BAB III

PENGUJIAN DALAM TABEL KONTINGENSI I X J

3.1 Tabel Kontingensi I x J

Misalkan ada I sampel dan untuk masing-masing sampel terdiri atas J kategori. Banyak pengamatan untuk sampel ke i dan dengan kategori j dinyatakan dengan n_{ij}, untuk i = 1, 2, 3, …, I dan j = 1, 2,3, …, J. Seluruh pengamatan n_{ij} dinyatakan dengan n, sedangkan banyak pengamatan untuk tiap sampel adalah $n_{i.}$ dan banyak pengamatan untuk tiap kategori adalah $n_{.j}$. Misalkan n_{11} berarti banyaknya pengamatan pada sampel 1 dengan kategori 1 (lihat Tabel 2.1).

Tabel 3.1 Tabel kontingensi I x J

		Kategori						Total
		1	2	…	j	…	J	
Sampel	1	n_{11}	n_{12}	…	n_{1j}	…	n_{1c}	$n_{1.}$
	2	n_{21}	n_{22}	…	n_{2j}	…	n_{2c}	$n_{2.}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	i	n_{i1}	n_{i2}	…	n_{ij}	…	n_{ic}	$n_{i.}$
	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
	I	n_{r1}	n_{r2}	…	n_{rj}	…	n_{rc}	$n_{r.}$
Total		$n_{.1}$	$n_{.2}$	…	$n_{.j}$	…	$n_{.c}$	n

3.2 Uji Asosiasi Tabel Kontingensi I x J

Misalkan I menyatakan banyak faktor baris dan J menyatakan banyak faktor kolom, maka n_{ij} adalah banyaknya pengamatan baris ke-i dan kolom ke-j. Sedangkan P_{ij} menyatakan proporsi untuk baris ke-i dan baris ke-j, maka hubungan kedua notasi dapat dinyatakan sebagai berikut:

$$P_{ij} = \frac{n_{ij}}{n}$$
$$P_{i.} = \sum_{j=1}^{n} P_{ij} \qquad ; P_{.j} = \sum_{i=1}^{n} P_{ij} \tag{3.3}$$
$$\sum_{i,j=1}^{n} P_{ij} = 1 \qquad ; \sum_{i,j=1}^{n} f_{ij} = n$$

Bentuk hipotesis yang akan diuji adalah:

H_0 : Tidak terdapat hubungan antara baris dan kolom.

H_1 : Terdapat hubungan antara baris dan kolom.

F_{ij} merupakan frekuensi harapan pada baris ke-i dan kolom ke-j. Untuk mendapatkan frekuensi harapan, digunakan aturan peluang sebagai berikut:

> Jika kedua peristiwa independen, maka peluang untuk terjadi secara bersamaan, sama dengan perkalian besarnya peluang masing-masing peritiwa, bila H_0 benar.

Peluang untuk memasukkan suatu subjek ke dalam sel ij, sama dengan peluang untuk memasukkannya ke dalam baris ke-i dikalikan peluang memasukkannya ke dalam kolom ke-j dari data sampel. Peluang untuk memasukkan subjek ke dalam baris ke-i ditaksir oleh $\frac{n_{i.}}{n}$ dan peluang untuk memasukkan subjek ke dalam kolom ke-j ditaksir oleh $\frac{n_{.j}}{n}$. Selanjutnya dapat ditulis peluang masuknya suatu subjek sel ke-ij, sebagai berikut:

$$P\left(n_{ij}\right) = \frac{n_{i.}}{n}\frac{n_{.j}}{n} \quad . \qquad (3.4)$$

Untuk mendapatkan frekuensi harapan (f_{ij}) pada tabel kotingensi r x c adalah:

$$\begin{aligned} f_{ij} &= E\left(n_{ij}\right) \\ &= n\left(P(n_{ij})\right) \\ &= n\frac{n_{i.}}{n}\frac{n_{.j}}{n} \\ &= \frac{n_{i.}\,n_{.j}}{n} \quad . \qquad (3.5) \end{aligned}$$

Bentuk persamaan (3.5) ini menunjukkan bahwa, frekuensi sel yang diharapkan, dapat dihitung dengan mengalikan total baris dan total kolom yang sesuai, kemudian hasilnya dibagi dengan total ukuran sampel.

