komponen periodik yang tidak diketahui frekuensinya. Kita dapat menguji:

H_0: $a = b = 0$ melawan H_1: $a \neq 0$ atau $b \neq 0$

untuk model di bawah ini:

$$Z_t = a \cos \omega t + b \sin \omega t + e_t \qquad (3.4.21)$$

Dimana $e_t \underset{\sim}{iid} N(0, \sigma^2)$, tetapi frekuensi ω tidak diketahui. Tujuan periodogram adalah untuk mencari periodesitas yang tersembunyi. Jika model dasarnya berisi komponen periodik tunggal pada frekuensi ω, diharapkan bahwa periodogram $I(\omega_k)$ pada frekuensi Fourier ω_k akan mencapai maksimum ω. Dengan demikian dapat dicari nilai maksimum ordinat periodogram dan menguji apakah ordinat ini merupakan nilai maksimum untuk *n*/2 sampel random dari suatu variabel random yang iid berdistribusi $\chi^2(2)$.

Pada keadaan ini statistik uji yang digunakan adalah:

$$I^{(1)}(\omega_{(1)}) = max\{I(\omega_k)\} \tag{3.4.22}$$

dimana $\omega_{(1)}$ adalah frekuensi Fourier yang mempunyai nilai maksimum ordinat periodogram. Uji untuk $I^{(1)}(\omega_{(1)})$ diperoleh oleh Fisher (1929), berdasarkan pada statistik uji:

$$T = \frac{I^{(1)}(\omega_{(1)})}{\sum_{k=1}^{n/2} I(\omega_k)} \tag{3.4.23}$$

Di bawah hipotesis nol, proses *white noise* $N(0, \sigma^2)$ untuk Z_t, Fisher (1929) menunjukkan bahwa:

$$P(T > g) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{(j-1)} \binom{N}{j} (1 - jg)^{N-1} \tag{3.4.24}$$

Dimana $N = \frac{n}{2}$, g > 0 dan *m* adalah bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan $\frac{1}{g}$. Dengan demikian, untuk tingkat signifikansi α dapat digunakan persamaan (3.4.24) untuk mendapatkan nilai kritik g_α, yaitu:

$$P(T > g_\alpha) = \alpha.$$

Jika nilai *T* yang dihitung dari runtun waktu > g_α, maka H_0 ditolak yang berarti bahwa runtun waktu Z_t berisi komponen periodik. Hal ini dikenal sebagai uji Fisher.

Distribusi *T* untuk tingkat signifikansi α = 0,05 yang diberikan oleh Fisher (1929), dapat dilihat pada tabel di bawah ini:

Tabel 1

Distribusi *T*

N	g_α ***(by exact formula)***	g_α***(by first term only)***
5	0,68377	0,68377
10	0,44495	0,44495
15	0,33462	0,33463
20	0,27040	0,27046
25	0,22805	0,22813
30	0,19784	0,19794
35	0,17513	0,17525
40	0,15738	0,15752
45	0,14310	0,14324
50	0,13135	0,13149

N = (*n* – 1)/2, jika *n* ganjil dan *N* = (*n*/2 – 1), jika *n* genap.

Kolom ke – 3 pada tabel di atas adalah pendekatan yang diperoleh dengan menggunakan suku pertama pada persamaan (3.4.24) yaitu:

$$P(T > g) \simeq N(1 - g)^{N-1} \qquad (3.4.25)$$

Dengan pendekatan ini akan diperoleh hasil yang teliti, untuk tujuan praktek digunakan persamaan (3.4.25) agar memperoleh nilai kritik g_α yang diuji.

Di bawah hipotesis nol pada persamaan (3.4.21), nilai signifikansi $I^{(1)}(\omega_{(1)})$ merupakan nilai maksimum untuk menolak H_0 artinya ada komponen periodik pada runtun waktu di beberapa frekuensi ω. ω ini tidak perlu sama dengan $\omega_{(1)}$, sebab $\omega_{(1)}$ hanya dipilih dari frekuensi Fourier dan tidak dari semua frekuensi yang mungkin antara 0 dan π.

Misalkan $I^{(2)}(\omega_{(2)})$ adalah ordinat periodogram terbesar kedua pada frekuensi Fourier $\omega_{(2)}$. Whittle (1952) mengusulkan pengembangan uji Fisher untuk ordinat terbesar kedua ini berdasarkan statistik uji:

$$T_2 = \frac{I^{(2)}(\omega_{(2)})}{\left\{\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]} I(\omega_k)\right\} - I^{(1)}(\omega_{(1)})} \qquad (3.4.26)$$

dimana distribusi pada persamaan (3.4.24) digunakan tetapi N diganti dengan $N - 1$. Tahap ini dapat diteruskan sampai diperoleh hasil yang tidak signifikan.

