BAB III

ARCH, GARCH DAN SV

Bab ini akan membahas mengenai konsep-konsep utama yang ada dalam penelitian inii, dimana salah satu dari konsep-konsep utama tersebut akan digunakan untuk peramalan nilai *return* pada nilai tukar mata uang asing terhadap rupiah.

3.1 Model ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*)

Diberikan model AR dengan orde p sebagai berikut

$$y_t = e + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} + u_t \qquad (3.1.1)$$

Dengan u_t adalah *white noise* dari y_t, e adalah konstanta yang merupakan nilai *mean* dan $u_t \sim N(0, \sigma^2_u)$

Proses ini memenuhi *covariance stasionary* jika akar-akar

$$\phi(\beta) = (1 - \phi_1\beta - \phi_2\beta^2 - \cdots - \phi_p\beta^p)$$

diluar *unit circle*

dengan model estimasi linier untuk y_t pada AR(p) adalah

$$\hat{E}\,[y_t | y_{t-1}, y_{t-2}, \dots.] = e + \phi_1 y_{t-1} + \phi_2 y_{t-2} + \dots + \phi_p y_{t-p} \qquad (3.1.2)$$

Sedangkan *mean* untuk y_t adalah

$$E[y_t] = \frac{e}{1 - \phi_1 - \phi_2 - \cdots - \phi_p} \qquad (3.1.3)$$

sedangkan *unconditional varians* dari u_t merupakan suatu konstanta dengan notasi σ^2_u , sedangkan *conditional variance* dari u_t berubah-ubah berdasarkan waktu mengikuti proses AR(q) dan dinyatakan dengan:

$$u_t{}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}{}^2 + \alpha_2 u_{t-2}{}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}{}^q + w_t \qquad (3.1.4)$$

dengan w_t adalah *white noise* dari u_t dengan $w_t \sim (0, \sigma^2_w)$. model estimasi linier untuk u_t adalah

$$\hat{E}\,[u_t{}^2 | u_{t-1}{}^2, u_{t-2}{}^2, \ldots.] = e + u_{t-1}{}^2 + u_{t-2}{}^2 + \ldots + u_{t-q}{}^q \qquad (3.1.5)$$

Suatu proses dikatakan proses ARCH apabila *erorr* (u_t) pada y_t untuk proses AR memiliki variansi yang berbeda untuk setiap observasi, seperti yang diperlihatkan pada persamaan (3.1.4). Sehingga persamaan u_t tersebut dikatakan sebagai proses ARCH(q), dimana

$$y_t = x'_t\beta + u_t$$

$$u_t = v_t\sqrt{h_t} \qquad (3.1.6)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}{}^2 + \alpha_2 u_{t-2}{}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}{}^q + w_n$$

Dengan $\alpha_0 > 0$, $\alpha_i > 0$ ($i = 1,2,\ldots,q$) dan $w_n \sim N(0,1)$, $v_t \sim N(0,1)$

Sedangkan untuk proses ARCH(1)

$$y_t = x'_t\beta + u_t$$

$$u_t = v_t\sqrt{h_t} \qquad (3.1.7)$$

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}{}^2$$

Kemudian *mean* dan *conditional variance* untuk u_t adalah

1. *Mean* u_t :

$$E[u_t] = E\left[v_t\sqrt{h_t}\right] = E[v_t]E\left[\sqrt{h_t}\right] = 0$$

2. *Conditional variance* u_t

$$var\ (u_t|u_{t-1}) = var\left(v_t\sqrt{h_t}|u_{t-1}\right) = h_t var(v_t) = h_t$$

Agar proses u_t^2 memenuhi *covariance stationary* maka akar-akar

$$\alpha(\beta) = (1 - \alpha_1\beta)$$

harus berada diluar *unit circle* dengan nilai α_1 adalah $0 < \alpha_1 < 1$. Jika ini terpenuhi maka *var* u_t :

$$var\ (u_t) = E[u_t^2] = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1} \qquad (3.1.8)$$

Selanjutnya akan ditentukan kurtosis untuk proses ARCH(1)

$$\kappa = \frac{E[u_t^4]}{(E[u_t^2])^2}$$

Dengan $E[u_t^4] = \left[v_t^4 h_t^2\right] = E[v_t^4]E[h_t^2]$ dan

$$E\left[h_t^2\right] = E[(\alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}^2)^2] = E[\alpha_1^2 u_{t-1}^4 + 2\alpha_1\alpha_0 u_{t-1}^2 + \alpha_0^2]$$

$$= \alpha_1^2 E[u_{t-1}^4] + 2\alpha_1\alpha_0 E[u_{t-1}^2] + \alpha_0^2$$

$$= \alpha_1^2(var[u_{t-1}^2] + (E[u_{t-1}^2]^2)) + 2\alpha_1\alpha_0 E[u_{t-1}^2] + \alpha_0^2$$

$$= \alpha_1^2(var[u_t^2] + (E[u_t^2]^2)) + 2\alpha_1\alpha_0 E[u_t^2] + \alpha_0^2$$

$$E[h_t^{\ 2}] = \alpha_1^{\ 2}E[u_t^{\ 4}] + \frac{2\alpha_1\alpha_0^{\ 2}}{1-\alpha_1} + \alpha_0^{\ 2}$$

$$= \alpha_1^{\ 2}E[u_t^{\ 4}] + \frac{\alpha_0^{\ 2}(1+\alpha_1)}{1-\alpha_1} \qquad (3.1.9)$$

Dengan menggunakan teknik fungsi pembangkit momen didapat nilai dari $E[v_t^{\ 4}]$ adalah 3, sehingga:

$$E[u_t^{\ 4}] = E[v_t^{\ 4}]E[h_t^{\ 2}]$$

$$= 3.\left[\alpha_1^{\ 2}E[u_t^{\ 4}] + \frac{\alpha_0^{\ 2}(1+\alpha_1)}{1-\alpha_1}\right]$$

$$= 3\alpha_1^{\ 2}E[u_t^{\ 4}] + \frac{3\alpha_0^{\ 2}(1+\alpha_1)}{1-\alpha_1}$$

$$E[u_t^{\ 4}] - 3\alpha_1^{\ 2}E[u_t^{\ 4}] = \frac{3\alpha_0^{\ 2}(1+\alpha_1)}{1-\alpha_1}$$

$$E[u_t^{\ 4}](1-3\alpha_1^{\ 2}) = \frac{3\alpha_0^{\ 2}(1+\alpha_1)}{1-\alpha_1}$$

$$E[u_t^{\ 4}] = \frac{3\alpha_0^{\ 2}(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^{\ 2})(1-\alpha_1)} \qquad (3.1.10)$$

