BAB III
INTEGRATED GENERALIZED AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROCEDASTICITY (IGARCH)

3.1 Proses IGARCH

Saat mengestimasi model GARCH, sering ditemukan bahwa jumlah koefisien parameter selalu sama dengan atau mendekati satu. Kasus tersebut mengindikasikan bahwa data yang akan digunakan untuk mengestimasi parameter mengalami permasalahan dalam hal kestasioneran.

Engle dan Bollerslev (1986) melakukan pengembangan kembali terhadap model GARCH dengan memperkenalkan *Integrated* GARCH atau IGARCH. *Integrated* disini dimaksudkan bahwa kemungkinan terdapat masalah akar unit yang dapat mengakibatkan ketidakstasioneran. Oleh karena itu IGARCH memiliki solusi stasioner untuk variansi yang tak hingga. Sehingga IGARCH dapat digunakan apabila dalam data yang digunakan untuk peramalan mengalami permasalahan dalam hal kestasioneran, yaitu ketika jumlah koefisien GARCH sama dengan satu.

Bentuk umum dari model IGARCH adalah

$$\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{p} \alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \qquad (3.1.1)$$

dengan

$y_t = \mu x_t + a_t$

$a_t = \sigma_t z_t$

$z_t = iid(0,1)$

$\alpha_i > 0$ dan $\beta_j > 0$

$i = 1,2, \dots, p$ dan $j = 1,2, \dots, q$.

$\sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \sum_{j=1}^{q} \beta_j = 1$

Parameter yang akan diestimasi adalah α_i, dan β_j. Jumlah parameter α_i dan β_j sama dengan satu merupakan syarat yang menunjukkan bahwa parameter yang akan diestimasi memiliki masalah ketidakstasioneran.

3.2 Proses IGARCH (1,1)

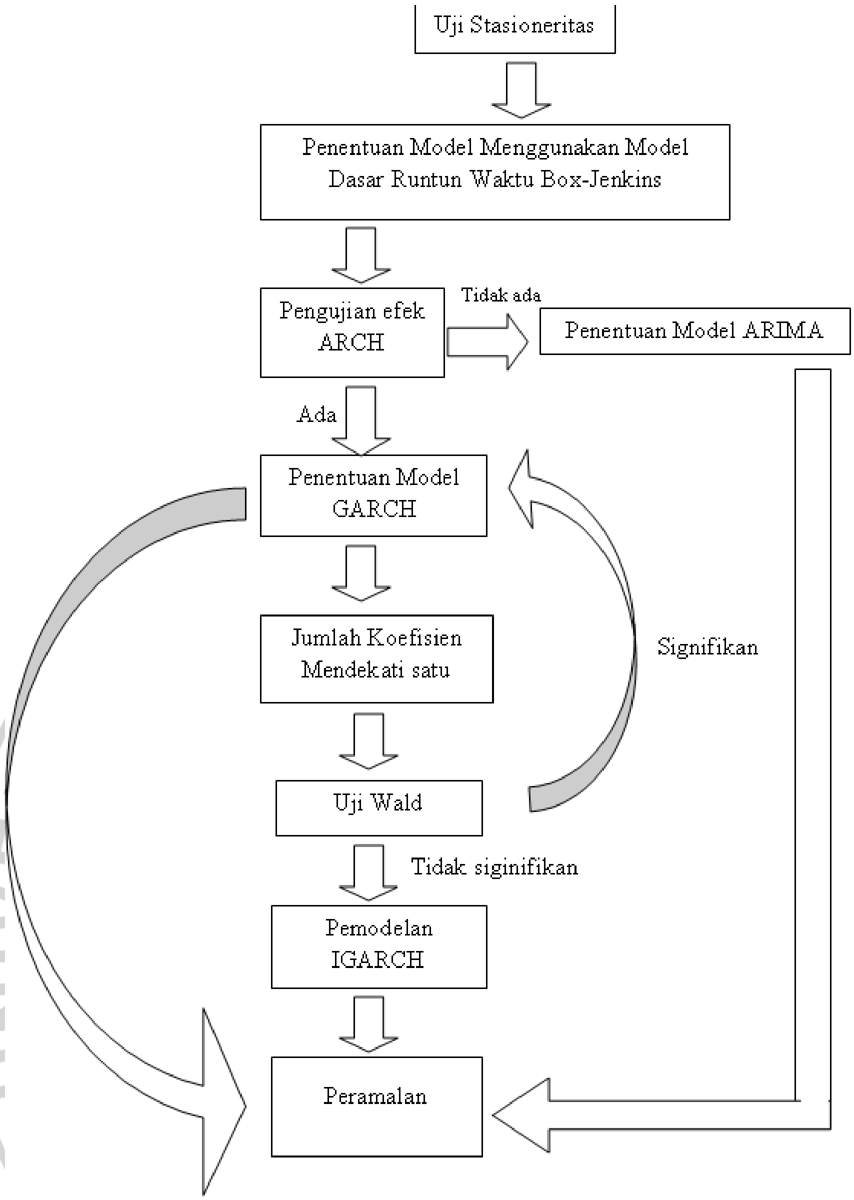
Proses IGARCH yang paling sederhana adalah proses IGARCH (1,1). Misalkan Z_t adalah suatu runtun waktu dengan data observasi $z_1, z_2, \dots, z_t$. I_t merupakan himpunan informasi yang diketahui pada waktu *t*. Proses z_t dikatakan mengikuti proses IGARCH (1,1) jika dipenuhi