Dengan menggunakan notasi, maka perumusan hipotesis di atas ditulis sebagai berikut:

H_0 : $p_{ij} = p_{i.}\, p_{.j}$ untuk i = 1, 2, …, I dan j = 1, 2, …, J.

H_1 : $p_{ij} \neq p_{i.}\, p_{.j}$

$$\sum_{j=1}^{J}\sum_{i=1}^{I} p_{ij} = 1, \sum_{i=1}^{I} p_{ij} = p_{.j}, \sum_{j=1}^{J} p_{ij} = p_{i.} \ .$$

Adapun statistik uji yang digunakan adalah statistik uji chi kuadrat Pearson sebagai berikut:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{\left(n_{ij}-f_{ij}\right)^2}{m_{ij}} \tag{3.1}$$

dengan $f_{ij} = \dfrac{n_{i.}\,n_{.j}}{n}$.

Distribusi peluang ini merupakan distribusi pendekatan dari distribusi multinomial, bila ukuran sampel besar, atau n → ∞. Dengan kata lain, bila ukuran sampel cukup besar, maka distribusi multinomial akan mendekati distribusi chi kuadrat.

Bukti:

Diketahui fungsi peluang multinomialnya adalah

$$p(x_1, x_2, ..., x_k) = \frac{n!}{x_1!x_2!...x_k!}\,p_1^{x_1}p_2^{x_2}...p_k^{x_k}$$

dengan $p_i > 0; \sum_{i=1}^{k} p_i = 1; \sum_{i=1}^{k} x_i = n$.

Jika n besar, maka digunakan pendekatan Stirling untuk faktorial n besar:

$$\lim_{n\to\infty} n! \approx \sqrt{2\pi}\,e^{-n}\,n^{\frac{n+1}{2}} .$$

Sehingga fungsi peluang di atas dapat ditulis menjadi:

$$p(x_1, x_2, ..., x_k) \approx \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,e^{-n}\,n^{\frac{n+1}{2}}}{\prod_{i=1}^{k}(2\pi)^{\frac{1}{2}}\,e^{-x_i}\,(x_i)^{\frac{x_i+1}{2}}}\,p_1^{x_1}p_2^{x_2}...p_k^{x_k}$$

$$p(x_1, x_2, ..., x_k) \approx \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} e^{-\sum x_i} \prod_{i=1}^{k} (x_i)^{\frac{x_i+1}{2}}} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k}$$

$$\approx \frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}} e^{-n} n^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{k}{2}} e^{-n} \prod_{i=1}^{k} (x_i)^{\frac{x_i+1}{2}}} p_1^{x_1} p_2^{x_2} ... p_k^{x_k} \quad .$$

Jika hasil tersebut dikalikan dengan:

$$\frac{n^{x_1+x_2+...+x_k+\frac{k}{2}} (p_1 p_2 ... p_k)^{\frac{1}{2}}}{n^{x_1+x_2+...+x_k+\frac{k}{2}} (p_1 p_2 ... p_k)^{\frac{1}{2}}}$$

Maka akan diperoleh:

$$p(x_1, x_2, ..., x_k) \approx \frac{n^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{np_1}{x_1}\right)^{x_1+\frac{1}{2}} \left(\frac{np_2}{x_2}\right)^{x_2+\frac{1}{2}} ... \left(\frac{np_k}{x_k}\right)^{x_k+\frac{1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{(k-1)}{2}} n^{\frac{n+m}{2}} (p_1 p_2 ... p_k)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\approx C \prod_{i=1}^{k} \left(\frac{np_i}{x_i}\right)^{x_i+\frac{1}{2}}$$

dengan $C = (2\pi)^{-\frac{(k-1)}{2}} (p_1 p_2 ... p_k)^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{(m-1)}{2}}$ tidak bergantung pada x_i. Jika $P = p(x_1, x_2, ..., x_k)$, maka :

$$\log P \approx \log C + \sum_{i=1}^{k} \left(x_i + \frac{1}{2}\right) \log \frac{np_i}{x_i}$$

$$\log\left(\frac{P}{C}\right) \approx \sum_{i=1}^{k} \left(x_i + \frac{1}{2}\right) \log \frac{\theta_i}{x_i} \qquad ...(i)$$

dengan $\theta_i = np_i = E(X_i)$ sebagai frekuensi yang diharapkan untuk sel ke-i.

