BAB III

TENSOR

Berdasarkan uraian bab sebelumnya yang telah menjelaskan beberapa istilah dan materi pendukung yang berkaitan dengan tensor, pada bab ini akan dijelaskan pengertian dasar dari tensor.

Tensor merupakan generalisasi dari bentuk skalar dan vektor, sehingga jika tensor $t \in T$ dengan $\dim T = 0$ maka t disebut skalar, sedangkan jika tensor $t \in T$ dengan $\dim T = 1$ maka t disebut vektor.

Pada bagian ini terlebih dahulu akan dijelaskan konsep ruang berdimensi hingga atau lebih dikenal dengan ruang Euclid. Selanjutnya dalam ruang tersebut akan mendefinisikan tensor-tensor kovariant, kontavariant dan campuran.

3.1 Ruang Berdimensi Hingga/Ruang-n Euclid

Definisi 3.1

Jika $n \in \mathbb{Z}^+$, maka tupel-n-terorde (*ordered-n-tupel*) adalah suatu pasangan terurut n bilangan real $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Himpunan semua bilangan pasangan terurut-n dinamakan ruang-n dan dinyatakan dengan R^n.

Suatu kurva pada suatu ruang-n adalah himpunan titik-titik $\bar{x}$ yang memenuhi n buah persamaan, yaitu $x_\alpha = x_\alpha(t)$, dimana t adalah parameter dan $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Misalkan R^k adalah subruang dari R^n dengan $k < n$, maka R^k adalah himpunan yang memenuhi n buah persamaan yaitu $x_\alpha = x_\alpha(t_1, t_2, \dots, t_k)$ dimana $t_i, i = 1, 2, \dots, k$ menyatakan k buah parameter dan $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Kasus khusus, jika $k = n - 1$, maka R^k disebut *hypersurface* pada ruang R^n.

$x_1, x_2, \dots, x_n$ disebut membentuk suatu sistem koordinat di R^n. Setiap $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ menyatakan sebagai titik pada ruang R^n, sedangkan $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ menjadi basis untuk $\bar{x}$, dengan kata lain

$$\exists k_i \in \mathbb{R} \ni \bar{x} = k_1 x_1 + k_2 x_2 + \cdots + k_n x_n.$$

Misalkan ada suatu transformasi, $R^n \to R^n$, dimana $(\bar{x}_1{}', \bar{x}_2{}', \dots, \bar{x}_n{}') = \overline{x'} \in R^n$. Sehingga diperoleh persamaan

$$\begin{aligned} \bar{x}_1{}' &= \bar{x}_1{}'(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \bar{x}_2{}' &= \bar{x}_2{}'(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \bar{x}_n{}' &= \bar{x}_n{}'(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \qquad \dots (1)$$

Atau $\bar{x}_\alpha{}' = \bar{x}_\alpha{}'(x_1, x_2, \dots, x_n)$, dimana $\alpha = 1, 2, \dots, n$. Transformasi tersebut dikenal sebagai transformasi koordinat yang terdiri dari n buah persamaan.

Karena persamaan (1) belum tentu bebas linear maka nilai Jacobian atau determinan Jacobinya tidak sama dengan nol.

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_1} & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} \neq 0$$

Dalam bentuk vektor (seperti vektor berarah atau vektor kecepatan), contoh vektor kontravariant adalah posisi sebuah objek relatif kesuatu tempat kedudukan, atau setiap turunan dari suatu posisi yang berhubungan dengan waktu, termasuk kecepatan, akselerasi dan hentakan. Dalam notasi Einstein, komponen kontravariant memiliki indeks-indeks pada bagian atas, seperti $\mathbf{v} = \mathbf{e}_i v^i$.

Selanjutnya akan dijelaskan mengenai tensor kontravariant rank satu atau yang lebih dikenal dengan tensor kontravariant.

3.2 Vektor Kontravariant

Definisi 3.2

Fungsi A^p dalam sistem koordinat $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ disebut vektor kontravariant jika pada suatu transformasi koordinat $R^n \to R^n$, sehingga fungsi A^p akan ditransformasikan menjadi

$$A^p \longrightarrow \overline{A}^p = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x_q} A^q \quad , p = 1,2, \ldots, n \qquad \cdots (2)$$

dimana $\overline{A}^p$ merupakan fungsi dalam sistem koordinat $(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n)$.

$$\overline{A}^p = \frac{\partial \overline{x}_p}{\partial x_q} A^q$$

disebut komponen vektor kontravariant atau tensor kontravariant rank satu atau order satu.

Untuk suatu vektor dual, vektor kovariant biasanya muncul ketika dikonstruksi gradien dari suatu fungsi (effektifnya pembagian dengan suatu vektor). Dalam notasi Einstein, komponen kovariant memiliki indeks-indeks pada bagian bawah, seperti $\mathbf{v} = \mathbf{e}^i v_i$.

3.3 Vektor Kovariant

Definisi 3.3

Fungsi A_p dalam sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut vektor kovariant jika pada suatu transformasi koordinat $R^n \rightarrow R^n$, sehingga fungsi A_p akan ditransformasikan menjadi

$$A_p \longrightarrow \bar{A}_p = \sum_{q=1}^{n} \frac{\partial x_q}{\partial \bar{x}_p} A_q \quad , p = 1,2, \dots, n \ \cdots (3)$$

dimana $\bar{A}_p$merupakan fungsi dalam sistem koordinat $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

$$\bar{A}_p = \frac{\partial x_q}{\partial \bar{x}_p} A_q$$

disebut komponen vektor kovariant atau tensor kovariant rank satu atau order satu.

3.4 Invariant

Definisi 3.4

Suatu fungsi $\psi = \psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut invariant jika pada suatu transformasi koordinat $R^n \rightarrow R^n$, sehingga fungsi ψ akan ditransformasikan menjadi

$$\psi(x_n) \longrightarrow \bar{\psi}(\bar{x}_n) = \psi(x_n) \quad \dots (4)$$

Contoh:

Jika A^p adalah suatu vektor kontravaiant dan B_p adalah suatu vektor kovariant, maka $A^p B_p$ adalah suatu invariant.

Perhatikan bentuk $\bar{A}^p \bar{B}_p$,

$$\bar{A}^p \bar{B}_p = \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_q} A^q \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_p} B_r$$

$$= \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_q} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_p} A^q B_r$$

$$= \frac{\partial x_r}{\partial x_q} A^q B_r$$

$$= \delta_q^r A^q B_r$$

$$= A^q \delta_q^r B_r$$

$$= A^q B_q$$

Karena indeks q sembarang, maka $\forall q$ berlaku $A^p B_p$ dengan memilih $p = q$. Diperoleh $A^p B_p$ adalah suatu invariant.

Misalkan untuk tensor kontravariant rank dua, maka sifat transformasinya menjadi

$$\bar{A}^{p_1 p_2} = \sum_{q_2=1}^{n} \sum_{q_1=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{q_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{q_2}} A^{q_1 q_2} \quad , p_1, p_2 = 1,2, \dots, n$$

sehingga bentuk umum transformasi tensor kontravariant rank $n$adalah

$$\bar{A}^{p_1 p_2 \cdots p_n} = \sum_{q_n=1}^{n} \cdots \sum_{q_2=1}^{n} \sum_{q_1=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{q_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{q_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}_{p_n}}{\partial x_{q_n}} A^{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

dimana $p_1, p_2, \dots, p_n = 1,2, \dots, n$ dengan

$$\bar{A}^{p_1 p_2 \cdots p_n} = \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{q_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{q_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}_{p_n}}{\partial x_{q_n}} A^{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

adalah komponen tensor kontravariant rank n.

Sekarang untuk tensor kovariant rank dua, maka sifat transformasinya menjadi

$$\bar{A}_{p_1 p_2} = \sum_{q_2=1}^{n} \sum_{q_1=1}^{n} \frac{\partial x_{q_1}}{\partial \bar{x}_{p_1}} \frac{\partial x_{q_2}}{\partial \bar{x}_{p_2}} A_{q_1 q_2} \quad , p_1, p_2 = 1,2, \dots, n,$$

sehingga bentuk umum transformasi tensor kovariant rank n adalah

$$\bar{A}_{p_1 p_2 \cdots p_n} = \sum_{q_n=1}^{n} \cdots \sum_{q_2=1}^{n} \sum_{q_1=1}^{n} \frac{\partial x_{q_1}}{\partial \bar{x}_{p_1}} \frac{\partial x_{q_2}}{\partial \bar{x}_{p_2}} \cdots \frac{\partial x_{q_n}}{\partial \bar{x}_{p_n}} A_{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

dimana $p_1, p_2, \dots, p_n = 1,2, \dots, n$ dengan

$$\bar{A}_{p_1 p_2 \cdots p_n} = \frac{\partial x_{q_1}}{\partial \bar{x}_{p_1}} \frac{\partial x_{q_2}}{\partial \bar{x}_{p_2}} \cdots \frac{\partial x_{q_n}}{\partial \bar{x}_{p_n}} A_{q_1 q_2 \cdots q_n}$$

adalah komponen tensor kovariant rank n.

Setelah mengetahui definisi dari komponen-komponen kontravariant dan kovariant rank n, selanjutnya akan didefinisikan tensor pada Definisi 3.5 berikut.