$$\sigma_t^2 = (1 - \beta_1) a_{t-1} + \beta_1 \sigma_{t-1}^2 \qquad (3.2.1)$$

dengan $0 < \beta_1 < 1$

3.3 Proses Pembentukan Model IGARCH

Sebelum suatu data runtun waktu dimodelkan ke dalam model IGARCH, terlebih dahulu harus dilakukan langkah-langkah pembentukan model. Langkah-langkah untuk membentuk model IGARCH adalah sebagai berikut :



3.4 Identifikasi Model

Identifikasi model yang biasa dilakukan dalam runtun waktu homoskedastisitas adalah dengan menggunakan fak dan fakp. Tapi, hingga saat ini belum ada alat yang dapat digunakan untuk mengidentifikasi model IGARCH. Oleh karena itu, dalam tugas akhir ini digunakan model IGARCH sederhana yaitu IGARCH (1,1), IGARCH (1,2), IGARCH (2,1), IGARCH (2,2).

3.5 Estimasi Parameter Model

Parameter α_i dan β_j akan diestimasi dengan menggunakan metode maksimum likelihood. Dengan mengasumsikan a_t berdistribusi normal dan I_t adalah informasi yang diketahui untuk waktu *t* maka distribusi bersyarat untuk a_t adalah

$$a_t | I_{t-1} \sim N(0, \sigma^2)$$

dengan fungsi kepadatan peluang

$$fkp = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} e^{\frac{(y_t - \mu x_t)^2}{2\sigma_t^2}}$$

Misalkan L_t menyatakan suatu fungsi makimum likelihood untuk observasi ke-*t* dan ukuran sampel dinyatakan dengan T, maka

$$L_t = \prod_{t=1}^{T} f\left(\varepsilon_t \middle| I_{t-1}\right) = (2\pi)^{-\frac{T}{2}} \prod_{i=1}^{T} (\sigma_t^2)^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left(\frac{a_t}{\sigma_t}\right)^2} \qquad (3.5.1)$$

$$\ell_t = lnL_t = -\frac{1}{2}\left(Tln(2\pi) + \sum_{t=1}^{T} ln(\sigma_t^2) + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{a_t}{\sigma_t}\right)^2\right) \qquad (3.5.2)$$

Dalam hal ini parameter yang tidak diketahui termuat dalam η, dimana $\eta = (\alpha_i, \beta_j)$ adalah vektor dari parameter yang akan diestimasi. Kemudian dengan menggunakan aturan rantai, turunan fungsi log likelihood terhadap η diperoleh

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(-\frac{1}{2}\left(Tln(2\pi) + \sum_{t=1}^{T} ln(\sigma_t^2) + \sum_{t=1}^{T}\left(\frac{a_t}{\sigma_t}\right)^2\right)\right) \qquad (3.5.3)$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_t^2}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\left(\frac{2a\frac{\partial a_t}{\partial \eta}\sigma_t^2 - a_t^2\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}}{\sigma_t^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} - \frac{a_t}{\sigma_t^2}\frac{\partial a_t}{\partial \eta} + \frac{a_t^2}{2\sigma_t^4}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}$$

$$= \frac{a_t}{\sigma_t^2}\frac{\partial a_t}{\partial \eta} - \frac{1}{2\sigma_t^4}(\sigma_t^2 - a_t^2)\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} \qquad (3.5.4)$$

Penyelesaian akhir yang diinginkan adalah memperoleh $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}$. Untuk memperoleh $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}$, tahapan-tahapan yang harus dilakukan, yaitu:

1. Tahap pertama, turunkan σ_t^2 terhadap α_i

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \alpha_i}\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j \sigma_{t-j}^2\right)$$

2. Tahap kedua, turunkan σ_t^2 terhadap β_j

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \beta_j}\left(\sum_{i=1}^{p}\alpha_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q}\beta_j \sigma_{t-j}^2\right)$$

Untuk menemukan pendekatan estimasi parameter maka digunakan metode iteratif. Algoritma optimasi untuk iterasi dimulai dari suatu nilai awal, misalkan η_0. Kemudian η_0 digunakan untuk mencari η_1. Proses iteratif dilakukan sampai diperoleh jarak yang kecil antara $\hat{\eta}_{t-1}$ dan $\hat{\eta}_1$. Ada tiga metode iteratif yang dapat digunakan yaitu metode Newton-Raphson, *Method of Scoring*, atau iterasi Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH).