Kurtosis untuk u_t pada proses ARCH (1) :

$$\kappa = \frac{E[u_t^{\ 4}]}{(E[u_t^{\ 2}])^2} = \frac{3\alpha_0^{\ 2}(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^{\ 2})(1-\alpha_1)} \cdot \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^{\ 2}}$$

$$\kappa = \frac{3(1-{\alpha_1}^2)}{(1-3{\alpha_1}^2)} \qquad (3.1.11)$$

Berdasarkan persamaan (3.1.11) dapat diketahui nilai kurtosis dari model ARCH akan bernilai lebih dari 3. Agar proses memenuhi *covarian stationary* maka harus memenuhi ${\alpha_1}^2 < 1/3$.

3.1.1 Fungsi Autokorelasi dari model ARCH

Autokovariansi pada proses ARCH adalah

$$E[u_t u_{t-1}|u_{t-1}] = u_{t-1}E[u_t|u_{t-1}]$$

$$= u_{t-1}\,.E[(u_t - E[u_t])(u_{t-1} - E[u_{t-1}])]$$

$$= u_{t-1}.E[(u_t - 0)(u_{t-1} - 0)]$$

$$= u_{t-1}.E[u_t.u_{t-1}] = 0 \qquad (3.1.12)$$

Artinya u_t tak berkorelasi satu dengan yang lainnya, namun lain halnya dengan u_t^2. Persamaan (3.1.4) merupakan interpretasi dari u_t^2 dengan proses ARCH (q), sehingga u_t^2 untuk proses ARCH(1) adalah

$$u_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 {u_{t-1}}^2 + w_t$$

Atau

$$u_t^2 = (\alpha_0 + w_t) + \alpha_1(\alpha_0 + w_{t-1}) + {\alpha_1}^2(\alpha_0 + w_{t-2}) + \cdots$$

$$= (\alpha_0 + \alpha_1\alpha_0 + {\alpha_1}^2\alpha_0 + \cdots)(w_t + \alpha_1 w_{t-1} + {\alpha_1}^2 w_{t-2} + \cdots)$$

$$u_t{}^2 = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} + w_t + \ \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1{}^2 w_{t-2} + \alpha_1{}^3 w_{t-3} + \cdots$$

Dari persamaan (3.1.8) diperoleh $E[u_t{}^2] = \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1}$ sehingga

$$u_t{}^2 - \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} = w_t + \ \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1{}^2 w_{t-2} + \alpha_1{}^3 w_{t-3} + \cdots$$

$$u_t{}^2 - E[u_t{}^2] = w_t + \ \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1{}^2 w_{t-2} + \alpha_1{}^3 w_{t-3} + \cdots$$

Dari persamaan di atas dapat ditentukan

Varians u_t^2 (Engle, 2007) :

$$var(u_t{}^2) = E[(u_t{}^2 - E[u_t{}^2])^2]$$

$$= E[(w_t + \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1{}^2 w_{t-2} + \alpha_1{}^3 w_{t-3} + \cdots)^2]$$

$$= (1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_1{}^4 + \alpha_1{}^6 + \cdots)\sigma_w{}^2$$

$$= \frac{\sigma_w{}^2}{1-\alpha_1{}^2} \qquad (3.1.13)$$

Autokovariansi u_t^2

$$Cov(u_t{}^2, u_{t-r}{}^2) = E[(u_t{}^2 - E[u_t{}^2])(u_{t-r}{}^2 - E[u_{t-r}{}^2])]$$

$$= E[(w_t + \ \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1{}^2 w_{t-2} + \alpha_1{}^3 w_{t-3} + \cdots)(w_{t-r} +$$

$$\alpha_1{}^r w_{t-(r+1)} + \alpha_1{}^{r+1} w_{t-(r+2)} + \cdots)$$

$$= (\alpha_1{}^r + \alpha_1{}^{r+2} + \alpha_1{}^{r+4} + \cdots)\sigma_w{}^2$$

$$Cov(u_t{}^2, u_{t-1}{}^2) = \alpha_1{}^r(1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_1{}^4 + \cdots)\sigma_w{}^2$$

$$= \frac{\alpha_1{}^r \sigma_w{}^2}{1 - \alpha_1{}^2} \tag{3.1.14}$$

sehingga fungsi autokorelasi untuk u_t^2 adalah

$$\rho(r) = \frac{Cov(u_t{}^2, u_{t-r}{}^2)}{var(u_t{}^2)}$$

$$= \frac{\alpha_1{}^r \sigma_w{}^2}{1 - \alpha_1{}^2} \cdot \frac{1 - \alpha_1{}^2}{\sigma_w{}^2}$$

$$= \alpha_1{}^r$$

artinya nilai autokorelasi untuk u_t^2 akan terus menurun untuk tiap bertambahnya nilai *r*.

3.1.2 Hubungan antara kurtosis dengan fungsi Autokorelasi orde pertama untuk u_t^2 pada model ARCH(1)

Pada suatu model volatilitas untuk menjelaskan fenomena *return* dapat menggunakan fungsi kurtosis dan fungsi autokorelasi pada *squared return*, fungsi autokorelasi pada *squared retur*n (terutama orde pertama) dapat dijadikan sebagai fungsi kurtosis ataupun sebaliknya. Kemudian dapat dibandingkan dengan kombinasi-kombinasi kurtosis autokorelasi orde pertama berdasarkan data yang ada

Jika digunakan r = 1 pada fungsi autokorelasi u_t^2 maka diperoleh fungsi autokorelasi orde pertama yaitu $\rho(1) = \alpha_1$, sehingga dapat ditentukan hubungan antara kurtosis dan fungsi autokorelasi orde pertama untuk u_t^2 yaitu:

$$\kappa = \frac{3(1-\alpha_1{}^2)}{\left(1-3\alpha_1{}^2\right)} = \frac{3(1-\rho(1)^2)}{(1-3\rho(1)^2)} \qquad (3.1.16)$$

Selanjutnya bandingkan grafik hubungan antara kurtosis dan fungsi autokorelasi dengan data untuk melihat kedekatan model ini dengan data.