3.5 Tensor

Definisi 3.5

1. Misalkan E ruang vektor dan misalkan $T_s^r(E) = L^{r+s}(E^*, \dots, E^*, E, \dots, E; \mathbb{R})$ (r untuk E^*, sedangkan s untuk E). Unsur-unsur dari $T_s^r(E)$ disebut tensor pada E yang berjenis (r, s).
2. Jika $t \in T_s^r(E)$ maka t disebut tensor.
3. Misalkan $t_1 \in T_{s_1}^{r_1}(E)$ dan $t_2 \in T_{s_2}^{r_2}(E)$, hasilkali tensor dari t_1 dan t_2 adalah tensor $t_1 \otimes t_2 \in T_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(E)$ didefinisikan oleh

$$(t_1 \otimes t_2)\left(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2}\right)$$
$$= t_1\left(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2}\right) t_2\left(\gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, g_1, \dots, g_{s_2}\right)$$

dimana $\beta^i, \gamma^j \in E^*$ dan $f_i, g_j \in E$.

Contoh

Jika t adalah tensor jenis $(0,2)$ pada E maka tensor t mempunyai komponen-komponen $t_{ij} = t(e_i, e_j)$ adalah suatu matriks $n \times n$. Dengan cara inilah menghubungkan bentuk bilinear dengan suatu matriks. Misalnya, dalam $\mathbb{R}^2$ bentuk bilinear $t(x, y) = Ax_1y_1 + Bx_1y_2 + Cx_2y_1 + Dx_2y_2$ (dimana $x = (x_1, x_2)$ dan $y = (y_1, y_2)$) dihubungkan ke bentuk matriks $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$.

Dalam konsep tensor, suatu tensor campuran adalah tensor yang bukan jenis kovariant kuat maupun kontravariant kuat. Berdasarkan definisi tensor selanjutnya akan didefinisikan tensor campuran.

Definisi 3.5.2 Tensor Campuran

Fungsi A_q^p dalam sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut tensor campuran yang memiliki komponen kontravariant rank satu dan komponen kovariant rank satu, jika pada suatu transformasi koordinat $R^n \to R^n$ fungsi A_q^p ditransformasikan menjadi

$$A_q^p \longrightarrow \bar{A}_q^p = \sum_{s=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} A_s^r \quad , \forall p, q = 1,2, \dots, n$$

dimana $\bar{A}_q^p$ merupakan fungsi dalam sistem koordinat $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$.

Diperoleh $\bar{A}_q^p = \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} A_s^r$ adalah komponen tensor campuran.

Kemudian, untuk fungsi $A_{q_1 q_2 \dots q_n}^{p_1 p_2 \dots p_n}$ disebut tensor campuran yang memiliki komponen kontravariant rank n dan komponen kovariant rank m, jika pada suatu transformasi koordinat $x_n \mapsto \bar{x}_n$ fungsi $A_{q_1 q_2 \dots q_m}^{p_1 p_2 \dots p_n}$ ditransformasikan menjadi

$$A^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m} \longrightarrow \bar{A}^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m} = \sum \cdots \sum \sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial \bar{x}_{q_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial \bar{x}_{q_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}_{p_n}}{\partial x_{r_n}} \frac{\partial x_{s_m}}{\partial \bar{x}_{q_m}} A^{r_1r_2\cdots r_n}_{s_1s_2\cdots s_m}.$$

Diperoleh

$$\bar{A}^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m} = \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial \bar{x}_{q_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial \bar{x}_{q_2}} \cdots \frac{\partial \bar{x}_{p_n}}{\partial x_{r_n}} \frac{\partial x_{s_m}}{\partial \bar{x}_{q_m}} A^{r_1r_2\cdots r_n}_{s_1s_2\cdots s_m}$$

adalah komponen tensor campuran order (n, m).

Contoh:

Akan ditunjukkan bahwa δ^p_q adalah suatu tensor campuran. Sekarang perhatikan persamaan transformasi berikut

$$\bar{\delta}^p_q = \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} \delta^r_s$$

$$= \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_q} = \delta^p_q$$

dimana $\delta^p_q = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$ dan $\bar{\delta}^p_q = \begin{cases} 1, & p = q \\ 0, & p \neq q \end{cases}$.

Jadi, bahwa tensor δ^p_q merupakan tensor campuran dengan kontravariant dan kovariant masing-masing rank satu.

3.6 Tensor Simetri dan Antisimetri

Misalkan$A^{p_1p_2\cdots p_n}$ sebarang tensor kontravariant,berlaku

1. Jika $A^{p_1p_2\cdots p_n} = A^{p_2p_1\cdots p_n}$ maka $A^{p_1p_2\cdots p_n}$ disebut simetri terhadap pertukaran indeks p_1 dan p_2.
2. Jika $A^{p_1p_2\cdots p_n} = -A^{p_2p_1\cdots p_n}$ maka $A^{p_1p_2\cdots p_n}$ disebut antisimetri terhadap pertukaran indeks p_1 dan p_2.

Demikian juga berlaku untuk tensor kovariant. Misalkan $A_{p_1p_2\cdots p_n}$tensor kovariant sebarang, berlaku

1. Jika $A_{p_1p_2\cdots p_n} = A_{p_2p_1\cdots p_n}$ maka $A_{p_1p_2\cdots p_n}$ disebut simetri terhadap pertukaran indeks p_1 dan p_2.
2. Jika $A_{p_1p_2\cdots p_n} = -A_{p_2p_1\cdots p_n}$ maka $A_{p_1p_2\cdots p_n}$ disebut antisimetri terhadap pertukaran indeks p_1 dan p_2.

Sekarang perhatikan, jika $A^{p_1p_2}$ adalah suatu tensor simetri dan $B_{p_1p_2}$ adalah suatu tensor antisimetri, maka

$$B_{p_1p_2}A^{p_1p_2} = 0.$$

Setiap tensor selalu dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dari tensor simetri dengan tensor antisimetri.

Contoh:

Misalkan suatu tensor umum $T^{p_1p_2\cdots p_n}$ sebarang dan pertukaran antara indeks p_1 dan p_2. Sekarang bentuk tensor T menjadi

$$T^{p_1p_2\cdots p_n} = \frac{1}{2}\left(T^{p_1p_2\cdots p_n} + T^{p_2p_1\cdots p_n}\right) + \frac{1}{2}\left(T^{p_1p_2\cdots p_n} - T^{p_2p_1\cdots p_n}\right) \ldots (5)$$

Tensor T memiliki bagian simetri dan antisimetri yang didefinisikan sebagai

$$A^{p_1p_2} = \frac{1}{2}\left(T^{p_1p_2\cdots p_n} + T^{p_2p_1\cdots p_n}\right)$$

$$B_{p_1p_2} = \frac{1}{2}\left(T^{p_1p_2\cdots p_n} - T^{p_2p_1\cdots p_n}\right)$$

Sehingga persamaan (5) dapat ditulis dalam bentuk

$$T^{p_1p_2\cdots p_n} = A^{p_1p_2} + B_{p_1p_2}.$$

Semua sifat-sifat yang berlaku pada vektor, akan berlaku pula pada tensor. Hal ini dikarenakan operator-operator yang berlaku dan digunakan pada tensor merupakan bentuk generalisasi dari operator-operator yang berlaku pada vektor. Berikut akan dijelaskan operasi-operasi dasar yang berlaku pada tensor.

3.7 Operasi-Operasi Dasar pada Tensor

1. Penjumlahan

Penjumlahan dari dua tensor atau lebih yang memiliki rank dan jenis yang sama (sebagai contoh: Misalkan tensor A dan B banyaknya indeks kontravariant dan banyaknya indeks kovariant sama) akan menghasilkan tensor yang memiliki rank dan jenis yang sama pula.

Misalkan $A_q^{p_1p_2}$ dan $B_q^{p_1p_2}$ merupakan tensor dalam sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka

$$C_q^{p_1p_2} = A_q^{p_1p_2} + B_q^{p_1p_2}$$

Bukti:

Ambil sebarang tensor $A_q^{p_1p_2}$ dan $B_q^{p_1p_2}$ dalam sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka

$$\begin{aligned}
A_q^{p_1p_2} + B_q^{p_1p_2} &= \sum\sum\sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} A_s^{r_1r_2} + \sum\sum\sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} B_s^{r_1r_2} \\
&= \sum\sum\sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} (A_s^{r_1r_2} + B_s^{r_1r_2}) \\
&= \sum\sum\sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} C_s^{r_1r_2} \\
&= C_q^{p_1p_2}
\end{aligned}$$

adalah merupakan tensor juga. Pada operasi penjumlahan ini berlaku juga sifat komutatif dan assosiatif.

2. Pengurangan

Selisih dari dua tensor atau lebih yang memiliki rank dan jenis yang sama adalah tensor dengan rank dan jenis yang sama pula.

Misalkan $A_q^{p_1p_2}$ dan $B_q^{p_1p_2}$ merupakan tensor dalam sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka

$$D_q^{p_1p_2} = A_q^{p_1p_2} - B_q^{p_1p_2}$$

merupakan tensor juga.

Bukti:

Ambil sebarang tensor $A_q^{p_1p_2}$ dan $B_q^{p_1p_2}$ dalam sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka

$$A_q^{p_1p_2} - B_q^{p_1p_2} = \sum\sum\sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} A_s^{r_1r_2} - \sum\sum\sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} B_s^{r_1r_2}$$

$$= \sum\sum\sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} (A_s^{r_1r_2} - B_s^{r_1r_2})$$

$$= \sum\sum\sum \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} D_s^{r_1r_2}$$

$$= D_q^{p_1p_2}$$

3. Perkalian (*Outer Multiplication*)

Hasil kali dua tensor adalah tensor dimana ranknya merupakan jumlah dari rank tensor-tensor tersebut. Komponen tensor ini disebut *outer product*. Sebagai contoh, $C_{q_1q_2}^{p_1p_2p_3} = A_{q_1}^{p_1p_2} B_{q_2}^{p_3}$ adalah outer product dari $A_{q_1}^{p_1p_2}$ dan $B_{q_2}^{p_3}$. Tetapi, tidak semua bentuk tensor dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari dua tensor yang ranknya lebih sederhana. Contohnya A^{p_1}, tensor tersebut tidak dapat dinyatakan sebagai hasil kali dari dua tensor yang ranknya lebih sederhana atau rendah karena tensor A^{p_1} merupakan bentuk tensor yang lebih sederhana. Begitupun dengan tensor B_{q_1}.