Sekarang ditentukan:

$$\xi_i = \frac{X_i - \theta_i}{\sqrt{\theta_i}}, \text{ maka } X_i - \theta_i = \xi_i \sqrt{\theta_i} \ .$$

Jadi,

$$X_i = \theta_i + \xi_i \sqrt{\theta_i} \ . \qquad \text{...}(ii)$$

Selanjutnya substitusikan persamaan (ii) ke dalam persamaan (i), maka diperoleh:

$$\begin{aligned}
\log\left(\frac{P}{C}\right) &\approx \sum_{i=1}^{k}\left(\theta_i + \xi_i\sqrt{\theta_i} + \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{\theta_i}{\theta_i + \xi_i\sqrt{\theta_i}}\right) \\
&\approx \sum_{i=1}^{k}\left(\theta_i + \xi_i\sqrt{\theta_i} + \frac{1}{2}\right)\log\left(\frac{1}{1 + \frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}}}\right) \\
&\approx -\sum_{i=1}^{k}\left(\theta_i + \xi_i\sqrt{\theta_i} + \frac{1}{2}\right)\log\left(1 + \frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}}\right) \ .
\end{aligned}$$

Karena $\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} + \ldots$

Maka:

$$\log\left(1 + \frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}}\right) = \frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}}\right)^3 + \ldots$$

$$\log\left(1 + \frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}}\right) = \frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}}\right)^2 + \phi(\theta_i)^{-\frac{3}{2}} \ .$$

Sehingga

$$\log\left(\frac{P}{C}\right) \approx -\sum_{i=1}^{k}\left(\theta_i + \xi_i\sqrt{\theta_i} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\xi_i}{\sqrt{\theta_i}}\right)^2 + \phi(\theta_i)^{-\frac{3}{2}}\right)$$

$$\log\left(\frac{P}{C}\right) \approx -\sum_{i=1}^{k}\left(\xi_i\sqrt{\theta_i} - \frac{1}{2}\xi_i^2 + \xi_i^2 + \phi\left(\theta_i\right)^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Karena n besar, maka $\theta_i = np_i$ dan $\phi\left(\theta_i^{-\frac{1}{2}}\right) \to 0$.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\xi_i\sqrt{\theta_i} &= \sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \theta_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{k}x_i - \sum_{i=1}^{k}\theta_i \\ &= n - n\sum_{i=1}^{k}p_i \\ &= n - n \\ &= 0\ .\end{aligned}$$

Maka,

$$\log\left(\frac{P}{C}\right) \approx -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2$$

dan $\left(\frac{P}{C}\right) \approx e^{\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2\right)}$.

Sehingga $P \approx C\,e^{\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2\right)}$.

Dengan demikian, terlihat bahwa ξ_i berdistribusi normal baku. Oleh karena itu, $\sum_{i=1}^{k}\xi_i^2 = \sum_{i=1}^{k}\frac{\left(x_i - \theta_i\right)^2}{\theta_i}$ merupakan jumlah kuadrat peubah acak chi-kuadrat dengan derajat kebebasan (k-1). Dengan demikian apabila data observasi disusun dalam bentuk tabel kontingensi I x J, dimana banyak faktor baris adalah I dan banyak faktor kolom adalah J, maka perumusan di atas dapat ditulis sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\xi_{ij}^{2} = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\frac{\left(n_{ij}-f_{ij}\right)^{2}}{f_{ij}} \approx \chi^{2}.$$

Yang merupakan peubah acak chi-kuadrat berderajat bebas (I – 1) (J – 1). (terbukti).

