BAB III

PENAKSIR DERET FOURIER

3.1 Penaksir

Dalam statistika, penaksir adalah sebuah statistik (fungsi dari data sampel observasi) yang digunakan untuk menaksir parameter populasi yang tidak diketahui (*estimand*) atau fungsi yang memetakan model sampel terhadap himpunan taksiran sampel. Penaksiran adalah hasil aplikasi dari fungsi terhadap sampel khusus dari data. Banyak penaksir yang berbeda yang dapat digunakan untuk setiap parameter yang diberikan. Beberapa kriteria digunakan untuk memilih diantara penaksir, walaupun dalam kebanyakan kasus kriteria tersebut tidak dapat digunakan dengan mudah untuk memilih satu penaksir terhadap penaksir lainnya.

3.2 Penaksir Deret Fourier

Misalkan diberikan n pasang pengamatan $(t_1, y_1),(t_2, y_2),...,(t_n, y_n)$ secara umum hubungan regresinya dapat dimodelkan sebagai berikut:

$$y_j = f\left(t_j\right)+\varepsilon_j \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.1}$$

dengan ε_j adalah random error yang tidak berkorelasi dengan mean 0 dan varians σ^2 dan f adalah fungsi regresi yang tidak diketahui dan fungsi yang akan ditaksir.

Misalkan diasumsikan bahwa $f \in L_2[a,b]$ yang merupakan ruang Hilbert sehingga f dapat dinyatakan sebagai kombinasi linear tak berhingga dari fungsi basis $\{x_r\}$. Misalkan $\{t_r\}_{r=1}^{\infty}$ merupakan sistem ortonormal lengkap pada $L_2[a,b]$ dan untuk $f \in L_2[a,b]$ yang didefinisikan oleh $\beta_r = \langle f, t_r \rangle$, dengan β_r pada persamaan $\beta_r = \langle f, t_r \rangle$ disebut sebagai koefisien-koefisien Fourier yang memenuhi identitas Parseval yaitu:

$$\sum_{r=1}^{\infty} |\beta_r|^2 = \|f\|^2 \tag{3.2}$$

maka $f(t_j)$ dapat dinyatakan sebagai:

$$f(t_j) = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r x_r \tag{3.3}$$

sehingga model pada persamaan (3.1) menjadi:

$$y_j = \sum_{r=1}^{\infty} \beta_r x_r(t_j) + \varepsilon_j \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.4}$$

sehingga, data mengikuti model linear dengan tak hingga banyaknya koefisien regresi yang tidak diketahui.

Karena $\sum_{r=1}^{\infty} |\beta_r|^2 < \infty$ dan β_r menuju nol, maka terdapat bilangan bulat λ sedemikian sehingga fungsi f dapat didekati dengan:

$$f(t_j) = \sum_{r=1}^{\lambda} \beta_r x_r \tag{3.5}$$

oleh karena itu, model pada persamaan (3.4) menjadi:

$$y_j = \sum_{r=1}^{\lambda} \beta_r x_r(t_j) + \varepsilon_j \qquad j = 1,2,\ldots,n \tag{3.6}$$

model ini mirip seperti model linear, sehingga cukup beralasan untuk mencoba menggunakan teknik inferensial pada model linear dalam hal ini. Misalkan diasumsikan $t_1, t_2, \ldots, t_n$ adalah titik-titik yang berjarak sama pada $[a,b]$, maka akan ditaksir koefisien-koefisien Fourier yang tidak diketahui yang meminimumkan *Mean Square Error* dengan terlebih dahulu menentukan nilai λ yang optimal. Pemilihan dari λ akan mempengaruhi seberapa mulus atau kasar penaksir tersebut. Biasanya nilai λ optimal terbesar akan menghasilkan penaksir-penaksir yang mendekati kepada interpolasi (t_j, y_j) daripada nilai λ terkecil sehingga penaksir tersebut akan cenderung kasar.