4. Kontraksi

Misalkan $A^{p_1 p_2}_{q_1 q_2 q_m}$ adalah suatu tensor campuran yang memiliki rank lima, dengan kontravariant rank dua dan kovariant rank tiga. Jika salah satu indeks kovariant sama dengan salah satu indeks kontravariant, maka rank tensor tersebut akan berkurang sebanyak dua. Artinya, bentuk $A^{p_1 p_2}_{q_1 q_2 q_m}$ merupakan tensor yang memiliki rank tiga. Proses demikian lebih dikenal sebagai kontraksi tensor.

Contoh:

Untuk memperlihatkan contoh diatas yang memperoleh rank tiga, perhatikan tensor $A^{p_1 p_2}_{q_1 q_2 p_2}$. Bentuk transformasi dari tensor $A^{p_1 p_2}_{q_1 q_2 p_2}$ adalah

$$\bar{A}^{p_1 p_2}_{q_1 q_2 p_2} = \frac{\partial \bar{x}_{p_1}}{\partial x_{r_1}} \frac{\partial \bar{x}_{p_2}}{\partial x_{r_2}} \frac{\partial x_{s_1}}{\partial \bar{x}_{q_1}} \frac{\partial x_{s_2}}{\partial \bar{x}_{q_2}} \frac{\partial x_{s_3}}{\partial \bar{x}_{p_2}} A^{r_1 r_2}_{s_1 s_2 s_3}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}_{i_1}}{\partial x_{k_1}} \frac{\partial x_{l_1}}{\partial \bar{x}_{j_1}} \frac{\partial x_{l_2}}{\partial \bar{x}_{j_2}} \delta^{l_3}_{i_2} A^{k_1 k_2}_{l_1 l_2 l_3}$$

$$= \frac{\partial \bar{x}_{i_1}}{\partial x_{k_1}} \frac{\partial x_{l_1}}{\partial \bar{x}_{j_1}} \frac{\partial x_{l_2}}{\partial \bar{x}_{j_2}} A^{k_1 k_2}_{l_1 l_2 i_2}$$

Dari koefisien transformasi tersebut jelas bahwa $A^{i_1 i_2}_{j_1 j_2 i_2}$ merupakan suatu tensor rank tiga, yaitu kontravariant rank satu dan kovariant rank dua.

Jika A^i adalah suatu tensor kontravariant rank satu, dan jika $C_{ij}A^iA^j$ adalah suatu invariant, maka

$$C_{ij} = {}^1/_2\,(C_{ij} + C_{ji})$$

merupakan suatu tensor kovariant rank dua.

5. Perkalian Dalam (*Inner Multiplication*)

Misalkan A_k^{ij} dan B_{mn}^l merupakan tensor dalam sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, maka

$$A_k^{ij}B_{mn}^l$$

disebut outer product. Misalkan $k = l$, sehingga diperoleh $A_l^{ij}B_{mn}^l$ atau dengan memisalkan $k = l$ dan $j = m$, sehingga diperoleh bentuk tensor $A_l^{im}B_{mn}^l$.

Dengan menggunakan proses *outer multiplication* dan kontraksi, dapat diperoleh tensor baru yang disebut *inner product*. Proses ini disebut *inner multiplication*. Pada *inner* dan *outer multiplication* berlaku juga sifat komutatif dan assosiatif.

6. Hukum Qoutient

a). Jika $A^{i_1i_2\dots i_m}$ adalah suatu tensor kontravariant rank m, dan jika berlaku

$$A^{i_1i_2\dots i_m}B^{j_1j_2\dots j_n} = C^{k_1k_2\dots k_{m+n}}$$

yang merupakan tensor kontravariant rank $(m+n)$, maka $B^{j_1j_2\dots j_n}$ adalah tensor kontravariant rank n.

b). Jika $A^{i_1i_2\dots i_m}$ adalah suatu tensor kontravariant rank m, dan jika berlaku

$$A^{i_1i_2\dots i_m}B_{j_1j_2\dots j_n} = C_{l_1l_2\dots l_n}^{k_1k_2\dots k_m}$$

yang merupakan tensor campuran kontravariant rank m dan kovariant rank n, maka $B_{j_1 j_2 \dots j_n}$ adalah tensor kovariant rank n.

c). Jika $A_{i_1 i_2 \dots i_n}$ adalah suatu tensor kovariant rank m, dan jika berlaku

$$A_{i_1 i_2 \dots i_n} B_{j_1 j_2 \dots j_n} = C_{k_1 k_2 \dots k_{m+n}}$$

yang merupakan tensor kovariant rank $(m+n)$, maka $B_{j_1 j_2 \dots j_n}$ adalah tensor kovariant rank n.

3.8 Tensor Metrik

Pada koordinat (x, y, z) turunan dari panjang busur ds diperoleh dari

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Dengan mentransformasikannya ke bentuk koordinat kurvilinear umum menjadi

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta . \qquad \dots (6)$$

Sehingga ruang yang memuat persamaan jarak diatas disebut ruang Euclid dimensi 3.

Berikut ini merupakan perumuman ke ruang dimensi n dengan sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Definisikan suatu elemen garis ds pada ruang dimensi n yang dibentuk oleh bentuk kuadratik, disebut bentuk metrik atau metrik,

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{n} \sum_{\beta=1}^{n} g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \text{ atau } ds^2 = g_{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta$$

dengan $\alpha, \beta = 1,2, \dots, n$ dan

$$\det \left| g_{\alpha\beta} \right| = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Misalkan terdapat suatu transformasi koordinat dari x_j ke $\bar{x}_k$ sedemikian sehingga bentuk metrik ditransformasikan menjadi

$$(d\bar{x}_1)^2 + (d\bar{x}_2)^2 + \cdots + (d\bar{x}_n)^2 \quad \ldots(7)$$

Persamaan (7) disebut sebagai ruang Euclid dimensi-n atau secara umum dikenal dengan ruang Riemann.

Jumlah $g_{\alpha\beta}$ merupakan komponen-komponen dari tensor kovariant rank dua yang disebut tensor metrik atau fundamental tensor.

3.9 Tensor Konjugat

Misalkan $g_{\alpha\beta}$ merupakan tensor metrik dan $g = |g_{\alpha\beta}| \neq 0$ menotasikan sebagai determinan dengan elemen-elemen dari $g_{\alpha\beta}$. Definisikan $g^{\alpha\beta}$ sebagai berikut

$$g^{\alpha\beta} = \frac{\text{kofaktor dari} g_{\alpha\beta}}{g}$$

maka $g^{\alpha\beta}$ adalah kontravariant tensor simetrik rank dua disebut konjugat atau *reciprocal tensor* dari $g_{\alpha\beta}$.

3.10 Asosiasi Tensor

Misalkan sebarang tensor campuran pada ruang dimensi-n dengan jenis (k, l) atau dengan komponen kontravariant rank k dan komponen kovariant l, dimana notasi (k, l) digunakan untuk menotasikan rank $k + l$ dengan k indeks batas atas dan l indeks batas bawah.

Suatu tensor jenis (k, l) dikatakan indeks naik jika jenis (k, l) diubah ke jenis $(k+1, l-1)$. Sedangkan tensor jenis (k, l) dikatakan indeks turun jika jenis (k, l) diubah ke jenis $(k-1, l+1)$.

Contoh:

Misalkan tensor kovariant A_p dengan jenis $(0, 1)$. Jika indeksnya dinaikkan diperoleh tensor $A^{p}_{.}$ dengan jenis $(1, 0)$. Tanda titik memperlihatkan posisi awal yang indeksnya berubah. Agar tidak menimbulkan kebingungan dalam hal pembacaan indeks, biasanya tanda titik dihilangkan; sehingga $A^{p}_{.}$ menjadi A^p.

Perkalian tensor kontravariant dengan tensor metrik diperoleh sebarang tensor kovariant.

Contoh:

$$A_i = g_{ij}A^j \text{ atau } A_{ij} = g_{ki}g_{lj}A^{kl}.$$

Sedangkan perkalian tensor kovariant dengan tensor metrik diperoleh sebarang tensor kontravariant. Contohnya:

$$A^i = g^{ij}A_j \text{ atau } A^{ij} = g^{ki}g^{lj}A_{kl}.$$

Seluruh tensor yang dihasilkan dari perkalian dengan tensor metrik disebut dengan *associated tensors*.

3.11 Panjang dan Sudut Antara Dua Vektor

Misalkan A^p dan B_q sebarang vektor pada ruang dimensi n dan A^pB_q adalah suatu*inner product*, maka panjang vektor A^p adalah

$$L = \sqrt{A^p A_p} = \sqrt{g^{pq} A_q A_p} = \sqrt{g_{pq} A^q A^p}$$

dan sudut θ antara A^p dan B_q didefinisikan sebagai berikut

$$\cos\theta = \frac{A^p B_q}{\sqrt{(A^p A_p)(B^q B_q)}}.$$

Contoh:

Buktikan sudut-sudut berikut θ_{12}, θ_{23} dan θ_{31}dalam suatu kurva koordinat yang didefinisikan sebagai berikut

$$\cos\theta_{12} = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}, \quad \cos\theta_{12} = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}, \quad \cos\theta_{12} = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}$$

Solusi. Misalkan kasus untuk sepanjang koordinat x_1 sehingga x_2 dan x_3 berupa konstanta, maka bentuk metriknya menjadi,

$$ds^2 = g_{11}(dx_1)^2 \Leftrightarrow \frac{dx_1}{ds} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}.$$

Sehingga tangen vektor sepanjang kurva x_1 adalah $A_1^r = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_1^r$.