3.1.3 Pengujian adanya efek Heteroskedastisitas pada data

Pengujian ini dilakukan dengan bentuk hipotesis sebagai berikut

H_0 : Tidak ada efek Heteroskedastisitas

H_1 : Terdapat efek Heteroskedastisitas

Tolak H_0 jika probabilitasnya kurang dari 0,05

Dengan menggunakan *software Eviews 6*, jika dari tabel *corelogram* autokorelasi dari *squared residuals* nilai probabilitasnya kurang dari α (0,05) maka data tersebut dikatakan memiliki efek Heteroskedastisitas.

3.2 Model GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*)

Pada proses ARCH (q) u_t dituliskan sebagai berikut:

$u_t = v_t\sqrt{h_t}$ dengan $v_t \sim iid\ N(0,1)$

dan

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 u_{t-1}{}^2 + \alpha_2 u_{t-2}{}^2 + \cdots + \alpha_q u_{t-q}{}^q + w_n$$

dengan *conditional variance* yang tergantung pada suatu jumlah lag yang terbatas dari u_{t-j}^2 adalah

$$h_t = \alpha_0 + \Pi(L){u_t}^2 \tag{3.2.1}$$

dengan

$$\Pi(L) = \sum_{j=1}^{\infty} \Pi_j L^j$$

$\Pi(L)$ dapat dinyatakan sebagai rasio dari dua polinom dengan orde terbatas

$$\Pi(L) = \frac{\alpha L}{1-\delta(L)} = \frac{\alpha_1 L^1 + \alpha_2 L^2 + \cdots + \alpha_q L^q}{1 - \delta_1 L^1 - \delta_2 L^2 - \cdots - \delta_q L^q} \tag{3.2.2}$$

Selanjutnya asumsikan akar-akar dari 1 - δ(z) = 0 ada diluar *unit circle*. Jika persamaan (3.2.1) dikalikan dengan 1 - δ(L) hasilnya adalah

$$[1-\delta(L)]h_t = [1-\delta(1)]\alpha_0 + \alpha(L){u_t}^2$$

atau

$$h_t = \xi + \delta_1 h_{t-1} + \delta_2 h_{t-2} + \cdots + \delta_r h_{t-r} + \alpha_1 {u_{t-1}}^2 + \alpha_2 {u_{t-2}}^2 + \cdots + \alpha_q {u_{t-q}}^2 \tag{3.2.3}$$

dengan $\xi \equiv [1-\delta_1-\delta_2-\cdots-\delta_r]\alpha_0$

Pada (3.2.3) proses u_t dikatakan sebagai proses *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity* (GARCH) yang dikembangkan oleh *Bollerslev* (1986), dengan notasi u_t ~ GARCH (r,q). Model ini dikembangkan karena pada proses ARCH dengan orde tinggi memiliki kesulitan dalam masalah komputasi dikarenakan modelnya itu cukup rumit.

Pada tugas akhir ini hanya akan dibahas model GARCH(1,1) yang dituliskan sebagai berikut:

$$y_t = x'_t\beta + u_t$$

$$u_t = v_t\sqrt{h_t}$$

$$h_t = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \delta_1 h_{t-1} \qquad (3.2.4)$$

Dengan $\xi > 0$, $\alpha_1 \geq 0$, $\delta_1 \geq 0$ dan v_t adalah *white noise* berdistribusi normal baku dari proses stokastik u_t dan u_{t-1}, h_{t-1} dan v_t saling bebas

Berdasarkan model di atas dapat ditentukan beberapa nilai yaitu:

1. *Mean* untuk u_t :

$$E[u_t] = E\left[v_t\sqrt{h_t}\right] = E[v_t]E\left[\sqrt{h_t}\right] = 0\,.\,E\left[\sqrt{h_t}\right] = 0$$

2. *Conditional variance* untuk u_t yaitu:

$$var(u_t|u_{t-1}h_{t-1}) = var\left(v_t\sqrt{h_t}|u_{t-1}h_{t-1}\right) = h_t\,.\,var(v_t) = h_t.1 = h_t$$

Bila kedua sisi pada persamaan (3.2.4) tersebut dijumlahkan dengan u_t^2 diperoleh

$$h_t + u_t^2 = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \delta_1 h_{t-1} \quad + u_t^2$$

$$h_t + u_t^2 = \xi + \alpha_1 u_{t-1}^2 + \delta_1 u_{t-1}^2 - \delta_1(u_{t-1} - h_{t-1}) \quad + u_t^2$$

atau

$$u_t^2 = \xi + (\alpha_1 + \delta_1)u_{t-1}^2 - \delta_1 w_{t-1} + w_t \qquad (3.2.5)$$

dengan $w_t \equiv u_t^2$-h_t adalah *erorr* yang diasosiasikan dengan peramalan u_t^2 berdasarkan nilai lag-nya sendiri, sehingga, w_t dikatakan suatu proses *white noise* yang fundamental untuk u_t^2. Persamaan (3.2.5) dikenal dengan proses ARMA(1,1) dari u_t^2 dengan $(\alpha_1+\delta_1)$ adalah koefisien dari *autoregressive* dan - δ_1 adalah koefisien dari *moving average*. Jadi apabila u_t digambarkan sebagai proses GARCH(1,1) maka, u_t^2 akan mengikuti proses ARMA (1,1)

