BAB III

MODEL ANTRIAN $(M_i / G_i / 1) : (NPRP / \infty / \infty)$

3.1. Pendahuluan

Dalam model antrian dengan disiplin pelayanan prioritas, diasumsikan bahwa antrian yang paralel dibentuk di depan sebuah sarana pelayanan dengan setiap antrian diperuntukkan bagi para pelanggan dengan prioritas tertentu. Fasilitas pelayanan diasumsikan memiliki k prioritas maka akan terdapat k antrian yang paralel dalam sistem, antrian pertama memiliki prioritas pelayanan tertinggi dan antrian kedua untuk para pelanggan dengan prioritas lebih rendah dari yang pertama hingga antrian ke-m yang memiliki prioritas paling rendah. Laju kedatangan dan pelayanan dapat bervariasi untuk antrian dengan prioritas berbeda. Namun, dalam setiap antrian diasumsikan para pelanggan dilayani dengan disiplin FCFS (*first come first serve*).

Terdapat dua aturan dalam antrian dengan disiplin pelayanan prioritas, yaitu:

1. Aturan preemptif (PRP), dimana pelayanan pelanggan dengan prioritas lebih rendah dapat diinterupsi demi seseorang yang baru tiba dan memiliki prioritas lebih tinggi.
2. Aturan nonpreemptif (NPRP), dimana pelayanan pelanggan yang sudah dilayani tidak dapat diinterupsi oleh pelanggan yang baru datang. Pelanggan tersebut hanya akan meninggalkan sarana pelayanan setelah selesai dilayani dan tidak bergantung pada prioritas para pelanggan yang baru datang.

Seperti yang telah disebutkan sebelumnya, model ini seolah-olah memiliki banyak jalur antrian (bergantung pada banyaknya prioritas) dan masing-masing antrian akan mengikuti disiplin pelayanan FCFS (*first come first serve*). Oleh karena itu, setiap jalur antrian akan meliliki laju kedatangan yang berbeda, yaitu λ_1, λ_2, ..., λ_k dan laju pelayanan untuk setiap jalur antrian juga bervariasi, yaitu $\mu_1, \mu_2,..,\ \mu_k$.

Pada penyusunan tugas akhir ini model yang diasumsikan adalah model antrian (M_i /G_i /1) : (NPRP/∞/∞) yaitu banyak kedatangan berdistribusi Poisson atau waktu antar kedatangan berdistribusi Eksponensial, waktu pelayanan berdistribusi *general* (umum) dan fasilitas pelayanan tunggal. Aturan yang digunakan adalah nonpreemtive dengan jumlah kapasitas sistem dan masukan diasumsikan tak hingga.

Perumusan untuk model antrian dengan disiplin prioritas akan sangat bergantung pada distribusi waktu pelayanannya. Setelah distribusi waktu pelayanan ditentukan maka akan diketahui fungsi kepadatan peluangnya sehingga diketahui pula E(t) dan *var*(t). Karena dalam menentukan rata-rata waktu mengantri dan rata-rata jumlah pengantri sangat bergantung pada nilai E(t) dan *var*(t) dari distribui pelayanan yang dipilih.

Dalam menetukan model antrian perlu diketahui distribusi peluang dari waktu kedatangan atau waktu antar kedatangan dan waktu pelayanan. Kedua distribusi tersebut akan mempengaruhi perhitungan rata-rata waktu tunggu dan rata-rata jumlah antiran. Oleh karena itu, pada selanjutnya akan dibahas tentang distribusi kedatangan dan pelayanan yang akan menentukan model antrian (M_i /G_i /1).

3.2. Distribusi Banyak Kedatangan dan Distribusi Pelayanan

Terdapat beberapa definisi yang harus dipahami terlebih dahulu untuk mengetahui distribusi banyak kedatangan dan keberangkatan, yaitu:

Definisi 3.2.1

Proses stokastik adalah koleksi dari peubah acak $\overline{X} = \{X(t) | t \in T, \text{T merupakan set indeks}\}$. Di mana untuk setiap t pada himpunan indek T, $X(t)$ merupakan peubah acak. Pada aplikasinya t sering digunakan untuk menyatakan waktu dan $X(t)$ merupakan keadaan pada proses saat waktu t.