Dengan mengambil taraf nyata α, tentukan nilai $\chi^{2}_{(1-\alpha),\upsilon}$ dari Tabel Distribusi Chi Kuadrat dengan derajat bebas υ = (I – 1) (J – 1), sehingga tolak H_0 bila $\chi^2 \geq \chi^{2}_{(1-\alpha),\upsilon}$.

3.3 Uji Eksak Tabel Kontingensi 2 x 2

Untuk tabel kontingensi 2 x 2 bila ukuran sampel kecil, ada pengujian independensi antar dua faktor yang disebut uji eksak Fisher. Pengujian eksak Fisher menggunakan *odds rasio*, yang merupakan rasio antara *odds* dalam baris ke-1 (Ω_1) dengan *odds* dalam baris ke-2 (Ω_2). Atau bisa ditulis sebagai berikut:

$$\theta = \frac{\Omega_1}{\Omega_2} = \frac{\left(\frac{p_{11}}{p_{12}}\right)}{\left(\frac{p_{21}}{p_{22}}\right)} = \frac{p_{11}\,p_{22}}{p_{12}\,p_{21}}. \quad (3.6)$$

Odds rasio merupakan nilai yang nonnegatif (0 ≤ θ < ∞). Independensi dari X (faktor baris) dan Y (faktor kolom) ekuivalen dengan θ = 1. Ketika 1 < θ < ∞, subjek dalam baris 1 mempunyai peluang lebih besar mendapatkan respon pertama daripada subjek dalam baris 2. Ketika 0 < θ < 1, subjek dalam baris pertama mempunyai peluang lebih kecil mendapatkan respon pertama daripada subjek dalam baris kedua. Nilai *Odds* *rasio* yang semakin jauh dari satu memperlihatkan taraf asosiasi yang lebih kuat.

Hipotesis untuk uji eksak Fisher adalah sebagai berikut:

H_0 : θ = 1 (independensi)

H_1 : θ ≠ 1.

Tabel 2.2 Tabel Kontingensi 2 x 2

		Kategori		Total
		Kolom 1	Kolom 2	
Sampel	Baris 1	n_{11}	n_{12}	$n_{1.}$
	Baris 2	n_{21}	n_{22}	$n_{2.}$
Total		$n_{.1}$	$n_{.2}$	n

Peluang bersyarat marginal total ($n_{.1}$, $n_{.2}$, $n_{n1.}$, $n_{2.}$) adalah:

$$P\left(n_{11} \middle| n_{.1}, n_{.2}, n_{1.}, n_{2.}\right) = \frac{\binom{n_{1.}}{n_{11}}\binom{n_{2.}}{n_{21}}\theta^{n_{11}}}{\sum_{i=0}^{n_{.1}}\binom{n_{1.}}{i}\binom{n_{2.}}{n_{21}}\theta^{n_{11}}} \quad . \tag{3.7}$$

Di bawah hipotesis nol (θ = 1) distribusi eksak adalah distribusi hipergeometri:

$$P\left(n_{11} \middle| n_{.1}, n_{.2}, n_{1.}, n_{2.}, \theta = 1\right) = \frac{\binom{n_{1.}}{n_{11}}\binom{n_{2.}}{n_{21}}}{\binom{n}{n_{.1}}} \quad . \tag{3.8}$$

$m_{-} < n_{11} < m_{+}$, dengan:

$$m_{-} = \max\left(0, n_{1.} + n_{.1} - n\right)$$
$$m_{+} = \min\left(n_{1.}, n_{.1}\right) \ .$$

Atau lebih sederhananya:

$$P\left(n_{11} \middle| n_{.1}, n_{.2}, n_{1.}, n_{2.}, \theta = 1\right) = \frac{n_{.1}!n_{.2}!n_{1.}!n_{2.}!}{n!n_{11}!n_{12}!n_{21}!n_{22}!} \ . \qquad (3.9)$$

Untuk menguji independensi, *p-value* adalah jumlah peluang hipergeometri untuk tabel yang mempunyai n_{11} lebih besar dari n_{11} observasi. Tolak H_0, jika *p-value* lebih kecil dari α yang ditentukan.