Syarat dari u_t^2 adalah $\xi > 0$, $\alpha_1 > 0$ dan $\delta_1 > 0$. Pada proses ARMA, u_t^2 akan memiliki *covariance stationary* jika variansi w_t berhingga dan akar-akar dari

$$1 - (\alpha_1 + \delta_1)z = 0$$

Ada diluar *unit circle*. Karena u_t^2 tak boleh negatif, berarti u_t^2 *covariance stationary* jika

$$\alpha_1 + \delta_1 < 1$$

Jika diasumsikan kondisi ini telah terpenuhi, maka variansi dari u_t adalah

$$var(u_t) = E[u_t^2] = \frac{\xi}{1 - (\alpha_1 + \delta_1)} \qquad (3.2.6)$$

3.2.1 Kurtosis model GARCH(1,1)

Penentuan kurtosis untuk proses GARCH (1,1). Akan dilakukan sama seperti mencari kurtosis pada proses ARCH (1,1) yaitu

$$\kappa = \frac{E[u_t{}^4]}{(E[u_t{}^2])^2}$$

Dengan asumsi proses u_t^2 merupakan *covariance-statinary* (Bollerslev, 1986)

$$E\left[h_t{}^2\right] = E[(\xi + \alpha_1 u_{t-1}{}^2 + \delta_1 h_{t-1})^2]$$

$$= E\left[\delta_1{}^2 h_{t-1}{}^2 + \alpha_1{}^2 u_{t-1}{}^4 + 2\alpha_1\delta_1 u_{t-1}{}^2 h_{t-1} + 2\xi\delta_1 h_{t-1} + \xi^2\right]$$

$$= \delta_1{}^2 E\left[h_{t-1}{}^2\right] + \alpha_1{}^2 E[u_{t-1}{}^4] + 2\alpha_1\delta_1 E[u_{t-1}{}^2 h_{t-1}] + 2\xi\delta_1 E[h_{t-1}] + 2\xi\alpha_1 E[u_{t-1}{}^2] + \xi^2$$

$$= \delta_1{}^2 E\left[h_{t-1}{}^2\right] + \alpha_1{}^2 E[u_{t-1}{}^4] + 2\alpha_1\delta_1 E\left[h_{t-1}{}^2\right] + 2\xi\delta_1 E[h_{t-1}] + \xi\alpha_1 E[u_{t-1}{}^2] + \xi^2$$

$$= \delta_1{}^2 E\left[h_t{}^2\right] + \alpha_1{}^2 E[u_t{}^4] + 2\alpha_1\delta_1 E\left[h_t{}^2\right] + 2\xi\alpha_1 E[u_t{}^2] + \xi^2$$

$$= \delta_1{}^2 E\left[h_t{}^2\right] + \alpha_1{}^2 E[u_t{}^4] + 2\alpha_1\delta_1 E\left[h_t{}^2\right] + 2\xi\delta_1 \frac{\xi}{1-(\alpha_1+\delta_1)} + 2\xi\alpha_1 \frac{\xi}{1-(\alpha_1+\delta_1)} + \xi^2$$

$$= \delta_1{}^2 E\left[h_t{}^2\right] + \alpha_1{}^2 E[u_t{}^4] + 2\alpha_1\delta_1 E\left[h_t{}^2\right] + \frac{\xi\left(1+(\alpha_1+\delta_1)\right)}{1-(\alpha_1+\delta_1)}$$

$$E\left[h_t{}^2\right] = \frac{\alpha_1{}^2}{1-2\alpha_1\delta_1-\delta_1{}^2} E[u_t{}^4] + \frac{\xi\left(1+(\alpha_1+\delta_1)\right)}{\left(1-(\alpha_1+\delta_1)\right)\left(1-2\alpha_1\delta_1-\delta_1{}^2\right)}$$

Sehingga

$$E[u_t^{\,4}] = [v_t^{\,4} h_t^{\,2}] = E[v_t^{\,4}]E[h_t^{\,2}]$$

$$= \frac{3\alpha_1^{\,2}}{1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^{\,2}} E[u_t^{\,4}] + \frac{3\xi\big(1 + (\alpha_1 + \delta_1)\big)}{\big(1 - (\alpha_1 + \delta_1)\big)\big(1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^{\,2}\big)}$$

$$= \frac{3\xi^2\big(1 + (\alpha_1 + \delta_1)\big)}{\big(1 - (\alpha_1 + \delta_1)\big)\big(1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^{\,2}\big)} \cdot \frac{\big(1 + (\alpha_1 + \delta_1)\big)\big(1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^{\,2}\big)}{\big(1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^{\,2}\big) - 3\alpha_1^{\,2}}$$

$$E[u_t^{\,4}] = \frac{3\xi^2\big(1 + (\alpha_1 + \delta_1)\big)}{\big(1 - (\alpha_1 + \delta_1)\big)\big(1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^{\,2} - 3\alpha_1^{\,2}\big)} \qquad (3.2.7)$$

Sehingga kurtosis untuk proses GARCH(1,1) adalah

$$\kappa = \frac{E[u_t^{\,4}]}{(E[u_t^{\,2}])^2} = \frac{3\xi^2\big(1 + (\alpha_1 + \delta_1)\big)}{\big(1 - (\alpha_1 + \delta_1)\big)\big(1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^{\,2} - 3\alpha_1^{\,2}\big)} \cdot \frac{\big(1 + (\alpha_1 + \delta_1)\big)}{\xi^2}$$

$$= \frac{3(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2)}{\big(1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1^{\,2} - 3\alpha_1^{\,2}\big)}$$

$$= \frac{3(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2)}{\big(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2 - 2\alpha_1^{\,2}\big)} \qquad (3.2.8)$$

Sehingga agar proses u_t^2 *covariance stationary* haruslah

$$1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2 - 2\alpha_1^{\,2} > 0$$

3.2.2 Fungsi Autokorelasi model GARCH (1,1)

Perhatikan (3.2.5) dimana u_t^2 memenuhi proses ARMA (1,1) dan proses u_t dikatakan memenuhi proses GARCH (1,1)

$$u_t{}^2 = \xi + (\alpha_1 + \delta_1)u_{t-1}{}^2 - \delta_1 w_{t-1} + w_t$$

Fungsi autokorelasi dari u_t^2 adalah

$$\rho(r) = \frac{Cov(u_t{}^2, u_{t-r}{}^2)}{var(u_t{}^2)}$$

dengan kovarian sebagai berikut:

$$cov(u_t{}^2, u_{t-r}{}^2) = E[(u_t{}^2 - E[u_t{}^2])(u_{t-r}{}^2 - E[u_{t-r}{}^2])]$$

Sebelumnya akan ditentukan variansi dan autokovariansi dari u_t^2 yaitu:

