BAB III
PERLUASAN INTEGRAL

Pembahasan pada bab ini termuat pada ruang lingkup perluasan uniter atas suatu ring komutatif. Jika R adalah suatu ring, maka yang dimaksud adalah suatu ring yang komutatif dan memiliki elemen identitas. Pada bab ini terdapat suatu hal yang analog dengan konsep aljabar, yaitu integral. Perluasan integral dan sifat-sifatnya merupakan konsep utama yang akan dibahas pada Tugas Akhir ini. Selain itu, juga akan digunakan konsep-konsep yang telah diberikan pada bab sebelumnya.

Definisi 3.1

Misalkan S adalah suatu perluasan uniter dari ring R. Suatu $s \in S$ disebut integral atas R jika $p(s) = 0$, untuk suatu polinomial monik tak nol $p \in R[X]$.

Selanjutnya, apabila setiap elemen dari S adalah integral atas R, maka S disebut suatu perluasan integral. Hal ini dijelaskan pada definisi berikut.

Definisi 3.2

Misalkan S adalah suatu perluasan dari ring R. S adalah integral atas R jika setiap elemen dari S merupakan integral atas R.

Sekarang, perhatikan bahwa untuk setiap $r \in R$ pastilah integral atas R, karena ada suatu polinomial monik $p \in R[X]$, di mana

$$p(X) = X - r,$$

sedemikian sehingga

$$p(r) = r - r = 0.$$

Selanjutnya, jika R adalah suatu *field* dan S adalah perluasan *field* dari R, maka $s \in S$ integral atas R jika dan hanya jika s adalah aljabar atas R. Berikut adalah buktinya.

($\Rightarrow$) Misalkan $s \in S$ adalah integral atas R. Akan dibuktikan s aljabar atas R. Karena s integral atas R, maka ada suatu polinomial monik taknol $p \in R[X]$, sedemikian sehingga $p(s) = 0$. Jelaslah, dari definisi aljabar dapat disimpulkan bahwa s adalah bilangan aljabar atas R.

($\Leftarrow$) Misalkan $s \in S$ adalah aljabar atas R. Artinya, ada $0 \neq p \in R[X]$ dengan $p(s) = 0$. Akan ditunjukkan s integral atas R. Harus ditunjukkan ada polinomial monik taknol $q \in R[X]$ sedemikian sehingga $q(s) = 0$.

Misalkan

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0.$$

Karena s aljabar atas R, diperoleh

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Karena $a_0, a_1, \ldots, a_n$ masing-masing elemen dari *field* R, maka ada $(a_n)^{-1} \in R$ yang merupakan invers dari a_n, sehingga diperoleh

$$a_n (a_n)^{-1} s^n + a_{n-1} (a_n)^{-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n)^{-1} = 0$$

$$s^n + a_{n-1} (a_n)^{-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n)^{-1} = 0 \qquad \ldots(1)$$

Ini berarti s merupakan integral atas R untuk suatu polinomial monik $q \in R[X]$, di mana

$$q(X) = X^n + a_{n-1} (a_n)^{-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n)^{-1}.$$

Sehingga, dapat disimpulkan bahwa jika R adalah suatu *field* dan S adalah perluasan *field* dari R, maka $s \in S$ integral atas R jika dan hanya jika s adalah bilangan aljabar. ■

Dari penjabaran di atas, dapat diperoleh suatu kesimpulan yaitu tidak setiap aljabar adalah integral. Hal ini dapat dilihat dari polinomial yang bersesuaian dengan bilangan aljabar tersebut tidak selalu monik, kecuali dalam integral field. Namun, setiap elemen integral pastilah elemen aljabar. Hal ini dapat dilihat pada penjabaran bukti di atas.

Lemma 3.3

Jika S adalah suatu perluasan ring uniter dari ring R dan $s \in S$ adalah aljabar atas R, maka rs adalah integral atas R, di mana r adalah koefisien utama dari polinomial tak nol $p \in R[X]$, di mana $p(s) = 0$.