Didefinisikan matriks

$$x_\lambda = \{x_r(t_j)\}_{r=1,2,\ldots,\lambda}^{j=1,2,\ldots,n} \qquad (3.7)$$

secara spesifik diasumsikan

$$[a,b] = [0,1] \qquad (3.8)$$

dan karena t_j secara keseluruhan berada pada ruang $[0,1]$, maka

$$t_j = {j-1}/{n} \qquad j = 1,2,\ldots,n \qquad (3.9)$$

Untuk menaksir nilai f harus ditentukan model linear yang memuat bentuk fungsi sinus dan cosinus. Karena fungsi eksponensial dapat dinyatakan dalam bentuk sinus dan cosinus, maka sistem ortonormal lengkap dari $L_2[0,1]$ didefinisikan sebagai fungsi :

$$x_r(t) = e^{2\pi irt}, \qquad r = 0, \pm 1, \ldots \qquad (3.10)$$

Dengan menggunakan metode *Least Square*, akan diperoleh dengan tunggal penaksir untuk β yaitu:

$$y_j = \sum_{r=1}^{\lambda} \beta_r x_r \left(t_j\right) + \varepsilon_j$$

$$\varepsilon_j = y_j - \sum_{r=1}^{\lambda} \beta_r x_r \left(t_j\right)$$

$$\varepsilon = y - x_\lambda \beta_\lambda$$

$$(\varepsilon)^t \varepsilon = \sum (\varepsilon)^2 = (y - x_\lambda \beta_\lambda)^t (y - x_\lambda \beta_\lambda)$$

$$= \left((y)^t - \beta_\lambda^t x_\lambda^t\right)(y - x_\lambda \beta_\lambda)$$

$$= (y)^t y - (y)^t x_\lambda \beta_\lambda - \beta_\lambda^t x_\lambda y + \beta_\lambda^t x_\lambda^t x_\lambda \beta_\lambda$$

$$= (y)^t y - \left((y)^t x_\lambda \beta_\lambda\right)^t - \beta_\lambda^t x_\lambda y + \beta_\lambda^t x_\lambda^t x_\lambda \beta_\lambda$$

$$= (y)^t y - \beta_\lambda^t x_\lambda^t y - \beta_\lambda^t x_\lambda y + \beta_\lambda^t x_\lambda^t x_\lambda \beta_\lambda$$

$$= (y)^t y - 2\beta_\lambda^t x_\lambda^t y + \beta_\lambda^t x_\lambda^t x_\lambda \beta_\lambda \qquad (3.11)$$

karena prinsip dari metode *Least Square* adalah meminimumkan jumlah kuadrat, maka:

$$\frac{\partial \sum \varepsilon}{\partial \beta_\lambda} = 0$$

$$\frac{\partial \sum \varepsilon}{\partial \beta_\lambda} = 0 - 2x_\lambda^t y + 2x_\lambda^t x_\lambda \beta_\lambda$$

$$0 = -2x_\lambda^t y + 2x_\lambda^t x_\lambda \beta_\lambda$$

$$= -x_\lambda^t y + x_\lambda^t x_\lambda \beta_\lambda$$

$$x_\lambda^t x_\lambda \beta_\lambda = x_\lambda^t y$$

$$\hat{\beta}_\lambda = \left(x_\lambda^t x_\lambda\right)^{-1} x_\lambda^t y \qquad (3.12)$$

Dimana y merupakan vektor observasi dan x_λ^t menyatakan transpose kompleks konjugat dari x_λ. Sehingga penaksir deret Fourier untuk $\hat{f}\left(t_j\right)$ adalah :

$$\hat{f}\left(t_j\right) = \sum_{r=1}^{\lambda} \hat{\beta}_r x_r \left(t_j\right) \qquad (3.13)$$

dengan $x_r = \{x_\lambda\}_{r=-\lambda}^{\lambda}$.