Untuk mempermudah persamaan (3.2.2) terlebih dahulu bentuknya diubah menjadi

$$\begin{aligned} u_t{}^2 &= \xi + (\alpha_1 + \delta_1)u_{t-1}{}^2 - \delta_1 w_{t-1} + w_t \\ &= (\xi - \delta_1 w_{t-1} + w_t) + (\alpha_1 + \delta_1)(\xi - \delta_1 w_{t-2} + w_{t-1}) \\ &\qquad + (\alpha_1 + \delta_1)^2(\xi - \delta_1 w_{t-3} + w_{t-2}) + \cdots \\ &= \frac{\xi}{1 - (\alpha_1 + \delta_1)} + w_t + \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1(\alpha_1 + \delta_1)w_{t-2} + \alpha_1(\alpha_1 + \delta_1)^2 w_{t-3} \\ &\qquad + \cdots \end{aligned}$$

dengan $E[u_t{}^2] = \frac{\xi}{1-(\alpha_1+\delta_1)}$ maka

$$u_t{}^2 = E\left[u_t{}^2\right] + w_t + \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)w_{t-2} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)^2 w_{t-3} + \cdots$$

$$u_t{}^2 - E\left[u_t{}^2\right] = w_t + \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)w_{t-2} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)^2 w_{t-3} + \cdots$$

Sehingga

$$var(u_t{}^2) = E[(u_t{}^2 - E[u_t{}^2])^2]$$

$$= E[(w_t + \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)w_{t-2} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)^2 w_{t-3} + \cdots)^2]$$

$$= (1 + \alpha_1{}^2 + \alpha_1{}^2(\alpha_1+\delta_1)^2 + \alpha_1{}^2(\alpha_1+\delta_1)^4 + \cdots)\sigma_w{}^2$$

$$= \sigma_w{}^2\left(1 + \frac{\alpha_1{}^2}{1-(\alpha_1+\delta_1)}\right) \qquad (3.2.9)$$

Dan

$$cov(u_t{}^2, u_{t-r}{}^2) = E[(u_t{}^2 - E[u_t{}^2])(u_{t-r}{}^2 - E[u_{t-r}{}^2])]$$

$$= E[\big(w_t + \alpha_1 w_{t-1} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)^{r-1}w_{t-r} + \alpha_1(\alpha_1 + \delta_1)^r w_{t-(r+1)} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)^{r+1}w_{t-(r+2)} \ldots\big)\big(w_{t-r} + \alpha_1 w_{t-(r+1)} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)\ \ w_{t-(r+2)} + \alpha_1(\alpha_1+\delta_1)^2 w_{t-(r+3)}\big)\ ]$$

$$= (\alpha_1(\alpha_1+\delta_1)^{r-1} + \alpha_1{}^2(\alpha_1+\delta_1)^r + \alpha_1{}^2(\alpha_1+\delta_1)^{r+2} + \alpha_1{}^2(\alpha_1+\delta_1)^{r+4} + \cdots)\sigma_w{}^2$$

$$= (\alpha_1(\alpha_1+\delta_1)^{r-1}\sigma_w{}^2 + \alpha_1{}^2(\alpha_1+\delta_1)^r[1 + (\alpha_1+\delta_1)^2 + (\alpha_1+\delta_1)^{r+4} + \cdots]\sigma_w{}^2)$$

$$cov(u_t{}^2, u_{t-r}{}^2) = \alpha_1(\alpha_1 + \delta_1)^{r-1}\sigma_w{}^2\left[1 + \frac{\alpha_1(\alpha_1+\delta_1)}{1-(\alpha_1+\delta_1)^2}\right] \qquad (3.2.10)$$

Fungsi autokorelasi dari proses GARCH (1,1) adalah (Bollerslev, 1986)

$$\rho(r) = \frac{Cov(u_t{}^2, u_{t-r}{}^2)}{var(u_t{}^2)}$$

$$= \alpha_1(\alpha_1 + \delta_1)^{r-1}\sigma_w{}^2\left[\frac{1 - \alpha_1\delta_1 - \delta_1{}^2}{1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2}\right] \cdot \left[\frac{1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2}{1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1{}^2}\right]\frac{1}{\sigma_w{}^2}$$

$$= \frac{\alpha_1(\alpha_1 + \delta_1)^{r+1}\left(1 - \alpha_1\delta_1 - \delta_1{}^2\right)}{1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1{}^2}$$

$$= \frac{(\alpha_1 + \delta_1)^{r-1}\left(1 - \alpha_1\delta_1 - \delta_1{}^2\right)}{1 - 2\alpha_1\delta_1 - \delta_1{}^2}$$

$$= \frac{(\alpha_1+\delta_1)^{r-1}[(3\alpha_1+\delta_1)\left(1-(\alpha_1+\delta_1)^2\right)-(\alpha_1+\delta_1)\left(1-(\alpha_1+\delta_1)^2-2\alpha_1{}^2\right)]}{3(1-(\alpha_1+\delta_1)^2)-(1-(\alpha_1+\delta_1)^2)-2\alpha_1{}^2} \qquad (3.2.11)$$

3.2.3 Hubungan antara kurtosis dengan fungsi autokorelasi orde pertama untuk u_t^2 pada model GARCH (1,1)

Sebelumnya telah diperoleh fungsi autokorelasi untuk u_t^2 pada proses GARCH (1,1) orde r yaitu:

$$\rho(r) = \frac{(\alpha_1 + \delta_1)^{r-1}[(3\alpha_1 + \delta_1)(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2) - (\alpha_1 + \delta_1)\left(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2 - 2\alpha_1{}^2\right)]}{3(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2) - (1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2) - 2\alpha_1{}^2}$$

Sehingga untuk r =1 diperoleh bentuk:

$$\rho(1) = \frac{\left[(3\alpha_1 + \delta_1)(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2) - (\alpha_1 + \delta_1)\left(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2 - 2{\alpha_1}^2\right)\right]}{3(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2) - (1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2) - 2{\alpha_1}^2}$$

$$= \frac{\alpha_1 - {\alpha_1}^2\delta_1 - \alpha_1{\delta_1}^2}{1 - 2\alpha_1\delta_1 - {\delta_1}^2} \qquad (3.2.12)$$

Selanjutnya akan diperlihatkan hubungan antara kurtosis dengan fungsi autokorelasi pertama untuk u_t^2 pada GARCH (1,1) yaitu :

$$\rho(1) = \frac{\alpha_1 - {\alpha_1}^2\delta_1 - \alpha_1{\delta_1}^2}{1 - 2\alpha_1\delta_1 - {\delta_1}^2}$$

$$= \alpha_1 + \frac{{\alpha_1}^2\delta_1}{1 - 2\alpha_1\delta_1 - {\delta_1}^2}$$

$$= \frac{2{\alpha_1}^2\delta_1}{3(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2)} \; \frac{3(1 - (\alpha_1 + \delta_1)^2)}{2\left(1 - 2\alpha_1\delta_1 - {\delta_1}^2\right)} + \alpha_1$$

$$= \frac{\delta_1(1 - 3\kappa^{-1})}{3} \; \frac{1}{(1 - \kappa^{-1})} + \alpha_1$$

$$= \frac{\delta_1(1 - 3\kappa^{-1})}{3(1 - \kappa^{-1})} + \alpha_1 \qquad (3.2.13)$$

Grafik dari hubungan keduanya inilah yang akan dilihat dan dibandingkan dengan data untuk selanjutnya dilihat kedekatan model ini dengan data.