Bukti:

Misalkan

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in R[X].$$

Karena s aljabar atas R, maka

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0. \qquad \ldots(2)$$

Pengalian persamaan (2) dengan $(a_n)^{n-1}$ menghasilkan

$$(a_n s)^n + a_{n-1}(a_n s)^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n)^{n-1} = 0$$

Sehingga $q(a_n s) = 0$, di mana $q \in R[X]$ adalah polinomial monik dengan bentuk

$$q(X) = X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 (a_n)^{n-1}.$$

Ini menunjukkan bahwa $a_n s$ adalah integral atas R. ■

Lemma 3.4

Misalkan S adalah suatu perluasan ring uniter dari ring R dan $s \in S$ adalah aljabar atas R, maka s adalah integral atas $R\left[\frac{1}{r}\right]$ di mana r adalah koefisien utama dari polinomial taknol $p \in R[X]$.

Bukti:

Akan dibuktikan s adalah integral atas $R\left[\frac{1}{r}\right]$. Misalkan $r = a_n$ dan $p \in R[X]$, dengan

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0.$$

Karena s aljabar atas R, maka

$$p(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0 = 0. \qquad \ldots(3)$$

di mana $a_i \in R$. Pembagian persamaan (3) oleh a_n diperoleh

$$s^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} s^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} s^{n-2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n} = 0.$$

Akibatnya, s integral atas suatu polinomial monik tak nol $q \in R[X]$ di mana

$$q(X) = X^n + \frac{a_{n-1}}{a_n} X^{n-1} + \frac{a_{n-2}}{a_n} X^{n-2} + \cdots + \frac{a_0}{a_n}.$$

Artinya, s adalah integral atas $R\left[\frac{1}{r}\right]$. ■

Misalkan S adalah perluasan uniter dari ring R. R disebut tertutup secara integral (*integrally closed*) pada S jika setiap elemen S yang integral atas R adalah elemen-elemen R itu sendiri. Lebih jauh, dapat dilihat bahwa untuk setiap R yang merupakan suatu UFD (Definisi 2.1.7), sebarang elemen *field of fraction* yang integral atas R adalah elemen-elemen dari R itu sendiri. Hal ini dapat dilihat pada proposisi berikut ini.

Proposisi 3.5

Jika R adalah suatu UFD dari *field of fraction* K, maka R tertutup secara integral.

Bukti:

Misalkan r adalah elemen dari K yang merupakan suatu *field of fraction* dari R dan r integral atas R. Misalkan $r = \frac{\alpha}{\beta}$, di mana $\alpha, \beta \in R$ dengan α dan β relatif prima. Akan dibuktikan $r \in R$. Karena r integral atas R, maka diperoleh

$$r^n + a_{n-1}r^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 = 0. \qquad \ldots(4)$$

Kalikan persamaan (4) di atas dengan β^n, sehingga diperoleh

$$\alpha^n + a_{n-1}\beta\alpha^{n-1} + \cdots + a_0\beta^n = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^n = -(a_{n-1}\beta\alpha^{n-1} + \cdots + a_0\beta^n)$$

$$\Leftrightarrow \alpha^n = -\beta(a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0\beta^{n-1}).$$

Karena β tidak mungkin membagi α, maka β tidak mungkin membagi α^n. Akibatnya, β adalah elemen invers yang tentunya ada di R. Sehingga diperoleh $r = \alpha\beta^{-1} \in R$. Artinya, r elemen di R. ■

Contoh 3.6

Contoh yang paling sederhana adalah $R = \mathbb{Z}$, dimana $\mathbb{Z}$ adalah UFD. Selanjutnya, *field of fraction dari* R adalah $K = \mathbb{Q}$, maka $\mathbb{Z}$ tertutup secara integral di $\mathbb{Q}$. Jelaslah untuk setiap $\alpha \in \mathbb{Q}$, $\alpha = \frac{a}{b}$ di mana $a, b \in \mathbb{Z}$. Menurut proposisi 3.5, elemen-elemen dari $\mathbb{Q}$ yang merupakan integral atas $\mathbb{Z}$ hanyalah elemen-elemen dari $\mathbb{Z}$ itu sendiri.