Sedangkan untuk tangen vektor sepanjang kurva x_2 dan x_3 masing-masing adalah $A_2^r = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^r$ dan $A_1^r = \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_1^r$.

Selanjutnya, cosinus sudut θ_{12} diantara A_1^r dan A_2^r adalah

$$\cos\theta_{12} = g_{pq} A_1^p A_2^q = g_{pq} \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_1^p \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_1^q = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$$

cosinus sudut θ_{23} diantara A_2^r dan A_3^r adalah

$$\cos\theta_{23} = g_{pq} A_2^p A_3^q = g_{pq} \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}\delta_2^p \frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_3^q = \frac{g_{23}}{\sqrt{g_{22}g_{33}}}$$

cosinus sudut θ_{31} diantara A_3^r dan A_1^r adalah

$$\cos\theta_{31} = g_{pq}A_3^pA_1^q = g_{pq}\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\delta_2^p\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\delta_3^q = \frac{g_{31}}{\sqrt{g_{33}g_{11}}}.$$

Pada subbagian berikut akan dijelaskan mengenai konsep differensial yang berlaku pada tensor. Tidak berbeda jauh dengan differensial vektor namun pada differensial tensor ini membutuhkan konsep dasar yang mendukung yaitu simbol Christoffel.

3.12 Differensial Tensor

Proses differensial tensor adalah suatu generalisasi proses differensial yang biasa dikenal dalam differensial fungsi. Pada analisis tensor dikenal dua jenis differensial yang biasa digunakan yaitu

1. Differensial Kovariant
2. Differensial Intrinsik

Terlebih dahulu akan dijelaskan tentang differensial kovariant, kemudian akan dibahas hubungan-hubungan antara differensial kovariant dengan differensial intrinsik.

1. Differensial Kovariant

Sebelum masuk pada pembahasan differensial kovariant, perlu diketahui tentang simbol Christoffel.

Definisi 3.12.1 (simbol Christoffel)

Misalkan $g_{\alpha\beta}$ sebarang tensor metrik pada ruang Riemann dimensi-n, maka

a) Simbol Christoffel dari jenis pertama, yang dinotasikan dengan $\Gamma_{ij,k}$, didefinisikan sebagai berikut

$$\Gamma_{ij,k} = [ij,k] = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)$$

b) Simbol Christoffel dari jenis kedua, yang dihubungkan dengan persamaan $g^{\alpha\beta}\Gamma_{ij,k}$ dan dinotasikan dengan Γ_{ij}^{l} didefinisikan sebagai berikut

$$\Gamma_{ij}^{l} = \begin{Bmatrix} l \\ ij \end{Bmatrix} = \sum_{r=1}^{n} g^{lr}\Gamma_{ij,r} = g^{l1}\Gamma_{ij,1} + \cdots + g^{ln}\Gamma_{ij,n}$$

Untuk transformasi $\bar{x}^n = \bar{x}^n(x^1, x^2, \cdots, x^n)$, simbol Christoffel Γ_{mn}^{l} dalam sistem koordinat x ke $\bar{x}$ ditransformasikan oleh

$$G_{jk}^{i} = \sum \Gamma_{mn}^{l} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^j} \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l} + \sum \frac{\partial^2 x^r}{\partial \bar{x}^j \partial \bar{x}^k} \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^r} \quad \ldots (8)$$

dimana bentuk pertama pada sebelah kanan adalah penjumlahan pada indeks-indeks l, m, n dan bentuk kedua adalah penjumlahan pada indeks r. Persamaan (8) disebut transformasi simbol Christoffel.

Sekarang, dengan menggunakan simbol Christoffel dapat didefinisikan differensial kovariant.

Definisi 3.12.2

Misalkan A^p dan A_p masing-masing adalah vektor kontravariant dan kovariant, maka

a) Differensial kovariant dari sebarang vektor kontravariant A^p didefinisikan sebagai berikut

$$A_{;q}^{p} = \frac{\partial A^p}{\partial x_q} + \Gamma_{qr}^{p} A^r$$

b) Differensial kovariant dari sebarang vektor kovariant A_p didefinisikan sebagai berikut

$$A_{p;q} = \frac{\partial A_p}{\partial x_q} - \Gamma^r_{pq} A_r$$

Catatan: Tanda (;) menyatakan sebagai differensial kovariant vektor atau tensor rank satu.

Perhatikan bahwa $A^p_{;q}$ dan $A_{p;q}$ masing-masing adalah tensor, sehingga jika terdapat transformasi koordinat $x_i \mapsto \bar{x}_i$, maka transformasi dari $A^p_{;q}$ dan $A_{p;q}$ masing-masing adalah

$$\bar{A}^p{}_{;q} = \frac{\partial \bar{x}_p}{\partial x_r} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} A^r{}_{;s} \text{ dan } \bar{A}_{p;q} = \frac{\partial x_r}{\partial \bar{x}_p} \frac{\partial x_s}{\partial \bar{x}_q} A_{r;s}.$$

Generalisasi proses differensial kovariant untuk tensor yang memiliki rank lebih tinggi sebagai berikut:

a) Differensial kovariant terhadap tensor kontravariant rank n

$$A^{p_1 p_2 \cdots p_n}{}_{;q} = \frac{\partial A^{p_1 p_2 \cdots p_n}}{\partial x_q} + \Gamma^{p_1}_{rq} A^{r p_2 p_3 \cdots p_n} + \cdots + \Gamma^{p_n}_{rq} A^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1} r}$$

b) Differensial kovariant terhadap tensor kovariant rank m

$$A_{p_1 p_2 \cdots p_m ; q} = \frac{\partial A_{p_1 p_2 \cdots p_m}}{\partial x_q} - \Gamma^r_{p_1 q} A_{r p_2 p_3 \cdots p_m} - \cdots - \Gamma^r_{p_m q} A_{p_1 p_2 \cdots p_{m-1} r}$$

c) Differensial kovariant terhadap tensor campuran kontravariant rank n dan kovariant rank m

$$A^{p_1 p_2 \cdots p_n}_{q_1 q_2 \cdots q_m ; r} = \frac{\partial A^{p_1 p_2 \cdots p_n}_{q_1 q_2 \cdots q_m}}{\partial x_r} + \Gamma^{p_1}_{sr} A^{s p_2 p_3 \cdots p_n}_{q_1 q_2 \cdots q_m} + \cdots + \Gamma^{p_n}_{sr} A^{p_1 p_2 \cdots p_{n-1} s}_{q_1 q_2 \cdots q_m}$$

$$-\Gamma^s_{q_1 r} A^{p_1 p_2 \cdots p_n}_{s q_2 q_3 \cdots q_m} - \cdots - \Gamma^s_{q_m r} A^{p_1 p_2 \cdots p_n}_{q_1 q_2 \cdots q_{m-1} s}$$

3.12.3 Sifat-sifat Differensial Kovariant

Teorema 3.12.3

Misalkan A^p dan B^q adalah tensor kontravariant rank satu, g^{pq} adalah tensor metrik rank dua dan ψ adalah suatu invariant, maka berlaku sifat-sifat differensial kovariant berikut

1. $(A^p B^q)_{;r} = A^p{}_{;r} B^q + A^p B^q{}_{;r}$
2. $(A^p B_q)_{;r} = A^p{}_{;r} B_q + A^p B_{q;r}$
3. $(A^p \pm B^p)_{;r} = A^p{}_{;r} \pm B^p{}_{;r}$
4. $g^{pq}{}_{;r} = \frac{\partial g^{pq}}{\partial x_r} + \Gamma^p_{sr} g^{sq} + \Gamma^q_{sr} g^{sp} = 0\ dan g_{pq;r} = 0$
5. *Jika* $A_{pq} = B_{p;q} - B_{q;p}$ *maka* $A_{pq;r} + A_{qr;p} + A_{rp;q} = 0$
6. *Jika ψ invariant, maka gradien dari ψ adalah*

$$\nabla\psi = \text{grad } \psi = \psi_{;r} = \frac{\partial\psi}{\partial x_r}$$

dimana $\psi_{;r}$ adalah differensial kovariant invariant ψ terhadapx_r.