3.2.4 Penaksir Parameter Model GARCH (1,1)

Diketahui model statistik linier yaitu

$$y_t = X_t'\beta + u_t^2$$

dimana X_t' adalah vektor yang entri-entrinya berisi variabel yang nilainya diketahui, β adalah vektor parameter dan u_t diasumsikan memenuhi proses GARCH. Fungsi *likelihood* untuk y_t adalah

$$L_t = f\left(y_t \mid_{X_t',\beta,h_t}\right) = \frac{1}{(2\pi h_t)^{T/2}} \exp\left\{-\frac{(y_t - X_t'\beta)^2}{2h_t}\right\} \qquad (3.2.14)$$

dengan

$$h_t = \xi + \alpha_1 \left(y_{t-1} - X_{t-1}{}'\beta\right)^2 + \delta_1 h_{t-1}$$

$$= [z_t(\beta)]'\gamma$$

dimana

$$\gamma \equiv [\xi, \alpha_1, \delta_1]'$$

$$[z_t(\beta)]' \equiv [1, \left(y_{t-1} - X_{t-1}{}'\beta\right)^2, h_{t-1}]$$

Selanjutnya parameter-parameter yang tidak diketahui dikumpulkan untuk kemudian ditaksir dalam suatu vektor θ berukuran (a x 1)

$$\theta \equiv [\beta', \gamma']$$

sehingga *conditional log-likelihood*nya adalah

$$l_t = -\frac{1}{2}\log(2\pi h_t) - \frac{1}{2h_t}$$

$$= \sum_{t=1}^{T} L_t \qquad (3.2.15)$$

Untuk nilai awal vektor parameter θ, dapat digunakan fungsi *log-likelihood* ini dengan menggunakan iterasi *Berndt, Hall, Hall and Haussman* (BHHH) yaitu

$$\theta_{n+1} = \theta_n + \left\{z^*(\theta_n)' z^*(\theta_n)\right\}^{-1} \frac{\partial L}{\partial \theta} \mid_{\theta=\theta_n}$$

dengan

$$z^*(\theta_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial L_1}{\partial \theta_1} \mid_{\theta=\theta_n} & \frac{\partial L_1}{\partial \theta_2} \mid_{\theta=\theta_n} & \cdots & \frac{\partial L_1}{\partial \theta_k} \mid_{\theta=\theta_n} \\ \frac{\partial L_2}{\partial \theta_1} \mid_{\theta=\theta_n} & & & \frac{\partial L_2}{\partial \theta_k} \mid_{\theta=\theta_n} \\ & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial L_t}{\partial \theta_1} \mid_{\theta=\theta_n} & \cdots \quad \ldots & \cdots & \frac{\partial L_T}{\partial \theta_k} \mid_{\theta=\theta_n} \end{bmatrix}$$

dengan catatan $\theta_{n+1} = \theta_n$ jika iterasinya konvergen.

3.3 Model SV (*Stochastic volatility*)

Model ini diperkenalkan oleh Taylor (1986), secara sederhana model SV ialah

$$u_t = exp\left\{\frac{h_t}{2}\right\} v_t\,, \quad v_t \sim iid\ N(0,1) \tag{3.3.1}$$

$$h_t = \alpha + \delta h_{t-1} + \eta_t\,, \quad \eta_t \sim iid\ N(0, \sigma_n{}^2)$$

dimana u_t adalah *return* pada waktu t dan h_t adalah log volatilitasnya. Perlu diperhatikan bahwa u_t dan v_t saling bebas. Pada persamaan di atas η_t dan v_t tidak terobservasi, dengan h_t diasumsikan memenuhi proses AR (1) berdistribusi normal. sehingga dapat dituliskan sebagai berikut :

$$h_t = \alpha + \delta h_{t-1} + \eta_t$$

$$= (\alpha\ + \eta_t) + \delta(\alpha\ + \eta_{t-1}) + \delta^2(\alpha\ + \eta_{t-2}) + \delta^3(\alpha\ + \eta_{t-3}) + \cdots$$

$$= \frac{\alpha}{1-\delta} + \eta_t + \delta\eta_{t-1} + \delta^2\eta_{t-2} + \delta^3\eta_{t-3} + \cdots$$

Nilai *mean* dan varinsi dari h_t dituliskan sebagai berikut :

$$\mu_h = E[h_t] = E\left[\frac{\alpha}{1-\delta} + \eta_t + \delta\eta_{t-1} + \delta^2\eta_{t-2} + \delta^3\eta_{t-3} + \cdots\right]$$

$$= \frac{\alpha}{1-\delta} + E[\eta_t] + \delta E[\eta_{t-1}] + \delta^2 E[\eta_{t-2}] + \delta^3 E[\eta_{t-3}] + \cdots$$

$$= \frac{\alpha}{1-\delta} + 0 + 0 + 0 + \cdots$$

$$= \frac{\alpha}{1-\delta}$$

dan

$$\sigma_h{}^2 = var(h_t) = E\left[\left(h_t - \mu_h\right)^2\right]$$

$$= E[(\eta_t + \delta\eta_{t-1} + \delta^2\eta_{t-2} + \delta^3\eta_{t-3} + \cdots)^2]$$

$$= (1 + \delta^2 + \delta^4 + \delta^6 + \cdots)\sigma_h{}^2$$

$$= \frac{\sigma_h{}^2}{1 - \delta^2}$$

agar h_t *non-negative*, maka parameternya harus memenuhi $\sigma_h{}^2 > 0$ dan $|\delta| < 1$