Akibat 3.7

Misalkan K adalah *field of fraction* dari $R,$ di mana R adalah suatu UFD. Selanjutnya, misalkan $0 \neq p \in R[X]$ dengan $p(\alpha) = 0$, di mana $\alpha \in K$. Jika $\alpha = \frac{x}{y}$ dan $x, y \in R$ relatif prima, maka x membagi konstanta dari p dan y membagi koefisien pada variabel dengan pangkat tertinggi dari p.

Bukti:

Misalkan $u, v \in R$ masing-masing adalah koefisien utama dan konstanta dari p. Akan ditunjukkan y membagi u. Menurut Lemma 3.3, $u\alpha$ adalah integral atas R dan menurut Proposisi 3.5, $u\alpha = \frac{ux}{y} \in R$. Karena x dan y relatif prima, akibatnya haruslah y membagi u. Dengan kata lain, y membagi koefisien utama dari p. Sekarang, akan ditunjukkan x membagi v konstanta pada p. Sebelumnya, asumsikan $v = a_0 \neq 0$, karena untuk $v = a_0 = 0$ pastilah x membagi v. Misalkan $n = \deg(f)$, ambil polinomial

$$q(X) = X^n f(\tfrac{1}{X}) \in R[X].$$

Misalkan $p \in R[X]$, di mana

$$\begin{aligned} & p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \\ \Rightarrow\ & p\left(\frac{1}{X}\right) = a_n \left(\frac{1}{X}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{1}{X}\right)^{n-1} + \cdots + a_0 \\ \Rightarrow\ & q(X) = X^n f\left(\frac{1}{X}\right) = a_n + a_{n-1}X + \cdots + a_0 X^n, \end{aligned}$$

di mana $q(X)$ memiliki akar $\frac{1}{\alpha} = \frac{y}{x}$. Perhatikan bahwa x membagi $a_0 y$. Namun, karena x dan y relatif prima, maka haruslah x membagi $a_0 = v$.

Dari uraian di atas, dapat disimpulkan bahwa y membagi koefisien utama dari p dan x membagi konstanta dari p. ■

Perluasan integral juga memiliki hubungan dengan konsep *field*. Hal ini akan dijelaskan pada proposisi berikut yang akan dipakai pada bab selanjutnya pada pembahasan penerapan perluasan integral pada ideal prima.

Proposisi 3.8

Misalkan S adalah suatu perluasan dari ring R, dengan S dan R masing-masing adalah daerah integral dan S integral atas R. Maka R adalah suatu *field* jika dan hanya jika S suatu *field*.

Bukti:

($\Rightarrow$) Misalkan R adalah suatu *field*. Akan dibuktikan S adalah suatu *field*. Karena R suatu *field* dan untuk sebarang $s \in S$, $R[s]$ adalah subring dari dari S yang memuat R, maka pastilah $R[s]$ suatu daerah integral. Sekarang, misalkan $R(s)$ *field of fraction* dari $R[s]$. Selanjutnya misalkan $\frac{f(t)}{g(t)}$ sebarang elemen di $R(s)$ dengan $f(t), g(t) \in R[s]$ dan $g(t) \neq 0$. Artinya, untuk setiap polinomial tak nol $g(t) \in R[s]$, $g(t)$ adalah suatu elemen yang invertible. Dengan kata lain, $g(t)^{-1} \in R[s]$. Akibatnya, $R[s]$ suatu *field*. Sehingga untuk setiap $s \in S$, maka $s^{-1} \in S$. Artinya, S adalah suatu *field*.