Dugaan penaksir deret Fourier untuk *y* dapat ditulis dengan notasi matriks, yaitu

$$\hat{f}\left(t_j\right) = x_\lambda \hat{\beta}_\lambda \qquad (3.14)$$

Elemen dari matriks $x_\lambda = \left\{e^{2\pi i r t_j}\right\}_{r=-\lambda}^{\lambda}$ dengan ukuran $n \times (2\lambda + 1)$ adalah :

$$x_\lambda = \begin{bmatrix} e^{2\pi i(-\lambda)1} & e^{2\pi i(-\lambda+1)1} & \cdots & e^{2\pi i\lambda 1} \\ e^{2\pi i(-\lambda)2} & e^{2\pi i(-\lambda+1)2} & \cdots & e^{2\pi i\lambda 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{2\pi i(-\lambda)n} & e^{2\pi i(-\lambda+1)n} & \cdots & e^{2\pi i\lambda n} \end{bmatrix}$$

dan $$x_\lambda^t = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i(-\lambda)1} & e^{-2\pi i(-\lambda)2} & \cdots & e^{-2\pi i(-\lambda)n} \\ e^{-2\pi i(-\lambda+1)1} & e^{-2\pi i(-\lambda+1)2} & \cdots & e^{-2\pi i(-\lambda+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-2\pi i\lambda 1} & e^{-2\pi i\lambda 2} & \cdots & e^{-2\pi i\lambda n} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi barisan ortonormal, maka dapat ditentukan elemen-elemen dari (3.12)

$$x_\lambda^t x_\lambda = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i(-\lambda)1} & e^{-2\pi i(-\lambda)2} & \cdots & e^{-2\pi i(-\lambda)n} \\ e^{-2\pi i(-\lambda+1)1} & e^{-2\pi i(-\lambda+1)2} & \cdots & e^{-2\pi i(-\lambda+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-2\pi i\lambda 1} & e^{-2\pi i\lambda 2} & \cdots & e^{-2\pi i\lambda n} \end{bmatrix} \times$$

$$\begin{bmatrix} e^{2\pi i(-\lambda)1} & e^{2\pi i(-\lambda+1)1} & \cdots & e^{2\pi i\lambda 1} \\ e^{2\pi i(-\lambda)2} & e^{2\pi i(-\lambda+1)2} & \cdots & e^{2\pi i\lambda 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{2\pi i(-\lambda)n} & e^{2\pi i(-\lambda+1)n} & \cdots & e^{2\pi i\lambda n} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & n \end{bmatrix} = n \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\left(x_\lambda^t x_\lambda\right)^{-1} = \frac{1}{n} I = \frac{1}{n} \qquad (3.15)$$

$$x_\lambda^t y = \begin{bmatrix} e^{-2\pi i(-\lambda)1} & e^{-2\pi i(-\lambda)2} & \cdots & e^{-2\pi i(-\lambda)n} \\ e^{-2\pi i(-\lambda+1)1} & e^{-2\pi i(-\lambda+1)2} & \cdots & e^{-2\pi i(-\lambda+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-2\pi i\lambda 1} & e^{-2\pi i\lambda 2} & \cdots & e^{-2\pi i\lambda n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} e^{-2\pi i(-\lambda)1} y_1 + e^{-2\pi i(-\lambda)2} y_2 + \cdots + e^{-2\pi i(-\lambda)n} y_n \\ e^{-2\pi i(-\lambda+1)1} y_1 + e^{-2\pi i(-\lambda+1)2} y_2 + \cdots + e^{-2\pi i(-\lambda+1)n} y_n \\ \vdots \\ e^{-2\pi i\lambda 1} y_1 + e^{-2\pi i\lambda 2} y_2 + \cdots + e^{-2\pi i\lambda n} y_n \end{bmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} y_j e^{-2\pi i r t_j} \qquad (3.16)$$

Dengan demikian elemen-elemen dari (3.12) menjadi :

$$\hat{\beta}_r = n^{-1} \sum_{j=1}^{n} y_j e^{-2\pi i r t_j} \qquad (3.17)$$

sehingga diperoleh penaksir deret Fourier untuk $f(t_j)$ yaitu:

$$\hat{f}(t_j) = \sum_{r=-\lambda}^{\lambda} \hat{\beta}_r e^{-2\pi i r t_j} \tag{3.18}$$

$$= \sum_{r=-\lambda}^{\lambda} \left(n^{-1} \sum_{j=1}^{n} y_j e^{-2\pi i r t_j} \right) e^{2\pi i r t_j} \tag{3.19}$$