3.4 Uji Eksak Tabel Kontingensi I x J

Agresti dan Wackerly (1977) mengembangkan uji eksak Fisher ini untuk tabel kontingensi I x J. Untuk tabel kontingensi I x J peluang bersyarat marginal total ($n_{i.}$,$n_{.j}$) distribusi eksaknya adalah:

$$P\left(n_{ij} \middle| n_{i.}, n_{.j}\right) = \frac{\prod_{i=1}^{I} n_{i.}! \prod_{j=1}^{J} n_{.j}!}{n! \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \ . \qquad (3.10)$$

Bukti:

Fungsi densitas distribusi multinomial sebagai berikut:

$$P\left(n_{ij}\right) = \frac{n!}{\prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \prod_{i=1}^{I} \prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}} \ . \qquad (i)$$

Dengan menguraikan $\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}}$ sebagai berikut:

$$\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}} = \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}} \frac{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}}}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}}}$$

$$= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}} \frac{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}}}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}}}$$

$$\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}} = p_{IJ}^{\sum\sum n_{ij}}$$

$$= n_{IJ}^{n}$$

$$= \left(\frac{1}{p_{IJ}}\right)^{-n}$$

$$= \left(\frac{p_{IJ} + \sum_{i=1}^{I-1} p_{iJ} + \sum_{j=1}^{J-1} p_{Ij} + \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} p_{ij}}{p_{IJ}}\right)^{-n}$$

$$\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}} = \left(1 + \sum_{i=1}^{I-1}\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}} + \sum_{j=1}^{J-1}\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}} + \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}\frac{p_{ij}}{p_{IJ}}\frac{p_{IJ}}{p_{IJ}}\frac{p_{iJ}}{p_{iJ}}\frac{p_{Ij}}{p_{Ij}}\right)^{-n}$$

$$= \left(1 + \sum_{i=1}^{I-1}\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}} + \sum_{j=1}^{J-1}\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}} + \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}\frac{p_{ij}\,p_{IJ}}{p_{iJ}\,p_{Ij}}\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}}\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}}\right)^{-n} \qquad (ii)$$

Dengan $\ln\left(\frac{p_{ij}\,p_{IJ}}{p_{iJ}\,p_{Ij}}\right) = a_{ij}$, $\ln\left(\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}}\right) = b_i$, $\ln\left(\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}}\right) = d_j$.

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

Maka (ii) dapat ditulis sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}} &= \left(1+\sum_{i=1}^{I-1} e^{b_i} + \sum_{j=1}^{J-1} e^{d_j} + \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{I-1} e^{a_{ij}} e^{b_i} e^{d_j}\right)^{-n} \\
&= \left(1+\sum_{i=1}^{I-1} e^{b_i} + \sum_{j=1}^{J-1} e^{d_j} + \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} e^{a_{ij}+b_i+d_j}\right)^{-n} \\
&= d^{n}
\end{aligned}$$

dengan $d = \left(1+\sum_{i=1}^{I-1} e^{b_i} + \sum_{j=1}^{J-1} e^{d_j} + \sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} e^{a_{ij}+b_i+d_j}\right)^{-1}$.