3.3.1 Kurtosis dari model SV

Sebelumnya telah diasumsikan bahwa h_t memenuhi proses AR (1) dan berdistribusi normal dengan mean μ_h dan variansi $\sigma_h{}^2$, maka dengan menggunakan persamaan fungsi pembangkit momen diperoleh

$$M_{h_t}(t) = E(exp\{th_t\})$$

$$= exp\left\{\mu_h + \frac{\sigma_\eta{}^2}{2}\right\} \quad (3.3.2)$$

sehingga didapat

$$E[u_t] = E\left[exp\left\{\frac{h_t}{2}\right\}v_t\right] = E\left[exp\left\{\frac{h_t}{2}\right\}\right]E[v_t] = 0$$

$$E[u_t{}^2] = E\left[\left(exp\left\{\frac{h_t}{2}\right\}v_t\right)^2\right]$$

$$E[u_t{}^2] = E[exp\{h_t\}]\,.\,E[v_t{}^2]$$

$$= E[exp\{h_t\}]\,.1$$

$$E[u_t{}^2] = exp\left\{\mu_h + \frac{\sigma_\eta{}^2}{2}\right\}$$

$$= exp\left\{\frac{\alpha}{1-\delta} + \frac{\sigma_\eta{}^2}{2(1-\delta^2)}\right\} \qquad (3.3.4)$$

$$E[u_t{}^4] = E\left[\left(exp\left\{\frac{h_t}{2}\right\}v_t\right)^4\right]$$

$$= E[exp\{2h_t\}]\,.\,E[v_t{}^4]$$

$$= 3E[exp\{2h_t\}]$$

$$= 3\,exp\{2\mu_h + 2\sigma_\eta{}^2\}$$

$$= 3\,exp\left\{\frac{2\alpha}{1-\delta} + \frac{2\sigma_\eta{}^2}{(1-\delta^2)}\right\} \qquad (3.3.5)$$

sehingga kurtosis untuk SV adalah

$$\kappa = \frac{E[u_t{}^4]}{(E[u_t{}^2])^2} = \frac{3\,exp\left\{\frac{2\alpha}{1-\delta} + \frac{2\sigma_\eta{}^2}{\left(1-\delta^2\right)}\right\}}{exp\left\{\frac{2\alpha}{1-\delta} + \frac{\sigma_\eta{}^2}{\left(1-\delta^2\right)}\right\}}$$

$$= \frac{3\,exp\left\{2\mu_h + 2\sigma_\eta{}^2\right\}}{exp\left\{2\mu_h + \sigma_\eta{}^2\right\}}$$

$$\kappa = \frac{3\,exp\{2\mu_h\}\,exp\left\{2{\sigma_\eta}^2\right\}}{exp\{2\mu_h\}\,exp\{{\sigma_\eta}^2\}}$$

$$= \frac{3\,exp\left\{2{\sigma_\eta}^2\right\}}{exp\{{\sigma_\eta}^2\}} = 3\,exp\{{\sigma_\eta}^2\} \qquad (3.3.6)$$

3.3.2 Hubungan kurtosis dengan proses Autokorelasi orde 1 pada model SV

Selanjutnya akan dincari hubungan antara kurtosis dan autokorelasi orde satu, kemudian dari hubungan keduanya akan dibandingkan dengan data untuk melihat kedekatan antara model dengan data. Sama seperti pada proses ARCH dan GARCH fungsi autokorelasi untuk u_t^2 adalah (Taylor, 1986)

$$\rho(r) = \frac{Cov({u_t}^2, {u_{t-r}}^2)}{var({u_t}^2)}, \qquad r = 1,2, \ldots.$$

pertama kita asumsikan dahulu $|\delta| < 1$ kemudian hitung kovariansinya

$$cov({u_t}^2, {u_{t-r}}^2) = E[{u_t}^2, {u_{t-r}}^2] - E[{u_t}^2]E[{u_{t-r}}^2]$$

$$= E[exp\{h_t\}\,{v_t}^2\,exp\{h_{t-r}\}\,{v_{t-r}}^2] - E[exp\{h_t\}\,{v_t}^2]E[exp\{h_{t-r}\}\,{v_{t-r}}^2]$$

$$= E[exp\{h_t\}\,exp\{h_{t-r}\}]E[{v_t}^2]E[{v_{t-r}}^2] - E[exp\{h_t\}]E[exp\{h_{t-r}\}]E[{v_t}^2]E[{v_{t-r}}^2]$$

$$= E[exp\{h_t + h_{t-r}\}] - E[exp\{h_t\}]E[exp\{h_{t-r}\}]$$

dalam menghitung kovariansi pada proses SV, kita gunakan persamaan h_t adalah:

$$h_t = \delta^r h_{t-r} + \sum_{i=0}^{r-1} \alpha\delta^i + \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n \delta^i \eta_{r-i}$$

$$E[exp\{h_t + h_{t-r}\}] = E\left[exp\left\{\delta^r h_{t-r} + \sum_{i=0}^{r-1} \alpha\delta^i + \sum_{i=0}^{r-1} \sigma_n \delta^i \eta_{r-i}\right\}\right]$$

$$E[exp\{h_t + h_{t-r}\}] = E[exp\{\,(1-\delta^r)h_{t-r}\}\,exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\alpha\delta^i\right\}exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\sigma_n\delta^i\eta_{r-i}\right\}]$$

$$= E[exp\{\,(1-\delta^r)h_{t-r}\}]E\left[exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\alpha\delta^i\right\}\right]E\left[exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\sigma_n\delta^i\eta_{r-i}\right\}\right]$$

dimana

$$E[exp\{\,(1-\delta^r)h_{t-r}\}] = exp\left\{(1-\delta^r)\mu_{ht-r} + \frac{(1-\delta^r)^2\sigma_{ht-r}{}^2}{2}\right\}$$

$$= exp\left\{(1-\delta^r)\mu_h + \frac{(1-\delta^r)^2\sigma_h{}^2}{2}\right\}$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}\alpha\delta^i = \left(\alpha + \alpha\delta^2 + \alpha\delta^4 + \cdots + \alpha\delta^{r-1}\right)$$

$$= \alpha\frac{1-\delta^r}{1-\delta} = (1-\delta^r)\frac{\alpha}{1-\alpha}$$

$$= (1-\delta^r)\mu_h$$

$$\sum_{i=0}^{r-1}\sigma_n\delta^i\eta_{r-i} = \sigma_\eta\eta_r + \sigma_\eta\delta^1\eta_{r-1} + \sigma_\eta\delta^2\eta_{r-2} + \cdots + \sigma_\eta\delta^{r-1}\eta_1$$