Dari persamaan (3.8) dan (3.9), maka penaksir deret Fourier pada persamaan (3.18) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\hat{f}(t_j) = \sum_{r=-\lambda}^{\lambda} \hat{\beta}_r e^{2\pi i r (j-1)/n} \tag{3.20}$$

dengan $j = 1,2,\ldots,n$ dan $i = \sqrt{-1}$

Fungsi $\hat{f}(t_j)$ akan mempunyai komponen riil dan imajiner secara berturut-turut, dimana keduanya adalah fungsi bernilai riil. Kompleks konjugat dari $\hat{\beta}_r$ didefinisikan oleh $\hat{\beta}_{(-r)}$, dengan:

$$a_r = \hat{\beta}_r + \hat{\beta}_{(-r)}$$

$$b_r = i\left(\hat{\beta}_r + \hat{\beta}_{(-r)}\right)$$

nilai-nilai dari a_r dan b_r ditentukan dengan menggunakan persamaan $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ dan $e^{-ix} = \cos(x) - i\sin(x)$

persamaan (3.18) dapat dinyatakan dalam bentuk fungsi sinus dan cosinus yaitu:

$$a_r = \hat{\beta}_r + \hat{\beta}_{(-r)}$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j e^{2\pi i r t_j} + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j e^{-2\pi i r t_j}$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} y_j e^{2\pi i r t_j} + \sum_{j=1}^{n} y_j e^{-2\pi i r t_j}\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n} y_j \left(\cos\left(2\pi r t_j\right) + i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right) + \sum_{j=1}^{n} y_j \left(\cos\left(2\pi r t_j\right) - i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\left[\sum_{j=1}^{n}\left(y_j \cos\left(2\pi r t_j\right) + y_j i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right) + \sum_{j=1}^{n}\left(y_j \cos\left(2\pi r t_j\right) - y_j i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \left[\cos\left(2\pi r t_j\right) + i\sin\left(2\pi r t_j\right) + \cos\left(2\pi r t_j\right) - i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \cos\left(2\pi r t_j\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \cos\left(2\pi r\,(j-1)/n\right) \qquad (3.21)$$

$$b_r = i\left(\beta_r + \beta_{(-r)}\right)$$

$$= i\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j e^{-2\pi i r t_j} - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j e^{2\pi i r t_j}\right]$$

$$= i\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \left(e^{-2\pi i r t_j} - e^{2\pi i r t_j}\right)\right]$$

$$= i\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \left(\cos\left(2\pi r t_j\right) - i\sin\left(2\pi r t_j\right) - \cos\left(2\pi r t_j\right) - i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right)\right]$$

$$= i\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \left(-2i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right)\right]$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \sin\left(2\pi r t_j\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \sin\left(2\pi r\left(j-1\right)/n\right) \qquad (3.22)$$

sehingga bentuk penaksir untuk $\hat{f}\left(t_j\right)$ adalah :

$$\hat{f}\left(t_j\right) = \sum_{r=-\lambda}^{\lambda} \hat{\beta}_r e^{2\pi i r t_j}$$

$$= \sum_{r=-\lambda}^{\lambda}\left(\hat{\beta}_r e^{2\pi i r t_j} + \hat{\beta}_{(-r)} e^{2\pi i(-r)t_j}\right)$$

$$= \hat{\beta}_0 + \sum_{r=1}^{\lambda}\left(\hat{\beta}_r e^{2\pi i r t_j} + \hat{\beta}_{(-r)} e^{2\pi i(-r)t_j}\right)$$

$$= \hat{\beta}_0 + \sum_{r=1}^{\lambda}\left[\hat{\beta}_r\left(\cos\left(2\pi r t_j\right) + i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right) + \hat{\beta}_{(-r)}\cos\left(2\pi r t_j\right) - i\sin\left(2\pi r t_j\right)\right]$$