dan

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}}}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}}} &= \prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}\left(\frac{p_{ij}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \\
&= \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\left(\frac{p_{ij}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \prod_{i=1}^{I-1}\left(\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \prod_{j=1}^{J-1}\left(\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \left(\frac{p_{IJ}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \\
&= \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\left(\frac{p_{ij}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \left(\frac{p_{iJ}}{p_{iJ}}\right)^{n_{ij}} \left(\frac{p_{IJ}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \left(\frac{p_{Ij}}{p_{Ij}}\right)^{n_{ij}} \prod_{i=1}^{I-1}\left(\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \prod_{j=1}^{J-1}\left(\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \\
&= \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\left(\frac{p_{ij}\,p_{IJ}}{p_{iJ}\,p_{Ij}}\right)^{n_{ij}} \left(\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \left(\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \prod_{i=1}^{I-1}\left(\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}} \prod_{j=1}^{J-1}\left(\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}}\right)^{n_{ij}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{ij}^{n_{ij}}}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} p_{IJ}^{n_{ij}}} &= \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1}\left(\frac{p_{ij}\,p_{IJ}}{p_{iJ}\,p_{Ij}}\right)^{n_{ij}} \prod_{i=1}^{I-1}\left(\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}}\right)^{n_{i.}} \prod_{j=1}^{J-1}\left(\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}}\right)^{n_{.j}} \\
&= \prod_{i=1}^{I-1}\prod_{j=1}^{J-1} e^{a_{ij}n_{ij}} \prod_{i=1}^{I-1} e^{b_i n_{ij}} \prod_{j=1}^{J-1} e^{d_j n_{ij}} \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} a_{ij}n_{ij}\right) \exp\left(\sum_{i=1}^{I-1} b_i n_{i.}\right) \exp\left(\sum_{j=1}^{J-1} d_j n_{.j}\right) \\
&= \exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} a_{ij}n_{ij} + \sum_{i=1}^{I-1} b_i n_{i.} + \sum_{j=1}^{J-1} d_j n_{.j}\right).
\end{aligned}$$

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

Jadi, fungsi peluang distribusi multinomial dapat ditulis sebagai berikut:

$$P\left(n_{ij}\right)=\frac{n!}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}n_{ij}!}d^{n}\exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}a_{ij}n_{ij}+\sum_{i=1}^{I-1}b_{i}n_{i.}+\sum_{j=1}^{J-1}d_{j}n_{.j}\right) . \qquad (iii)$$

Dengan $a_{ij}=\ln\left(\frac{p_{ij}\,p_{IJ}}{p_{iJ}\,p_{Ij}}\right)$, $b_{i}=\ln\left(\frac{p_{iJ}}{p_{IJ}}\right)$, $d_{j}=\ln\left(\frac{p_{Ij}}{p_{IJ}}\right)$

$$d=\left(1+\sum_{i=1}^{I-1}e^{b_i}+\sum_{j=1}^{J-1}e^{d_j}+\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}e^{a_{ij}+b_i+d_j}\right)^{-1} .$$

Peluang bersyarat marginal total adalah:

$$P\left(n_{ij}\left|n_{i.},n_{.j}\right.\right)=\frac{\frac{n!}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}n_{ij}!}d^{n}\exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}a_{ij}n_{ij}+\sum_{i=1}^{I-1}b_{i}n_{i.}+\sum_{j=1}^{J-1}d_{j}n_{.j}\right)}{\sum_{Z}\frac{n!}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}n_{ij}!}d^{n}\exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}a_{ij}n_{ij}+\sum_{i=1}^{I-1}b_{i}n_{i.}+\sum_{j=1}^{J-1}d_{j}n_{.j}\right)} .$$

Z adalah semua kemungkinan tabel yang mempunyai marginal total yang sama.

$$\left\{n_{ij};\sum_{i=1}^{I}n_{ij}=n_{.j},\sum_{j=1}^{J}n_{ij}=n_{i.},\mathit{untuk\ semua\ i\ dan\ j}\right\}$$

$$P\left(n_{ij}\left|n_{i.},n_{.j}\right.\right)=\frac{\frac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}n_{ij}!}d^{n}\exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}a_{ij}n_{ij}\right)}{\sum_{Z}\frac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J}n_{ij}!}d^{n}\exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1}a_{ij}n_{ij}\right)} .$$