$$E\left[exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\sigma_n\delta^i\eta_{r-i}\right\}\right] = E\left[exp\{\sigma_\eta\eta_r + \sigma_\eta\delta^1\eta_{r-1} + \sigma_\eta\delta^2\eta_{r-2} + \cdots + \sigma_\eta\delta^{r-1}\eta_1\}\right]$$

$$= E\left[exp\{\sigma_\eta\eta_r\}\right]E\left[exp\{\sigma_\eta\delta^1\eta_{r-1}\}\right]E\left[exp\{\sigma_\eta\delta^2\eta_{r-2}\}\right]\ldots E\left[exp\{\sigma_\eta\delta^{r-1}\eta_1\}\right]$$

$$= exp\left\{\frac{\sigma_\eta{}^2}{2}\right\}exp\left\{\frac{\delta^2\sigma_\eta{}^2}{2}\right\}exp\left\{\frac{\delta^4\sigma_\eta{}^2}{2}\right\}\ldots.exp\left\{\frac{\delta^{2(r-1)}\sigma_\eta{}^2}{2}\right\}$$

$$E\left[exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\sigma_n\delta^i\eta_{r-i}\right\}\right] = exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\frac{\delta^{2i}{\sigma_\eta}^2}{2}\right\} = exp\left\{\frac{{\sigma_\eta}^2(1-\delta^{2r})}{2(1-\delta^r)}\right\}$$

$$= exp\left\{\frac{(1-\delta^{2r})}{2}\frac{{\sigma_\eta}^2}{(1-\delta^r)}\right\}$$

$$= exp\left\{\frac{(1-\delta^{2r}){\sigma_\eta}^2}{2}\right\}$$

substitusikan tiga persamaan tersebut ke dalam persamaan awal sehingga

$$E[exp\{h_t + h_{t-r}\}] = E[exp\{(1-\delta^r)h_{t-r}\}]E\left[exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\alpha\delta^i\right\}\right]E\left[exp\left\{\sum_{i=0}^{r-1}\sigma_n\delta^i\eta_{r-i}\right\}\right]$$

$$= exp\left\{(1-\delta^r)\mu_h + \frac{(1-\delta^r)^2{\sigma_{ht-r}}^2}{2}\right\}.exp\{(1-\delta^r)\mu_h\}.exp\left\{\frac{(1-\delta^{2r}){\sigma_\eta}^2}{2}\right\}$$

$$= exp\left\{(1-\delta^r)\mu_h + \frac{(1+2\delta^r+\delta^{2r}){\sigma_\eta}^2}{2} + (1-\delta^r)\mu_h + \frac{(1-\delta^{2r}){\sigma_\eta}^2}{2}\right\}$$

$$= exp\left\{2\mu_h + (1-\delta^r){\sigma_\eta}^2\right\}$$

dari bentuk itu dapat ditentukan kovariansi dari u_t^2 yaitu

$$cov({u_t}^2, {u_{t-r}}^2) = E[exp\{h_t + h_{t-r}\}] - E[exp\{h_t\}]E[exp\{h_{t-r}\}]$$

$$= exp\{2\mu_h + (1-\delta^r){\sigma_\eta}^2\} - exp\left\{\mu_{h_t} + \frac{{\sigma_h}^2}{2}\right\}exp\left\{\mu_h + \frac{{\sigma_{h_{t-r}}}^2}{2}\right\}$$

$$= exp\{2\mu_h + (1-\delta^r){\sigma_\eta}^2\} - exp\{2\mu_h{\sigma_\eta}^2\}$$

$$= exp\{2\mu_h + {\sigma_\eta}^2\} - \left[exp\{{\sigma_\eta}^2\delta^r\} - 1\right] \tag{3.3.8}$$

selanjutnya akan dicari nilai variansi dari u_t^2

$$var({u_t}^2) = E[{u_t}^4] - (E[{u_t}^2])^2$$

$$var(u_t^2) = 3\ exp\left\{\frac{2\alpha}{1-\delta} + \frac{2\sigma_\eta^{\ 2}}{(1-\delta^2)}\right\} - \left(exp\left\{\frac{\alpha}{1-\delta} + \frac{\sigma_\eta^{\ 2}}{2(1-\delta^2)}\right\}\right)^2$$

$$= 3\ exp\{2\mu_h + \sigma_\eta^{\ 2}\} - \left(exp\left\{\mu_h + \frac{\sigma_\eta^{\ 2}}{2}\right\}\right)^2$$

$$= exp\{2\mu_h + \sigma_h^{\ 2}\}[3\ exp\{\sigma_h^{\ 2}\} - 1] \qquad (3.3.9)$$

sekarang dapat ditentukan autokorelasi untuk u_t^2

$$\rho(r) = \frac{Cov(u_t^{\ 2}, u_{t-r}^{\ 2})}{var(u_t^{\ 2})} = \frac{exp\{2\mu_h + \sigma_\eta^{\ 2}\} - [exp\{\sigma_\eta^{\ 2}\delta^r\} - 1]}{exp\{2\mu_h + \sigma_\eta^{\ 2}\}[3\ exp\{\sigma_\eta^{\ 2}\} - 1]}$$

$$= \frac{exp\{\sigma_\eta^{\ 2}\delta^r\} - 1}{3\ exp\{\sigma_\eta^{\ 2}\}} \qquad (3.3.10)$$

kemudian autokorelasi untuk r = 1 adalah

$$\rho(1) = \frac{exp\{\sigma_\eta^{\ 2}\delta\} - 1}{3\ exp\{\sigma_\eta^{\ 2}\}} \qquad (3.3.11)$$

hubungan antara kurtosis model SV dan autokorelasi orde 1 adalah

$$\rho(1) = \frac{exp\{\sigma_\eta^{\ 2}\delta\} - 1}{3\ exp\{\sigma_\eta^{\ 2}\}} = \frac{(\kappa/3)^\delta - 1}{\kappa - 1}$$

grafik dari hubungan keduanya inilah yang akan dibandingkan dengan data, sehingga kemudian dilihat kedekatannya antara model terkait dengan data.