$$= \hat{\beta}_0 + \sum_{r=1}^{\lambda}\left[\left(\hat{\beta}_r + \hat{\beta}_{(-r)}\right)\cos\left(2\pi r t_j\right) + i\left(\hat{\beta}_r - \hat{\beta}_{(-r)}\right)\sin\left(2\pi r t_j\right)\right]$$

$$= \hat{\beta}_0 + \sum_{r=1}^{\lambda}\left[a_r\cos\left(2\pi r t_j\right) + b_r\sin\left(2\pi r t_j\right)\right]$$

$$= \hat{\beta}_0 + \sum_{r=1}^{\lambda}\left[a_r\cos\left(2\pi r\left(j-1\right)/n\right) + b_r\sin\left(2\pi r\left(j-1\right)/n\right)\right] \qquad (3.23)$$

sehingga penaksir deret Fourier untuk $\hat{f}\left(t_j\right)$ adalah :

$$\hat{f}(t_j) = \hat{\beta}_0 + \sum_{r=1}^{\lambda}\left[a_r\cos\left(2\pi r\left(j-1\right)/n\right) + b_r\sin\left(2\pi r\left(j-1\right)/n\right)\right] \qquad (3.24)$$

dimana :

$$a_r = \hat{\beta}_j + \hat{\beta}_{(-j)}$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \cos\left(2\pi r\left(j-1\right)/n\right)$$

$$b_r = i\left(\hat{\beta}_r + \hat{\beta}_{(-r)}\right)$$

$$= \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n} y_j \sin\left(2\pi r\left(j-1\right)/n\right)$$

3.3 Pemilihan Parameter Penghalus (λ)

Pemilihan parameter penghalus sangat penting dalam mendapatkan penaksir kurva regresi nonparametrik. Besarnya nilai parameter penghalus (λ) yang digunakan akan mempengaruhi kemulusan kurva yang dihasilkan. Dalam sub bab ini akan dibahas bagaimana cara mendapatkan parameter penghalus (λ) yang optimal. Metode yang akan digunakan adalah metode GCV. Parameter penghalus yang optimal diperoleh dengan meminimumkan GCV (λ), dimana GCV (λ) dirumuskan seperti pada persamaan (2.44). sehingga bentuk penaksir deret Fourier yang telah diperoleh pada persamaan (3.20) dapat ditulis sebagai :

$$\hat{f}_{\lambda}\left(t_j\right) = H\left(\lambda\right) y \tag{3.25}$$

matriks $H\left(\lambda\right)$ dapat diperoleh dengan cara mensubsitusi persamaan (3.14) ke dalam persamaan (2.38). Sehingga akan diperoleh:

$$H\left(\lambda\right) y = x_{\lambda}\hat{\beta}_{\lambda}$$

$$H\left(\lambda\right) y = x_{\lambda}\left(x_{\lambda}^{t} x_{\lambda}\right)^{-1} x^{t} y$$

$$H\left(\lambda\right) y\left(y\right)^{t} = x_{\lambda}\left(x_{\lambda}^{t} x_{\lambda}\right)^{-1} x^{t} y\left(y\right)^{t}$$

$$H\left(\lambda\right) y\left(y\right)^{t}\left(y\left(y\right)^{t}\right)^{-1} = x_{\lambda}\left(x_{\lambda}^{t} x_{\lambda}\right)^{-1} x^{t} y\left(y\right)^{t}\left(y\left(y\right)^{t}\right)^{-1}$$

$$H\left(\lambda\right) = x_{\lambda}\left(x_{\lambda}^{t} x_{\lambda}\right)^{-1} x_{\lambda}^{t}$$

$$= x_\lambda \left(\frac{1}{n} I \right) x_\lambda^t$$

$$= \frac{1}{n} x_\lambda x_\lambda^t \tag{3.26}$$

$H(\lambda)$ dapat ditulis dalam bentuk matriks yaitu :