($\Leftarrow$) Misalkan S adalah suatu *field*. Selanjutnya, misalkan $0 \neq s \in R$. Karena $s^{-1} \in S$, maka s^{-1} integral atas R. Sehingga, ada persamaan dengan bentuk

$$(s^{-1})^n + r_{n-1}(s^{-1})^{n-1} + \cdots + r_0 = 0,$$

dengan $r_i \in R$. Kalikan persamaan di atas dengan s^{n-1}, maka diperoleh

$$s^{-1} = -(r_{n-1} + \cdots + r_0 s^{n-1}) \in R.$$

Karena $s^{-1} \in R$, akibatnya haruslah R suatu *field*.

Dari penjabaran di atas, dapat disimpulkan bahwa R adalah suatu *field* jika dan hanya jika S suatu *field*. ■

Misalkan S adalah perluasan dari ring R dan $s \in S$. Maka, s integral atas R jika dan hanya jika $R[s]$ (subring dari S) adalah R-modul yang dibangun secara berhingga. Selanjutnya, $R[s]$ adalah R-modul yang dibangun secara berhingga jika dan hanya jika $R[s]$ dimuat di T (subring dari S) yang merupakan R-modul yang dibangun secara berhingga (wikipedia, 2010).

Teorema 3.9

Misalkan S adalah perluasan dari ring R.

(i) Jika S adalah R-modul yang dibangun secara berhingga, maka S integral atas R.

(ii) Jika $S = R[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ dengan $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ masing-masing adalah integral atas R, maka S adalah R-modul yang dibangun secara berhingga.

(iii) Jika $S = R[T]$ dan T integral atas R, maka S integral atas R.

Bukti:

(i) Karena S adalah R-modul yang dibangun secara berhingga, maka seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, S integral atas R.

(ii) Jika $n = 0$, maka $S = R$ integral atas R. Sekarang, misalkan S adalah adalah R-modul yang dibangun secara berhingga. Misalkan $U = S[\alpha]$, dengan α integral atas R, maka α integral atas S dan U adalah R-

modul yang dibangun secara berhingga. Artinya, setiap elemen dari U adalah kombinasi linier dari suatu $\beta_1, \dots, \beta_n \in U$, dengan koefisien-koefisien di S yang juga merupakan suatu kombinasi-kombinasi linier dari suatu $\alpha_1, \dots, \alpha_k$. Akibatnya, setiap elemen di U adalah kombinasi linier dengan koefisien-koefisien di a dari kl elemen $\alpha_i\beta_j$ sehingga U merupakan suatu R-modul yang dibangun secara berhingga.

(iii) Ambil sebarang $\alpha \in R[T]$, maka $\alpha \in R[t_1, \dots, t_n]$ untuk suatu $t_1, \dots, t_n$ elemen-elemen di T. Dari (ii) dan (i) diperoleh α integral atas R. Akibatnya, $R[T] = S$ integral atas R.■

Dari Teorema 3.9, terdapat suatu akibat di mana berlaku sifat transitif dari perluasan integral. Hal ini dijelaskan pada Akibat 3.10 berikut.

Akibat 3.10 (Sifat Transitif dari Perluasan Integral)

Misalkan $R \subseteq S \subseteq T$ dengan T integral atas S dan S integral atas R, maka T integral atas R.

Bukti:

Misalkan $t \in T$ memenuhi persamaan berikut

$$t^n + s_{n-1}t^{n-1} + \cdots + s_0 = 0,$$

dengan $s_i \in S$. Maka, t integral atas $R[s_0, \dots, s_{n-1}]$. Akibatnya, $R[s_0, \dots, s_{n-1}, t]$ adalah $R[s_0, \dots, s_{n-1}]$-modul yang dibangun secara berhingga. Di lain pihak, $R[s_0, \dots, s_{n-1}]$ adalah R-modul yang dibangun secara berhingga. Sehingga, $R[s_0, \dots, s_{n-1}, t]$ adalah R-modul yang dibangun secara berhingga. Maka, t integral atas R. ■

Misalkan R adalah subring dari S. Suatu subset T dari S yang elemen-elemennya adalah integral atas R adalah subring dari S yang memuat R. Ring T yang dijelaskan di atas disebut penutup integral (*integral closure*) dari R pada S. Hal ini dipertegas oleh definisi berikut.