Karena $a_{ij} = \ln \alpha_{ij}$ maka

$$P\left(n_{ij} \middle| n_{i.}, n_{.j}\right) = \frac{\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} n_{ij} \ln \alpha_{ij}\right)}{\sum_{Z} \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} n_{ij} \ln \alpha_{ij}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} \ln \alpha_{ij}^{n_{ij}}\right)}{\sum_{Z} \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \exp\left(\sum_{i=1}^{I-1}\sum_{j=1}^{J-1} \ln \alpha_{ij}^{n_{ij}}\right)}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \exp\left(\ln \alpha_{ij}^{n_{ij}}\right)}{\sum_{Z} \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \exp\left(\ln \alpha_{ij}^{n_{ij}}\right)}$$

$$P\left(n_{ij} \middle| n_{i.}, n_{.j}\right) = \frac{\dfrac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \alpha_{ij}^{n_{ij}}}{\sum_{Z} \dfrac{1}{\prod_{i=1}^{I}\prod_{j=1}^{J} n_{ij}!} \prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \alpha_{ij}^{n_{ij}}} \quad . \qquad (iv)$$

Karena $\alpha_{ij} = \prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \theta_{ij}$, dengan $\theta_{ij} = \dfrac{p_{ij}\, p_{(i+1)(j+1)}}{p_{i(j+1)(i+1)j}}$,

maka $\prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \alpha_{ij}^{n_{ij}} = \prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \left(\prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \theta_{ij}\right)^{n_{ij}}$

$$= \prod_{i}^{I-1}\prod_{j}^{J-1} \theta_{ij}^{sj}, dengan\ s_{ij} = \sum_{a \le i}\sum_{b \le j} n_{ab} \quad .$$

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

Sehingga persamaan (iv) dapat ditulis sebagai berikut:

$$P\left(n_{ij}\left|n_{i.},n_{.j}\right.\right)=\frac{\dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{I}\prod\limits_{j=1}^{J}n_{ij}!}\prod\limits_{i}^{I-1}\prod\limits_{j}^{J-1}\theta_{ij}^{s_{ij}}}{\sum\limits_{Z}\dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{I}\prod\limits_{j=1}^{J}n_{ij}!}\prod\limits_{i}^{I-1}\prod\limits_{j}^{J-1}\theta_{ij}^{s_{ij}}}\quad. \qquad (v)$$

Di bawah H_0 (θ_{ij} = 1, untuk semua i dan j) maka (v) menjadi:

$$P\left(n_{ij}\left|n_{i.},n_{.j}\right.\right)=\frac{\dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{I}\prod\limits_{j=1}^{J}n_{ij}!}}{\sum\limits_{Z}\dfrac{1}{\prod\limits_{i=1}^{I}\prod\limits_{j=1}^{J}n_{ij}!}}\quad. \qquad (vi)$$

Karena $\sum\limits_{Z}\dfrac{\prod\limits_{j-1}^{J}n_{.j}!}{\prod\limits_{i=1}^{I}\prod\limits_{j=1}^{I}n_{ij}!}=\dfrac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{I}n_{i.}!}$

$$\sum_{Z}\frac{1}{\prod\limits_{i=1}^{I}\prod\limits_{j=1}^{J}n_{ij}!}=\frac{n!}{\prod\limits_{i=1}^{I}n_{i.}!\prod\limits_{j=1}^{J}n_{.j}!}\ ,$$

Sehingga persamaan (vi) dapat ditulis sebagai berikut:

$$P\left(n_{ij}\left|n_{i.},n_{.j}\right.\right)=\frac{\prod\limits_{i=1}^{I}n_{i.}!\prod\limits_{j=1}^{J}n_{.j}!}{n!\prod\limits_{i=1}^{I}\prod\limits_{j=1}^{J}n_{ij}!}\ (terbukti). \qquad □$$

Statistik uji yang bisa digunakan adalah peluang, chi kuadrat ataupun ukuran asosiasi yang sesuai dengan tabel kontingensi dan hipotesisnya.

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

Untuk menguji independensi bisa menggunakan peluang, caranya dengan membandingkan p-value dengan taraf signifikan yang ditentukan. Adapun p-valuenya adalah sebagai berikut:

$$p = P(P \leq P_0), \text{ tolak } H_0 \text{ jika } p < \alpha.$$

Jika statistik uji yang digunakan adalah chi kuadrat maka p-valuenya adalah sebagai berikut:

$$p = P(\chi^2 \geq \chi_o^2), \text{ tolak } H_0 \text{ jika } p < \alpha.$$