7. *Divergensi dari A^padalah kontraksi dari differensial kovariant x_p, sebagai contohnya adalah kontraksi dari $A^p{}_{;p}$. Diperoleh*

$$div\ A^p = A^p{}_{;p} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{g} A^k\right)$$

8. *Curl dari tensor $A_p$adalah*

$$A_{p;q} - A_{q;p} = \frac{\partial A^p}{\partial x_q} - \frac{\partial A^q}{\partial x_p}$$

9. *Misalkan ψ adalah suatu invariant, maka Laplacian dari ψ adalah divergensi dari grad ψ atau*

$$\nabla^2\psi = div\ \psi_{;r} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sqrt{g} g^{kl} \frac{\partial\psi}{\partial x_l}\right)$$

Bukti:

1. Misalkan A^p dan B^q masing-masing adalah tensor kontravariant rank satu. Sehingga differensial kovariant terhadap perkalian dua tensor tersebut (A^pB^q) adalah

$$(A^pB^q)_{;r} = \frac{\partial(A^pB^q)}{\partial x_r} + \Gamma^{pq}_{rs}(A^pB^q)^s$$

$$= \frac{\partial A^p}{\partial x_r}B^q + A^p\frac{\partial B^q}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}(A^pB^q)^s + \Gamma^q_{rs}(A^pB^q)^s$$

$$= \frac{\partial A^p}{\partial x_r}B^q + A^p\frac{\partial B^q}{\partial x_r} + B^q\Gamma^p_{rs}A^s + A^p\Gamma^q_{rs}B^s$$

$$= \left(\frac{\partial A^p}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}A^s\right)B^q + A^p\left(\frac{\partial B^q}{\partial x_r} + \Gamma^q_{rs}B^s\right)$$

$$= A^p{}_{;r}B^q + A^pB^q{}_{;r}$$

Jadi, untuk setiap perkalian dua tensor kontravariant rank satu, differensial kovariantnya adalah

$$(A^pB^q)_{;r} = A^p{}_{;r}B^q + A^pB^q{}_{;r}.$$

2. Misalkan A^p dan B_q masing-masing adalah tensor kontravariant dan tensor kovariant rank satu. Sehingga differensial kovariant terhadap perkalian dua tensor tersebut (A^pB_q) adalah

$$(A^pB_q)_{;r} = \frac{\partial(A^pB_q)}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}A^sB_q - \Gamma^s_{qr}A^pB_s$$

$$= \frac{\partial A^p}{\partial x_r}B_q + A^p\frac{\partial B_q}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}A^sB_q - A^p\Gamma^q_{rs}B_s$$

$$= \frac{\partial A^p}{\partial x_r}B_q + \Gamma^p_{rs}A^sB_q + A^p\frac{\partial B_q}{\partial x_r} - A^p\Gamma^q_{rs}B_s$$

$$= \left(\frac{\partial A^p}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs} A^s\right) B_q + A^p \left(\frac{\partial B_q}{\partial x_r} - \Gamma^q_{rs} B_s\right)$$

$$= A^p{}_{;r} B_q + A^p B_{q;r}$$

Jadi, untuk setiap perkalian tensor kontravariant rank satu dengan tensor kovariant rank satu, differensial kovariantnya adalah

$$\left(A^p B_q\right)_{;r} = A^p{}_{;r} B_q + A^p B_{q;r}$$

3. Misalkan A^p dan B^p merupakan tensor kontravariant rank satu. Sehingga differensial kovariant terhadap penjumlahan maupun pengurangan kedua tensor tersebut $(A^p \pm B^p)$ adalah

$$\left(A^p \pm B^p\right)_{;r} = \frac{\partial\left(A^p \pm B^p\right)}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}\left(A^s \pm B^s\right)$$

$$= \frac{\partial (A^p)}{\partial x_r} \pm \frac{\partial (B^p)}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}(A^s) \pm \Gamma^p_{rs}(B^s)$$

$$= \frac{\partial (A^p)}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}(A^s) \pm \frac{\partial (B^p)}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}(B^s)$$

$$= A^p{}_{;r} \pm B^p{}_{;r}$$

Jadi, untuk setiap penjumlahan maupun pengurangan dua tensor kontravariant rank satu, differensial kovariantnya adalah

$$\left(A^p \pm B^p\right)_{;r} = A^p{}_{;r} \pm B^p{}_{;r}$$

4. Sebelum membuktikan $g^{pq}{}_{;r} = 0$, akan ditunjukkan bahwa

$$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_r} = -\Gamma^p_{sr} g^{sq} - \Gamma^q_{sr} g^{sp}.$$

Perhatikan bahwa $\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{jk} g_{ij}\right) = \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\delta^k_i\right) = 0$, maka berdasarkan sifat differensial parsial pada suatu vektor diperoleh bahwa

$$\frac{\partial}{\partial x_r}\left(g^{jk}g_{ij}\right) = g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} + g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x_r} = 0.$$

Akibatnya,

$$g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x_r} = -g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r} \quad \ldots (4.1)$$

Jika persamaan (4.1) dikalikan dengan g^{ir}, maka

$$g^{is}g_{ij}\frac{\partial g^{jk}}{\partial x_r} = -g^{is}g^{jk}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x_r}$$

$$\delta_j^s\frac{\partial g^{jk}}{\partial x_r} = -g^{is}g^{jk}([ir,j] + [jr,i])$$

$$\frac{\partial g^{jk}}{\partial x_r} = -g^{is}g^{jk}[ir,j] - g^{is}g^{jk}[jr,i]$$

$$= -g^{is}\begin{Bmatrix} k \\ ir \end{Bmatrix} - g^{jk}\begin{Bmatrix} s \\ jr \end{Bmatrix} = -\Gamma_{ir}^{k}g^{is} - \Gamma_{jr}^{s}g^{jk} \quad \ldots (4.2)$$

Karena berlaku untuk semua jenis tensor maka persamaan (4.2) berlaku pula untuk persamaan

$$\frac{\partial g^{pq}}{\partial x_r} = -\Gamma_{sr}^{p}g^{sq} - \Gamma_{sr}^{q}g^{sp} \quad \ldots (4.3)$$

Sekarang misalkan g^{pq} dan g_{pq} masing-masing adalah tensor metrik kontravariant rank dua dan tensor metrik kovariant rank dua. Sehingga differensial kovariant terhadap tensor metrik g^{pq} dan g_{pq} adalah

$$g^{pq}{}_{;r} = \frac{\partial g^{pq}}{\partial x_r} + \Gamma_{sr}^{p}g^{sq} + \Gamma_{sr}^{q}g^{sp}$$

$$= -\Gamma_{sr}^{p}g^{sq} - \Gamma_{sr}^{q}g^{sp} + \Gamma_{sr}^{p}g^{sq} + \Gamma_{sr}^{q}g^{sp}$$

$$= 0$$

$$g_{pq;r} = \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_r} - \Gamma_{pr}^{s}g_{sq} - \Gamma_{qr}^{s}g_{ps}$$

$$= \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_r} - [pr;q] - [qr;p]$$

$$= \frac{\partial g_{pq}}{\partial x_r} - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rq}}{\partial x^p} + \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{pr}}{\partial x^q}\right)\right) - \left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_{rp}}{\partial x^q} + \frac{\partial g_{qp}}{\partial x^r} - \frac{\partial g_{qr}}{\partial x^p}\right)\right)$$

$$= 0$$

Jadi, untuk setiap tensor metrik kontravariant rank dua dan kovariant rank dua, maka differensial kovariantnya adalah

$$g^{pq}{}_{;r} = \frac{\partial g^{pq}}{\partial x_r} + \Gamma^p_{sr} g^{sq} + \Gamma^q_{sr} g^{sp} = 0 \text{ dan } g_{pq;r} = 0$$

5. Ambil sebarang tensor kovariant rank dua A_{pq} dan differensial kovariant terhadap tensor kovariant, katakanlah $B_{p;q}$ dan $B_{q;p}$. Jika berlaku $A_{pq} = B_{p;q} - B_{q;p}$ akan ditunjukkan bahwa $A_{pq;r} + A_{qr;p} + A_{rp;q} = 0$.

$$A_{pq;r} = B_{p;qr} - B_{q;rp}$$

$$A_{qr;p} = B_{q;rp} - B_{p;qr}$$

$$A_{rp;q} = B_{r;pq} - B_{\langle;qr}$$

Sehingga

$$A_{pq;r} + A_{qr;p} + A_{rp;q} = B_{p;qr} - B_{q;rp} + B_{q;rp} - B_{p;qr} + B_{r;pq} - B_{p;qr} = 0$$

Jika $A_{pq} = B_{p;q} - B_{q;p}$ maka $A_{pq;r} + A_{qr;p} + A_{rp;q} = 0$.

6. Misalkanψ suatu invariant pada sistem koordinat $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, sehingga dapat dikonstruksi menjadi $\psi = A^p B_p$.

Sekarang perhatikan

$$\nabla\psi = grad\ \psi = \psi_{;r}$$

$$= \left(A^p B_p\right)_{;r} \quad \dots (*)$$

Berdasarkan differensial kovariant sifat 2, maka persamaan (*) menjadi

$$= A^{p}{}_{;r}B_p + A^pB_{p;r}$$

$$= \left(\frac{\partial A^p}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}A^s\right)B_p + A^p\left(\frac{\partial B_p}{\partial x_r} - \Gamma^s_{pr}B_s\right)$$

$$= \frac{\partial\left(A^pB_p\right)}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}A^sB_q - \Gamma^s_{pr}A^pB_s \ldots (**)$$

Dengan menggunakan pertukaran indeks antara p dan s, yang berlaku $\Gamma^p_{rs}A^sB_q = \Gamma^s_{pr}A^pB_s$, maka persamaan (**) menjadi

$$= \frac{\partial\left(A^pB_p\right)}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}A^sB_q - \Gamma^p_{rs}A^sB_q$$

$$= \frac{\partial\left(A^pB_p\right)}{\partial x_r} = \frac{\partial\psi}{\partial x_r}$$

Jadi, untuk setiap invariant ψ, berlaku

$$\nabla\psi = \text{grad}\ \psi = \psi_{;r} = \frac{\partial\psi}{\partial x_r}$$

dimana $\psi_{;r}$ adalah differensial kovariant invariant ψ terhadap x_r.