Definisi 3.11

Suatu penutup integral dari ring R di perluasan ring S adalah himpunan

$$R_c \coloneqq \{s \in S \mid s \text{ integral atas } R\}.$$

Dari definisi di atas, dapat ditunjukkan pula bahwa penutup integral dari ring R pada perluasan ring S adalah suatu ring. Selanjutnya, dapat ditunjukkan pula bahwa ring tersebut tertutup secara integral pada S. Hal ini dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.12

Misalkan S perluasan uniter dari ring R, dan misalkan

$$T \coloneqq \{s \in S \mid s \text{ integral atas } R\}.$$

Maka, T adalah suatu ring dan T tertutup secara integral di S.

Bukti:

(i) Akan dibuktikan T adalah suatu ring. Artinya, harus ditunjukkan untuk setiap $t_1, t_2 \in T$ maka $t_1 \pm t_2$ dan $t_1 t_2$ ada di T. Telah diketahui bahwa $t_1 \pm t_2$ dan $t_1 t_2$ ada di $R[t_1, t_2]$. Menurut Teorema 3.9 (ii), $R[t_1, t_2]$ adalah R-modul yang dibangun secara berhingga. Akibatnya, setiap elemen $R[t_1, t_2]$ integral atas R yang berarti terletak di T. Maka, T adalah suatu ring.

(ii) Selanjutnya, akan dibuktikan T tertutup secara integral pada S. Misalkan $s \in S$ integral atas T. Artinya, ada polinomial monik $p \in T[X]$ dengan $p(s) = 0$. Menurut Teorema 3.9 (ii), ada suatu subring $T_0 \subseteq T$ yang memuat koefisien-koefisien dari p dan merupakan R-modul yang dibangun secara berhingga. Karena S integral atas T_0, maka $T_0[s]$ adalah T_0-modul yang dibangun secara berhingga. Jika Γ_1 adalah himpunan berhingga yang membangun T_0 sebagai R-modul, dan Γ_2 adalah himpunan berhingga yang membangun $T_0[s]$ sebagai T_0-modul maka $\Gamma_1\Gamma_2$ adalah berhingga yang membangun $T_0[s]$ sebagai R-modul. Dari Teorema 3.9 (i), kita dapat menyimpulkan s integral atas R yang berarti $s \in T$. Jadi, T tertutup secara integral pada S.

Dari Teorema 3.12, dapat diinduksi suatu kesimpulan, yaitu mengenai penjumlahan, pengurangan, dan perkalian dari elemen integral atas suatu ring juga merupakan integral atas ring tersebut. Selain penutup integral pada ring, terdapat konsep penutup integral pada suatu daerah integral dengan definisi yang serupa.

Akibat 3.13

Misalkan R adalah suatu daerah integral dari *field of fraction* F dan E adalah perluasan aljabar dari F. Jika S adalah ring dari elemen-elemen di E yang integral atas R, maka S adalah daerah integral yang tertutup secara integral dengan *field of fraction* E.

Bukti:

Seperti yang telah diketahui sebelumnya, bahwa S tertutup secara integral pada E dan setiap subring dari suatu *field* adalah daerah integral, sehingga S

adalah daerah integral. Sekarang, akan ditunjukkan E adalah *field of fraction* dari S. Karena sebarang $\alpha \in E$ aljabar atas F, maka ada

$$p(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_0 \in F[X],$$

sedemikian sehingga

$$p(\alpha) = a_n \alpha^n + a_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0.$$

Karena F *field of fraction* dari R, dapat dituliskan

$$\frac{\beta_n}{\gamma_n} \alpha^n + \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \alpha^{n-1} + \cdots + \frac{\beta_0}{\gamma_0} = 0, \qquad \ldots(5)$$

dengan $a_i = \frac{\beta_i}{\gamma_i}$ dan $\beta_i, \gamma_i \in R$ untuk setiap $i = 0, 1, \ldots, n$.