3.5 Spektrum Sampel

Untuk proses stasioner dalam kovarian Z_t dengan autokovarian dapat dijumlahkan, didefinisikan nilai spektrum populasi pada frekuensi ω sebagai berikut:

$$f(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \, e^{-i\omega k} \qquad (3.5.1.a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(\omega k)), -\pi \leq \omega \leq \pi \qquad (3.5.1.b)$$

Diberikan n sampel observasi $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ dapat dihitung $n - 1$ autokovariansi sampel, yaitu:

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-j}(Z_t - \bar{Z})\left(Z_{t-j} - \bar{Z}\right) \tag{3.5.2}$$

dimana $\bar{Z} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t$ adalah mean sampel. Berdasarkan pada data sampel, estimasi $f(\omega)$ diperoleh dengan menggantikan autokovariansi teoritis γ_k dengan autokovariansi sampel $\hat{\gamma}_k$, untuk runtun waktu n observasi yang diberikan, dapat dihitung $\hat{\gamma}_k, k = 0, 1, 2, \cdots, (n-1)$. Estimasi $f(\omega)$ adalah:

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\hat{\gamma}_k\, e^{-i\omega k} \tag{3.5.3.a}$$

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\hat{\gamma}_0 + 2\sum_{k=1}^{n-1}\hat{\gamma}_k \cos \omega k\right) \tag{3.5.3.b}$$

$\hat{f}(\omega)$ dinamakan spektrum sampel, sebab $\hat{\gamma}_k$ adalah penaksir tak bias, maka:

$$\lim_{n\to\infty} E(\hat{f}(\omega)) = f(\omega) \tag{3.5.4}$$

Dengan demikian $\hat{f}(\omega)$ adalah penaksir tak bias dan disebut sebagai estimator untuk $f(\omega)$. Untuk menguji sifat-sifat spektrum sampel, dipertimbangkan $f(\widehat{\omega}_k)$ pada frekuensi Fourier $\omega_k = \frac{2\pi k}{n}, k = 1, 2, \cdots, n/2$. Pada frekuensi Fourier ini, spektrum sampel dan periodogram saling berhubungan. Hal ini dapat dilihat sebagai berikut:

$$I(\omega_k) = \frac{n}{2}(a_k^2 + b_k^2)$$

$$= \frac{n}{2}(a_k - ib_k)(a_k + ib_k)$$

$$= \frac{n}{2}\left[\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t(\cos\omega_k t - i\sin\omega_k t)\right]\left[\frac{2}{n}\sum_{t=1}^{n} Z_t(\cos\omega_k t + i\sin\omega_k)\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\sum_{t=1}^{n} Z_t e^{-i\omega_k t}\right]\left[\sum_{t=1}^{n} Z_t e^{i\omega_k t}\right]$$

$$= \frac{2}{n}\left[\sum_{t=1}^{n} (Z_t - \bar{Z}) e^{-i\omega_k t}\right]\left[\sum_{t=1}^{n} (Z_t - \bar{Z}) e^{i\omega_k t}\right]$$

$$I(\omega_k) = \tfrac{2}{n}\textstyle\sum_{t=1}^{n}\sum_{s=1}^{n}(Z_t - \bar{Z})(Z_s - \bar{Z})\, e^{-i\omega_k(t-s)} \qquad (3.5.5)$$

Dimana $\sum_{t=1}^{n} e^{i\omega_k t} = \sum_{t=1}^{n} e^{-i\omega_k t} = 0$, karena

$$\hat{\gamma}_j = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n-j}(Z_t - \bar{Z})\left(Z_{t-j} - \bar{Z}\right)$$

Misalkan *j* = *t* – *s*, sehingga persamaan (3.5.5) diperoleh:

$$I(\omega_k) = 2\sum_{j=-(n-1)}^{n-1} \hat{\gamma}_j\, e^{-i\omega_k j}$$

$$I(\omega_k) = 2\left\{\hat{\gamma}_0 + 2\textstyle\sum_{j=1}^{n-1}\hat{\gamma}_j\cos\omega_k j\right\} \qquad (3.5.6)$$

Dari persamaan (3.5.3.b) dan (3.5.6) diperoleh:

$$\hat{f}(\omega_k) = \tfrac{1}{4\pi} I(\omega_k), \qquad k = 1, 2, \cdots, [\tfrac{n}{2}] \qquad (3.5.7)$$

Dimana $\hat{f}\left(\omega_{\frac{n}{2}}\right) = \frac{I(\omega_{n/2})}{2\pi} = \frac{n a_{n/2}^2}{2\pi}$, jika n genap.

Misalkan Z_t adalah deret *white noise* dengan mean nol dan variansi konstan σ^2, maka $\hat{f}(\omega_k)$; untuk $k = 1, 2, \cdots, \frac{n-1}{2}$ berdistribusi independen sebagai:

$$\frac{I(\omega_k)}{\sigma^2} \sim \chi^2(2)$$

$$\Leftrightarrow I(\omega_k) \sim \sigma^2 \chi^2(2)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4\pi} I(\omega_k) \sim \frac{\sigma^2}{4\pi} \chi^2(2)$$

$$\Leftrightarrow \hat{f}(\omega_k) \sim \frac{\sigma^2}{2\pi} \frac{\chi^2(2)}{2} \tag{3.5.8}$$

Dimana $\frac{\sigma^2}{2\pi}$ pada persamaan (3.5.8) merupakan spektrum Z_t.