7. Sebelumnya akan dibuktikan $\Gamma^p_{pq} = \frac{\partial}{\partial x_q}\ln\sqrt{g}$. Misalkan determinan dari g adalah $g = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix}$. Berdasarkan determinan g tersebut diperoleh $g = g_{jr}G(j,r)$, dimana $G(j,r)$ adalah kofaktor-kofaktor dari g_{jr}. Karena $G(j,r)$ tidak memuat g_{jr} secara eksplisit, maka berlaku $\frac{\partial g}{\partial g_{jr}} = G(j,r)$. Sehingga berlaku

$$\frac{\partial g}{\partial x_m} = \frac{\partial g}{\partial g_{jr}}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_m} = G(j,r)\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_m}$$

$$= g\ g^{jr}\frac{\partial g_{jr}}{\partial x_m} = g\ g^{jr}([jm,r] + [rm,j])$$

$$= g\left(\left\{ {p \atop pq} \right\} + \left\{ {s \atop sq} \right\}\right) = 2g\left\{ {p \atop pq} \right\}$$

$$\frac{\partial g}{\partial x_q} = 2g\Gamma^p_{pq} \iff \frac{1}{2g}\frac{\partial g}{\partial x_q} = \Gamma^p_{pq} \iff \Gamma^p_{pq} = \frac{\partial}{\partial x_q}\ln\sqrt{g} \quad \dots (9)$$

Misalkan A^p sebarang tensor kontravariant rank satu. Divergensi dari A^p didefinisikan sebagai kontraksi dari differensial kovariant terhadap x_p pada tensor A^p. Sehingga berlaku

$$div\ A^p = A^p{}_{;p} = \frac{\partial A^p}{\partial x_p} + \Gamma^p_{pk}A^k$$

Berdasarkan persamaan (9), maka

$$div\ A^p = \frac{\partial A^p}{\partial x_p} + \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\ln\sqrt{g}\right)A^k$$

$$= \frac{\partial A^p}{\partial x_p} + \left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x_k}\right)A^k$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{g}A^k\right)$$

Jadi, untuk setiap A^p tensor kontravariant rank satu, divergensi dari tensor A^p adalah

$$div\ A^p = A^p{}_{;p} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{g}A^k\right).$$

8. Misalkan A_p dan A_q merupakan tensor kovariant rank satu. Dengan menggunakan differensial kovariant terhadap masing-masing tensor diperoleh

$$A_{p;q} = \frac{\partial A_p}{\partial x_q} - \Gamma^r_{pq}A_r \text{dan} A_{q;p} = \frac{\partial A_q}{\partial x_p} - \Gamma^r_{qp}A_r \qquad \dots (10)$$

Berdasarkan persamaan (10), maka diperoleh

$$A_{p;q} - A_{q;p} = \frac{\partial A_p}{\partial x_q} - \Gamma_{pq}^r A_r - \left(\frac{\partial A_q}{\partial x_p} - \Gamma_{qp}^r A_r\right)$$

$$= \frac{\partial A_p}{\partial x_q} - \Gamma_{pq}^r A_r - \frac{\partial A_q}{\partial x_p} + \Gamma_{qp}^r A_r$$

$$= \frac{\partial A_p}{\partial x_q} - \frac{\partial A_q}{\partial x_p} - \Gamma_{pq}^r A_r + \Gamma_{qp}^r A_r$$

$$= \frac{\partial A_p}{\partial x_q} - \frac{\partial A_q}{\partial x_p}$$

Jadi, untuk setiap dua tensor kovariant rank satu dan berlaku differensial kovariant terhadap kedua tensor tersebut, maka curl dari A_p adalah

$$\mathrm{curl} A_p = A_{p;q} - A_{q;p} = \frac{\partial A^p}{\partial x_q} - \frac{\partial A^q}{\partial x_p}$$

9. Misalkan ψ adalah suatu invariant, diketahui bahwa gradien dari ψ adalah $\nabla\psi = \mathrm{grad}\ \psi = \frac{\partial\psi}{\partial x_r}$, juga tensor kovariant rank satu didefinisikan sebagai differensial kovariant dari ψ, katakanlah $\psi_{;r}$. Tensor kontravariant rank satu yang dihubungkan dengan $\psi_{;r}$ adalah $A^k = g^{kr}\frac{\partial\psi}{\partial x_r}$. Berdasarkan pembuktian sifat no 6. diatas diperoleh bahwa

$$\nabla^2\psi = div\left(g^{kr}\frac{\partial\psi}{\partial x_r}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(\sqrt{g}g^{kr}\frac{\partial\psi}{\partial x_r}\right)$$

2. Differensial Intrinsik

Misalkan $u^a = u^a(t)$ dinotasikan sebagai persamaan parametrik dari suatu kurva pada permukaan yang didefinisikan oleh persamaan parametrik $x^i = x^i(u^1, u^2)$, maka dapat menyatakan kurva permukaan dalam geometri ruang karena permukaan kurva dapat direpresentasikan dalam koordinat ruang yang melalui persamaan $x^i = x^i\left(u^1(t), u^2(t)\right) = x^i(t)$. Ingat kembali bahwa untuk $x^i = x^i(t)$ sebarang kurva C, maka differensial intrinsik dari suatu vetor A^i sepanjang C didefinisikan sebagai inner product dari differensial kovariant dengan tangent vetor pada C.

Definisi 3.12.4

Misalkan $A^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m}$ adalah sebarang tensor campuran, maka differensial intrinsik pada tensor terhadap parameter t adalah

$$\frac{\delta A^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m}}{\delta t} = A^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m;r}\frac{dx_r}{dt}.$$

Untuk differensial intrinsik orde dua pada tensor terhadap parameter t adalah

$$\frac{\delta^2 A^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m}}{\delta t^2} = A^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m;r_1r_2}\frac{dx_{r_1}}{dt}\frac{dx_{r_2}}{dt} + A^{p_1p_2\cdots p_n}_{q_1q_2\cdots q_m;r_1}\left(\frac{dx_r}{dt}\right)_{;r_2}\frac{dx_{r_2}}{dt}$$

3.12.5 Sifat-sifat Differensial Kovariant

Teorema 3.12.5

Misalkan A^p dan B^q adalah tensor kontravariant rank satu,g^{pq} adalah tensor metrik rank dua dan ψ adalah suatu invariant, maka berlaku sifat-sifat differensial intrinsik berikut

1. $\frac{\delta A^p}{\delta t} = \frac{dA^p}{dt} + \Gamma^p_{qr}A^q\frac{dx_r}{dt}$
2. $\frac{\delta A_p}{\delta t} = \frac{dA_p}{dt} - \Gamma^q_{pr}A_q\frac{dx_r}{dt}$
3. $\frac{\delta g^{pq}}{\delta t} = \frac{\delta g_{pq}}{\delta t} = 0$
4. $\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx_p}{dt}\right) = \frac{d^2x_p}{dt^2} + \Gamma^p_{qr}\frac{dx_q}{dt}\frac{dx_r}{dt}$

5. $\frac{\delta}{\delta t}(A^p \pm B^p) = \frac{\delta}{\delta t}A^p \pm \frac{\delta}{\delta t}B^p$

6. $\frac{\delta}{\delta t}(A^p B^q) = \left(\frac{\delta}{\delta t}A^p\right)B^q + A^p\left(\frac{\delta}{\delta t}B^q\right)$

Bukti

1. Misalkan A^p sebarang tensor kontravariant rank satu. Sehingga differensial intrinsik pada A^p terhadap parameter t adalah

$$\frac{\delta A^p}{\delta t} = A^p{}_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial A^p}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rq}A^q\right)\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{\partial A^p}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dt} + \Gamma^p_{rq}A^q\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{dA^p}{dt} + \Gamma^p_{rq}A^q\frac{dx_r}{dt}$$

Jadi, untuk setiap tensor kontravariant rank satu, differensial intrinsik pada tensor A^p terhadap parameter $t$adalah

$$\frac{\delta A^p}{\delta t} = \frac{dA^p}{dt} + \Gamma^p_{qr}A^q\frac{dx_r}{dt}$$

2. Misalkan A_p sebarang tensor kovariant rank satu. Sehingga differensial intrinsik pada tensor A_p terhadap parameter t adalah

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} = A_{p;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial A_p}{\partial x_r} - \Gamma^q_{pr}A_q\right)\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{\partial A_p}{\partial x_r}\frac{dx_r}{dt} - \Gamma^q_{pr}A_q\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{dA_p}{dt} - \Gamma^q_{pr}A_q\frac{dx_r}{dt}$$

Jadi, untuk setiap tensor kovariant rank satu, differensial intrinsik pada tensor A_p terhadap parameter $t$adalah

$$\frac{\delta A_p}{\delta t} = \frac{dA_p}{dt} - \Gamma^{q}_{pr} A_q \frac{dx_r}{dt}$$

3. Akan ditunjukkan $\frac{\delta g^{pq}}{\delta t} = \frac{\delta g_{pq}}{\delta t} = 0$. Berdasarkan sifat differensial kovariant, yaitu $g^{pq}{}_{;r} = 0$ dan $g_{pq;r} = 0$, serta definisi differensial intrinsik, mengakibatkan

$$\frac{\delta g^{pq}}{\delta t} = \left(g^{pq}{}_{;r}\right)\frac{dx_r}{dt} = 0$$

$$\frac{\delta g_{pq}}{\delta t} = \left(g_{pq;r}\right)\frac{dx_r}{dt} = 0$$

4. Misalkan $\frac{x_p}{dt}$ adalah differensial x_p terhadap parameter t. Sehingga jika bentuk $\frac{dx_p}{dt}$ didifferensial-intrinsikkan menjadi