Selanjutnya, kalikan persamaan (5) di atas dengan γ_n diperoleh

$$\beta_n \alpha^n + \frac{\beta_{n-1}}{\gamma_{n-1}} \gamma_n \alpha^{n-1} + \cdots + \frac{\beta_0}{\gamma_0} \gamma_n = 0. \qquad \ldots(6)$$

Sekarang, kalikan persamaan (6) di atas dengan γ_{n-1} diperoleh

$$\gamma_{n-1} \beta_n \alpha^n + \beta_{n-1} \gamma_n \alpha^{n-1} + \cdots + \gamma_{n-1} \gamma_n \frac{\beta_0}{\gamma_0} = 0.$$

Kalikan terus persamaan di atas dengan penyebut-penyebut dari masing-masing koefisien sampai semua penyebutnya hilang. Sehingga diperoleh

$$r_n \alpha^n + r_{n-1} \alpha^{n-1} + \cdots + r_0 = 0,$$

dengan $r_0, \ldots, r_n \in R$.

Diperoleh polinomial baru yaitu

$$g(X) = r_n X^n + r_{n-1} X^{n-1} + \cdots + r_0 \in R[X],$$

sedemikian sehingga $g(\alpha) = 0$. Menurut Lemma 3.3, $r_n \alpha$ adalah integral atas R, artinya $r_n \alpha \in S$. Tulis $r_n \alpha = s$, untuk suatu $s \in S$. Sehingga dapat dituliskan $\alpha = \frac{s}{r_n}$. Karena $r_n \in R \subseteq S$ dan $\alpha \in E$ sebarang, maka E adalah *field of fraction* dari S. ■

Selain penutup integral dari R pada S, terdapat pula penutup integral dari $T^{-1}R$ pada $T^{-1}S$, di mana T adalah suatu subset perkalian dari R. Hal tersebut dijelaskan pada proposisi berikut.

Proposisi 3.14

Misalkan $R \subseteq S$ di mana R dan S masing-masing ring komutatif dan R_c adalah ketertutupan integral dari R di S. Selanjutnya misalkan T adalah suatu sistem perkalian dari R, maka

$$T^{-1}R_c \coloneqq \left\{ \frac{r_c}{t} \,\middle|\, r_c \in R_c \text{ dan } t \in T \right\}$$

adalah ketertutupan integral dari $T^{-1}R$ pada $T^{-1}S$.

Bukti:

Misalkan $\frac{r_c}{t}$ adalah sebarang elemen di $T^{-1}R_c$, di mana $r_c \in R_c$ dan $t \in T$. Karena r_c integral atas R, maka dipenuhi

$$(r_c)^n + r_{n-1}(r_c)^{n-1} + \cdots + r_0 = 0, \qquad \ldots(7)$$

dengan $r_0, \ldots, r_{n-1} \in R$. Bagi persamaan (7) oleh $t^n \in T$, diperoleh

$$\left(\frac{r_c}{t}\right)^n + \frac{r_{n-1}}{t}\left(\frac{r_c}{t}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{r_0}{t^n} = 0. \qquad \ldots(8)$$

Sehingga diperoleh suatu polinomial

$$p(X) = X^n + \frac{r_{n-1}}{t}X^{n-1} + \cdots + \frac{r_0}{t^n}.$$

Polinomial di atas merupakan suatu polinomial monik dengan koefisien-koefisiennya merupakan elemen-elemen di $T^{-1}R$. Karena $\frac{r_c}{t}$ adalah sebarang elemen dari $T^{-1}R_c$ dan memenuhi kondisi pada persamaan (8), maka $T^{-1}R_c$ adalah penutup integral dari $T^{-1}R$ pada $T^{-1}S$. ■

Proposisi 3.15

Misalkan S adalah perluasan integral atas R, maka $T^{-1}S$ integral atas $T^{-1}R$.

Bukti:

Gunakan Proposisi 3.14 dengan $R_c = S$. ■