3.5.1 Metode Newton Raphson

Secara umum metode Newton-Raphson melakukan aproksimasi dengan deret Taylor orde kedua untuk fungsi likelihood disekitar nilai awal, yaitu η_0

$$\ell_t = \ell_t|_{\eta_0} + \left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0} (\eta - \eta_0) + \frac{1}{2}(\eta - \eta_0)' \left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_0} (\eta - \eta_0) \qquad (3.5.1.1)$$

Untuk memperoleh kondisi optimum, fungsi di atas diturunkan terhadap parameter η

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta} = 0 + \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right] + \left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_0} (\eta - \eta_0) = 0 \qquad (3.5.1.2)$$

Berdasarkan kedua persamaan di atas, secara implisit dapat ditaksir η_1

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \ell_t}{\partial \eta} = \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right] + \left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_0} (\eta_1 - \eta_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right] = -\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_0} (\eta_1 - \eta_0)$$

$$\Leftrightarrow -\left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right]\left[\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right]^{-1} = (\eta_1 - \eta_0)$$

$$\Leftrightarrow \eta_1 = \eta_0 - \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right]\left[\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right]^{-1}$$

Sehingga diperoleh bentuk umumnya yaitu :

$$\eta_{m+1} = \eta_m - \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_m}\right]\left[\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_m}\right]^{-1}$$

3.5.2 *Method of Scoring*

Pada *Method of Scoring*, algoritma iterasi menggunakan nilai ekspektasi dari fungsi likelihood. Algoritmanya dinyatakan sebagai berikut :

$$\eta_{m+1} = \eta_m + \left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\bigg|_{\eta_m}\right]\left[E\left(\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right)\bigg|_{\eta_m}\right)\right]^{-1} \quad (3.5.2.1)$$

atau

$$\eta_{m+1} = \eta_m - P_m\left[\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\bigg|_{\eta_m}\right]$$

dengan

$$P_m = \left[-E\left(\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right)\bigg|_{\eta_m}\right)\right]^{-1}$$

3.5.3 Iterasi Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH)

Metode ini mengeksploitasi algoritma iterasi dari *Method of Scoring*. Bagian yang dieksploitasi adalah P_m dari *Method of Scoring* menjadi bentuk

$$P_m = \left[-E\left(\left(\frac{\partial^2(\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_N}{\partial \eta \partial \eta'}\right)\bigg|_{\eta_m}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[-E\left(\left(\frac{\partial^2 \sum_{t=1}^{N} \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right)\bigg|_{\eta_m}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[-E\left(\left(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right)\bigg|_{\eta_m}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[-\sum_{t=1}^{N} E\left(\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right)\bigg|_{\eta_m}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[-NE\left(\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right)\bigg|_{\eta_m}\right)\right]^{-1}$$

$$= \left[-N \frac{1}{N} \left(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'} \right)_{\eta_m} \right]^{-1}$$

akhirnya diperoleh

$$P_m = \left[-\left(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'} \right)_{\eta_m} \right]^{-1} \tag{3.5.3.1}$$

Bentuk umum dari skema iterasi BHHH hampir sama dengan *Method of Scoring* seperti pada persamaan (3.5.2.1), yang membedakannya adalah persamaan P_m. Sehingga bentuk umum dari iterasi BHHH adalah

$$\eta_{m+1} = \eta_m + P_m = \left[-\left(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'} \right)_{\eta_m} \right]^{-1}$$

Dari ketiga metode iteratif yang ada, metode yang digunakan untuk menemukan pendekatan estimasi parameter dalam Tugas Akhir ini adalah iterasi Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH). Untuk selanjutnya perhitungan akan dilakukan dengan bantuan *software* Eviews 6.0

3.6 Verifikasi Model

3.6.1 Uji Berdasarkan Keberartian Koefisien

Pada pengujian berdasarkan pengujian keberartin koefisien, uji stastistik dilakukan dengan melihat nilai probabilitas dari masing-masing koefisien, dengan hipotesis :

H_0 : koefisien tidak berpengaruh secara siginifikan terhadap model

H_1 : koefisien berpengaruh secara siginifikan terhadap model

Kriteria uji :

Tolak H_0 jika probabilitas < α

3.6.2 Uji Perbandingan Nilai *Scwartz Information Criteria* (SIC) dan *Akaike Information Criteria* (AIC)

Kriteria pengujian dengan membandingkan nilai AIC dan SIC pada model GARCH sama seperti kriteria perbandingan nilai AIC dan SIC model Box-Jenkis yang telah dibahas pada bab sebelumnya.

3.7 Peramalan

Langkah terakhir dalam pembentukan model adalah melakukan peramalan untuk beberapa periode selanjutnya. Berdasarkan model yang paling sesuai, akan ditentukan distribusi bersyarat yang akan datang berdasarkan pola data di masa lalu.

Untuk kasus IGARCH(p,q), peramalan optimal *h*-tahap dari varian bersyarat, yaitu $\hat{\sigma}_{t+h|t}$ diberikan oleh $\sigma_t^2 = \sum_{i=1}^{p} \hat{\alpha}_i a_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \hat{\beta}_j a_{t-j}$