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{dx_p}{dt}\right) = \left(\frac{dx_p}{dt}\right)_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(\frac{d^2 x_p}{dt dx_r} + \Gamma^{p}_{qr}\frac{dx_p}{dt}\right)\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{d^2 x_p}{dt^2} + \Gamma^{p}_{qr}\frac{dx_q}{dt}\frac{dx_r}{dt}$$

5. Misalkan A^p dan B^p merupakan tensor kontravariant rank satu. Sehingga differensial intrinsik pada penjumlahan maupun pengurangan kedua tensor tersebut terhadap parameter t adalah

$$\frac{\delta}{\delta t}(A^p \pm B^p) = (A^p \pm B^p)_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(A^p{}_{;r} \pm B^p{}_{;r}\right)\frac{dx_r}{dt}$$

$$= A^{p}{}_{;r}\frac{dx_r}{dt} \pm B^{p}{}_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{\delta}{\delta t}A^p \pm \frac{\delta}{\delta t}B^p$$

Jadi, untuk setiap penjumlahan maupun pengurangan dua tensor kontravariant rank satu, maka bentuk differensial intrinsik terhadap parameter t adalah

$$\frac{\delta}{\delta t}(A^p \pm B^p) = \frac{\delta}{\delta t}A^p \pm \frac{\delta}{\delta t}B^p$$

6. Misalkan A^p dan B^q masing-masing adalah tensor kontravariant rank satu. Sehingga bentuk differensial intrinsik pada perkalian dua tensor tersebut terhadap parameter t adalah

$$\frac{\delta}{\delta t}(A^pB^q) = (A^pB^q)_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(A^{p}{}_{;r}B^q + A^pB^{q}{}_{;r}\right)\frac{dx_r}{dt}$$

$$= A^{p}{}_{;r}B^q\frac{dx_r}{dt} + A^pB^{q}{}_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= A^{p}{}_{;r}\frac{dx_r}{dt}B^q + A^pB^{q}{}_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(\frac{\delta}{\delta t}A^p\right)B^q + A^p\left(\frac{\delta}{\delta t}B^q\right)$$

Jadi, untuk setiap perkalian dua tensor kontravariant rank satu, maka differensial intrinsik terhadap parameter t berbentuk

$$\frac{\delta}{\delta t}(A^pB^q) = \left(\frac{\delta}{\delta t}A^p\right)B^q + A^p\left(\frac{\delta}{\delta t}B^q\right)$$

Hubungan antara differensial kovariant dengan differensial intrinsik adalah sebagai berikut. MisalkanA^p sebarang tensor kontravariant rank satu, sehingga

$$\left(\frac{\delta}{\delta t}A^p\right)_{;q} = \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{\delta}{\delta t}A^p\right) + \Gamma^p_{qr}\frac{\delta}{\delta t}A^r$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_q}\left(A^p{}_{;r}\frac{dx_r}{dt}\right) + \Gamma^p_{qr}\left(A^r{}_{;s}\frac{dx_s}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\left(\frac{\partial A^p}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rl}A^l\right)\frac{dx_r}{dt}\right) + \Gamma^p_{qr}\left(\left(\frac{\partial A^r}{\partial x_s} + \Gamma^r_{sl}A^l\right)\frac{dx_s}{dt}\right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_q}\left(\frac{dA^p}{dt} + \Gamma^p_{rl}A^l\frac{dx_r}{dt}\right) + \Gamma^p_{qr}\left(\frac{dA^r}{dx_s} + \Gamma^r_{sl}A^l\frac{dx_s}{dt}\right) \quad \ldots (11)$$

Selanjutnya pehatikan persamaan berikut

$$\frac{\delta}{\delta t}(A^p{}_{;q}) = (A^p{}_{;q})_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial A^p}{\partial x_q} + \Gamma^p_{qs}A^s\right)_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial A^p{}_{;q}}{\partial x_r} + \Gamma^p_{rs}A^r{}_{;q} - \Gamma^s_{rq}A^p{}_{;s}\right)\frac{dx_r}{dt} \quad \ldots (12)$$

Dari persamaan (11) dan (12) diperoleh bahwa differensial kovariant dengan differensial intrinsik tidaklah bersifat komutatif satu sama lain. Artinya

$$\left(\frac{\delta}{\delta t}A^p\right)_{;q} \neq \frac{\delta}{\delta t}(A^p{}_{;q}).$$

Pada differensial intrinsik tidak memiliki sifat komutatif, sebab: misalkan t dan v masing-masing adalah sebarang parameter, maka untuk parameter t berlaku

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta A^p}{\delta v}\right) = \left(\frac{\delta A^p}{\delta v}\right)_{;r}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\delta A^p}{\delta v}\right) + \Gamma^p_{rs}\frac{\delta A^s}{\delta v}\right)\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\delta A^p}{\delta v}\right)\frac{dx_r}{dt} + \Gamma^p_{rs}\frac{\delta A^s}{\delta v}\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(A^p_{;r}\frac{dx_r}{dv}\right)\frac{dx_r}{dt} + \Gamma^p_{rs}\left(A^p_{;r}\frac{dx_r}{dv}\right)\frac{dx_r}{dt}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(A^p_{;r}\frac{dx_r}{dv}\right) + \Gamma^p_{rs}A^p_{;r}\frac{d^2x_r}{dvdt} \quad \dots (13)$$

Sedangkan untuk parameter v berlaku

$$\frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta A^p}{\delta t}\right) = \left(\frac{\delta A^p}{\delta t}\right)_{;r}\frac{dx_r}{dv}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\delta A^p}{\delta t}\right) + \Gamma^p_{rs}\frac{\delta A^s}{\delta t}\right)\frac{dx_r}{dv}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(\frac{\delta A^p}{\delta t}\right)\frac{dx_r}{dv} + \Gamma^p_{rs}\frac{\delta A^s}{\delta t}\frac{dx_r}{dv}$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_r}\left(A^p_{;r}\frac{dx_r}{dt}\right)\frac{dx_r}{dv} + \Gamma^p_{rs}\left(A^p_{;r}\frac{dx_r}{dt}\right)\frac{dx_r}{dv}$$

$$= \frac{d}{dv}\left(A^p_{;r}\frac{dx_r}{dt}\right) + \Gamma^p_{rs}A^p_{;r}\frac{d^2x_r}{dtdv} \quad \dots (14)$$

Sehingga dari persamaan (13) dan (14) diperoleh bahwa

$$\frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\delta A^p}{\delta v}\right) \neq \frac{\delta}{\delta v}\left(\frac{\delta A^p}{\delta t}\right).$$

3.13 Persamaan Geodesik

Pada ruang Euclid, jarak terpendek antara dua titik adalah suatu garis lurus. Pada bagian ini akan dibahas mengenai generalisasi pengertian jarak terpendek di antara dua titik dalam suatu ruang Riemann. Untuk sistem koordinat umum di x^i pada dimensi-n ($= 1, 2, \dots, n$), persamaan goedesik (garis terpendek antara dua titik) diberikan oleh

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \sum \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{ds}\frac{dx^k}{ds} = 0$$

penjumlahan pada indeks-indeks $j, k = 1, 2, \dots, n$, dimana s adalah panjang busur dan Γ^i_{jk} adalah simbol Christoffel dari jenis kedua.

Untuk kasus bagaimana persamaan geodesik untuk koordinat cartesius di ruang Euclid, jika koeffisien jaraknya konstan; maka turunannya nol, dan simbol Christoffel juga nol. Akibatnya, persamaan geodesiknya berbentuk

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} = 0$$

untuk solusi adalah $x^i = a^i s + b^i$ (garis lurus). Sebarang sistem koordinat yang simbol-simbol Christoffelnya $\Gamma^i_{jk} = 0$ adalah sistem koordinat geodesik.

3.14 Curvature Tensor

Definisi 3.14.1

Jika Γ^i_{jk} simbol Christoffel pada R^n dan

$$\mathcal{R}^i_{\alpha jk} = \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha k}}{\partial x^j} - \frac{\partial \Gamma^i_{\alpha j}}{\partial x^k} + \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma^\beta_{\alpha k}\Gamma^i_{\beta j} - \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma^\beta_{\alpha j}\Gamma^i_{\beta k}$$

maka $\mathcal{R}^i_{\alpha jk}$ disebut sebagai Riemann-Christoffel tensor, yang lebih dikenal dengan nama curvature tensor.

Kasus khusus, jika suatu ruang yang memiliki curvature tensor nol atau $\mathcal{R}^i_{\alpha jk} = 0$, maka ruang tersebut dikatakan sebagai ruang Euclid.

Definisi 3.14.2

Misalkan $\mathcal{R}^\alpha_{ijk}$ sebarang curvature tensor. Jika $\mathcal{R}^\alpha_{ijk}$ dikontraksi terhadap salah satu indeksnya misalkan terhadap indeks α dan j sehingga berlaku

$$\mathcal{R}^{\alpha}_{i\alpha k} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ik}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}}{\partial x^{k}} + \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma^{\beta}_{ik}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha} - \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\Gamma^{\alpha}_{\beta k}$$

Jika dikontraksi terhadap indeks α dan k sehingga berlaku

$$\mathcal{R}^{\alpha}_{ij\alpha} = \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{i\alpha}}{\partial x^{j}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^{\alpha}} + \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma^{\beta}_{i\alpha}\Gamma^{i}_{\beta j} - \sum_{\beta=1}^{n} \Gamma^{\beta}_{ij}\Gamma^{\alpha}_{\beta\alpha}$$

Maka curvature tensor $\mathcal{R}^{\alpha}_{ijk}$ disebut Ricci tensor dan dinotasikan sebagai $\mathcal{R}_{ij}$.