$$H(\lambda) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} e^{2\pi i(-\lambda)1} & e^{2\pi i(-\lambda+1)1} & \cdots & e^{2\pi i\lambda 1} \\ e^{2\pi i(-\lambda)2} & e^{2\pi i(-\lambda+1)2} & \cdots & e^{2\pi i\lambda 2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{2\pi i(-\lambda)n} & e^{2\pi i(-\lambda+1)n} & \cdots & e^{2\pi i\lambda n} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} e^{-2\pi i(-\lambda)1} & e^{-2\pi i(-\lambda)2} & \cdots & e^{-2\pi i(-\lambda)n} \\ e^{-2\pi i(-\lambda+1)1} & e^{-2\pi i(-\lambda+1)2} & \cdots & e^{-2\pi i(-\lambda+1)n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e^{-2\pi i\lambda 1} & e^{-2\pi i\lambda 2} & \cdots & e^{-2\pi i\lambda n} \end{bmatrix}$$

Dengan menggunakan definisi barisan ortonormal, maka elemen-elemen dari matriks $H(\lambda)$ adalah:

$$H(\lambda) = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} (2\lambda+1) & (2\lambda+1) & \cdots & (2\lambda+1) \\ (2\lambda+1) & (2\lambda+1) & \cdots & (2\lambda+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (2\lambda+1) & (2\lambda+1) & \cdots & (2\lambda+1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{(2\lambda+1)}{n} & \frac{(2\lambda+1)}{n} & \cdots & \frac{(2\lambda+1)}{n} \\ \frac{(2\lambda+1)}{n} & \frac{(2\lambda+1)}{n} & \cdots & \frac{(2\lambda+1)}{n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{(2\lambda+1)}{n} & \frac{(2\lambda+1)}{n} & \cdots & \frac{(2\lambda+1)}{n} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Dari persamaan (3.27) diperoleh trace $(H(\lambda)) = (2\lambda+1)$.

Sehingga kriteria GCV menjadi:

$$GCV(\lambda) = \frac{n^{-1} \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - f(x_j) \right)^2}{\left\{ n^{-1} \left(tr(I) - tr(H(\lambda)) \right) \right\}^2}$$

$$= \frac{n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - f(\lambda)\right)^2}{\left\{n^{-1}\left(n-(2\lambda+1)\right)\right\}^2}$$

$$= \frac{n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - f(x_j)\right)^2}{\left\{1-(2\lambda+1)/n\right\}^2} \tag{3.28}$$

Dalam hal ini parameter penghalus (λ) optimal diperoleh dengan meminimumkan nilai GCV atau dengan memilih λ dengan nilai GCV yang minimum.

3.4 Algoritma

3.4.1 Menentukan Nilai Parameter Penghalus yang Optimal Dengan Kriteria GCV.

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan nlai parameter penghalus yang optimal dengan mengggunakan kriteria GCV adalah :

1. Mendefinisikan variabel respon *y* dan variabel prediktor *t*

2. Menentukan fungsi $f(t_j)$ yang akan digunakan

3. Menghitung nilai parameter penghalus dengan kriteria GCV

$$GCV(\lambda) = \frac{n^{-1}\sum_{j=1}^{n}\left(y_j - f(x_j)\right)^2}{\left[n^{-1}tr\left(I-H(\lambda)\right)\right]^2} \tag{3.29}$$

4.Setelah nilai parameter penghalus diperoleh, masukkan nilai parameter penghalus awal dan nilai parameter penghalus akhir

5. Berdasarkan langkah di atas dipilih nilai GCV minimum. Nilai λ yang bersesuaian dengan nilai GCV minimum adalah nilai λ yang optimal

3.4.2 Menentukan Nilai Taksiran Dengan Menggunakan Penaksir Deret Fourier.

Langkah-langkah yang dilakukan untuk menentukan nilai taksiran dengan menggunakan penaksir deret Fourier adalah :

1. Mendefinisikan variabel respon y dan variabel prediktor t

2. Memasukkan nilai λ yang optimal dengan kriteria GCV

3. Menghitung nilai

$$\hat{f}(t_j) = \hat{\beta}_0 + \sum_{r=1}^{\lambda} \left[a_r \cos\left(2\pi r\,(j-1)/n\right) + b_r \sin\left(2\pi r\,(j-1)/n\right) \right]$$

4. Ulangi langkah ke-3 untuk semua nilai t_j