Definisi 3.15.3

Misalkan $\mathcal{R}_{ij}$ adalah suatu Ricci tensor dan g^{ij} adalah tensor metrik kontravariant rank dua, maka curvature skalar didefinisikan sebagai

$$\mathcal{R} = \sum g^{ij}\mathcal{R}_{ij}$$

Sedangkan, jika $\mathcal{R}^{\alpha}_{ijk}$ adalah suatu curvature tensor dan $g_{h\alpha}$ adalah tensor metrik kovariant rank satu, maka curvature tensor kovariant didefinisikan sebagai

$$\mathcal{R}_{hijk} = \sum_{\alpha=1}^{n} g_{h\alpha}\mathcal{R}^{\alpha}_{ijk}.$$

3.15 Tensor Relatif

Tensor-tensor yang telah dipelajari pada subbab-subbab sebelumnya merupakan jenis-jenis tensor mutlak atau yang lebih dikenal dengan tensor mutlak. Pada bagian ini akan dibahas mengenai tensor relatif yang ditransformasikan dari $\mathbb{R}^n$ ke $\mathbb{R}^n$.

Definisi 3.15.1

Suatu fungsi $R^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m}$ dari $\mathbb{R}^n$ terhadap sistem koordinat $\overline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ disebut tensor relatif yag mempunyai bobot w, jika terhadap transformasi koordinat dari $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, fungsi $R^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m}$ bertransformasi berdasarkan persamaan

$$\overline{R}^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m} = \left|\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}\right|^w \frac{\partial \overline{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{p_n}}{\partial x^{r_n}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \overline{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_m}}{\partial \overline{x}^{q_m}} R^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m} \quad \dots (*)$$

dimana $\left|\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}\right|$ adalah determinan Jacobi untuk transformasi pada persamaan (*) yang didefinisikan sebagai berikut

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \overline{x}}\right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^1} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^1}{\partial \overline{x}^n} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial \overline{x}^n} \end{vmatrix}$$

Berdasarkan definisi tensor relatif diatas dapat disimpulkan bahwa suatu tensor mutlak dapat diasumsikan sebagai tensor relatif dengan bobot $w = 0$.

3.15.2 Sifat-sifat Tensor Relatif

Berikut ini akan dijelaskan sifat-sifat tensor relatif yang biasa digunakan dalam bidang matematika maupun bidang fisika.

Teorema 3.15.2 Sifat-sifat tensor relatif

a. *Jika $A^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m}$ dan $B^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m}$ adalah sebarang tensor relatif dengan bobot w, maka berlaku*

$$C^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m} = A^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m} \pm B^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m}$$

dimana $C^{p_1 \cdots p_n}_{q_1 \cdots q_m}$ adalah sebuah tensor relatif juga dengan bobot w.

Bukti:

Misalkan $A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}$ dan $B^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}$ adalah sebarang tensor relatif dengan bobot w di $\mathbb{R}^n$. Sekarang perhatikan $A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m} \pm B^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}$

$$
\begin{aligned}
A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m} \pm B^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m} &= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{p_n}}{\partial x^{r_n}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_m}}{\partial \bar{x}^{q_m}} A^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m} \\
&\quad \pm \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{p_n}}{\partial x^{r_n}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_m}}{\partial \bar{x}^{q_m}} B^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m} \\
&= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{p_n}}{\partial x^{r_n}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_m}}{\partial \bar{x}^{q_m}} \big(A^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m} \\
&\qquad \pm B^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m}\big) \\
&= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{p_n}}{\partial x^{r_n}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_m}}{\partial \bar{x}^{q_m}} C^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m} \\
&= C^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}
\end{aligned}
$$

Jadi, untuk setiap $A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}$ dan $B^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}$ tensor relatif dengan bobot w di $\mathbb{R}^n$, maka berlaku

$$C^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m} = A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m} \pm B^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m} \quad \blacksquare$$

b. *Jika $A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}$ dan $B^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m}$ adalah tensor relatif dengan bobot masing-masing w_1 dan w_2, maka berlaku*

$$C^{p_1 r_1 \dots p_n r_n}_{q_1 s_1 \dots q_m s_m} = A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m} B^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m}$$

dimana $C^{p_1 r_1 \dots p_n r_n}_{q_1 s_1 \dots q_m s_m}$ adalah sebuah tensor relatif juga dengan bobot $(w_1 + w_2)$.

Bukti:

Misalkan $A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}$ dan $B^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m}$ adalah sebarang tensor relatif dengan bobot masing-masing w_1 dan w_2 di $\mathbb{R}^n$. Sekarang perhatikan $A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m} B^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m}$

$$A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_m}B^{r_1\cdots r_n}_{s_1\cdots s_m} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w_1}\frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{p_n}}{\partial x^{k_n}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_m}}{\partial \bar{x}^{q_m}}A^{k_1\dots k_n}_{l_1\dots l_m}$$

$$\left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w_2}\frac{\partial \bar{x}^{r_1}}{\partial\ -^{t_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{r_n}}{\partial x^{t_n}}\frac{\partial x^{v_1}}{\partial \bar{x}^{s_1}}\cdots\frac{\partial x^{v_m}}{\partial \bar{x}^{s_m}}B^{t_1\dots t_n}_{v_1\dots v_m}$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w_1+w_2}\frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{p_n}}{\partial x^{k_n}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_m}}{\partial \bar{x}^{q_m}}\frac{\partial \bar{x}^{r_1}}{\partial x^{t_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{r_n}}{\partial x^{t_n}}\frac{\partial x^{v_1}}{\partial \bar{x}^{s_1}}\cdots\frac{\partial x^{v_m}}{\partial \bar{x}^{s_m}}$$

$$A^{k_1\dots k_n}_{l_1\dots l_m}B^{t_1\dots t_n}_{v_1\dots v_m}$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w_1+w_2}\frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{k_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{p_n}}{\partial x^{k_n}}\frac{\partial x^{l_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}}\cdots\frac{\partial x^{l_m}}{\partial \bar{x}^{q_m}}\frac{\partial \bar{x}^{r_1}}{\partial x^{t_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{r_n}}{\partial x^{t_n}}\frac{\partial x^{v_1}}{\partial \bar{x}^{s_1}}\cdots\frac{\partial x^{v_m}}{\partial \bar{x}^{s_m}}$$

$$C^{k_1t_1\dots k_nt_n}_{l_1v_1\dots l_mv_m}$$

$$= C^{p_1r_1\dots p_nr_n}_{q_1s_1\dots q_ms_m}$$

Jadi, untuk setiap $A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_m}$ dan $B^{r_1\dots r_n}_{s_1\dots s_m}$ tensor relatif dengan bobot masing-masing w_1 dan w_2 di $\mathbb{R}^n$, maka berlaku

$$C^{p_1r_1\dots p_nr_n}_{q_1s_1\dots q_ms_m} = A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_m}B^{r_1\dots r_n}_{s_1\dots s_m} \quad \blacksquare$$

c. *Misalkan $A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_m}$ adalah suatu tensor relatif dengan bobot w, jika $A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_m}$ dikontraksi maka berlaku*

$$A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_{m-1}p_n} = A^{p_1\cdots p_{n-1}}_{q_1\cdots q_{m-1}}$$

dimana $A^{p_1\cdots p_{n-1}}_{q_1\cdots q_{m-1}}$ adalah suatu tensor relatif juga dengan bobot w, tetapi memiliki rank kontravariant $n-1$ dan rank kovariant $m-1$.

Bukti:

Misalkan $A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_m}$ adalah sebarang tensor relatif dengan bobot w di $\mathbb{R}^n$. Jika $A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_m}$ dikontraksi, misalkan terhadap indeks p_n maka

$$A^{p_1\cdots p_n}_{q_1\cdots q_{m-1}p_n} = \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w}\frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}}\cdots\frac{\partial \bar{x}^{p_n}}{\partial x^{r_n}}\frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}}\cdots\frac{\partial x^{s_m}}{\partial \bar{x}^{p_n}}A^{r_1\dots r_n}_{s_1\dots s_m}$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{p_{n-1}}}{\partial x^{r_{n-1}}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_{m-1}}}{\partial \bar{x}^{q_{m-1}}} \frac{\partial x^{s_m}}{\partial x^{r_n}} A^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m}$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{p_{n-1}}}{\partial x^{r_{n-1}}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_{m-1}}}{\partial \bar{x}^{q_{m-1}}} \delta^{s_m}_{r_n} A^{r_1 \dots r_n}_{s_1 \dots s_m}$$

$$= \left|\frac{\partial x}{\partial \bar{x}}\right|^{w} \frac{\partial \bar{x}^{p_1}}{\partial x^{r_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{p_{n-1}}}{\partial x^{r_{n-1}}} \frac{\partial x^{s_1}}{\partial \bar{x}^{q_1}} \cdots \frac{\partial x^{s_{m-1}}}{\partial \bar{x}^{q_{m-1}}} A^{r_1 \dots r_{n-1}}_{s_1 \dots s_{m-1}}$$

$$= A^{p_1 \dots p_{n-1}}_{q_1 \dots q_{m-1}}$$

Jadi, untuk setiap $A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_m}$ tensor relatif dengan bobot w di $\mathbb{R}^n$, dikontraksi terhadap indeks p_n, berlaku

$$A^{p_1 \dots p_n}_{q_1 \dots q_{m-1} p_n} = A^{p_1 \dots p_{n-1}}_{q_1 \dots q_{m-1}} \qquad \blacksquare$$