Definisi 3.2.2

Proses stokastik $\{N(t) | t \geq 0\}$ dinamakan proses stokastik menghitung jika $N(t)$ menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang waktu t. Proses menghitung $N(t)$ harus memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. $N(t) \geq 0$, untuk setiap t
2. $N(t)$ bernilai bulat positif
3. Jika $s < t$, maka $N(s) \leq N(t)$
4. Untuk $s < t$, maka $N(t) - N(s)$ menyatakan banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang $(s,t]$.

Jika banyak peristiwa yang terjadi dalam interval waktu adalah bebas, maka banyaknya peristiwa yang terjadi dalam selang $[0,t]$ yaitu $N(t)$ bebas tidak berpengaruh terhadap banyaknya peristiwa yang terjadi pada selang $(t,t+s]$, yakni $N(t+s)-N(t)$ sehingga proses menghitung dikatakan **kenaikan bebas.**

Jika distribusi dari banyak peristiwa yang terjadi pada interval waktu kapanpun tergantung hanya pada panjang waktu interval (interval sama akan berdistribusi sama), proses menghitung dikatakan **kenaikan stasioner.**

Definisi 3.2.3

Proses menghitung $\{N(t)|\, t \geq 0\}$ dinamakan proses Poisson, jika untuk proses kedatangan maupun keberangkatan memenuhi sifat-sifat sebagai berikut:

1. Pada saat t = 0 tidak terdapat peristiwa kedatangan maupun keberangkatan. $N(t=0)=0$.
2. Diberikan $N(t)$ jumlah dari peristiwa kedatangan maupun keberangkatan selama interval $[0,t]$, peristiwa kedatangan maupun keberangkatan memiliki kenaikan stasioner dan kenaikan bebas.
3. Pada interval waktu sangat kecil $h>0$, terdapat peluang munculnya satu peristiwa kedatangan maupun keberangkatan, dengan peluang $P(N(h)=1)$ dan $0<P(N(h)=1)<1$. Peluang untuk satu kedatangan pada interval waktu sangat kecil $h>0$, yaitu $P(N(h)=1)$ adalah $\lambda h+o(h)$, dimana λ merupakan laju (intensitas) kedatangan. Peluang untuk satu keberangkatan pada interval waktu sangat kecil $h>0$, yaitu $P(N(h)=1)$ adalah $\mu h+o(h)$, dimana μ merupakan laju (intensitas) keberangkatan.

4. Pada interval waktu sangat kecil $h > 0$, memungkinkan terjadi lebih dari satu peristiwa kedatangan maupun satu peristiwa keberangkatan dengan peluang yang sangat kecil. Dalam hal ini bisa ditulis $P(N(h) \geq 2) = o(h)$.

   Catatan:

   Fungsi f dikatakan fungsi $o(h)$ jika $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = 0$.

   Contoh : $f(x) = 7x^3 + x^2$

   Karena $\lim_{h \to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{7h^7 + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} 7h^6 + h = 0$.

   Jadi, fungsi $f(x)$ merupakan fungsi $o(h)$.

3.2.1. Distribusi Banyak Kedatangan

Situasi dimana pelanggan datang dan diasumsikan tidak pernah pergi serta terjadi dengan cara yang sepenuhnya acak dinamakan kelahiran murni (*pure birth*). Proses kedatangan pelanggan pada teori antrian dapat dipandang sebagai kelahiran murni. Laju kedatangan pelanggan per satuan waktu dinotasikan dengan simbol λ. Dan jumlah kedatangan pelanggan yang diperkirakan selama *t* adalah λt.

Dari definisi definisi 2.5.3 diketahui bahwa peluang terjadinya peristiwa satu kedatangan dalam interval waktu yang sangat kecil h dimana $h > 0$ adalah $0 < \lambda h + o(h) < 1$. Ini berarti bahwa peluang tidak adanya peristiwa kedatangan dalam interval waktu yang sangat kecil h adalah $1-(\lambda h+o(h))$ dimana $0<1-\lambda h-o(h)<1$.

$P_n(t)$ adalah peluang adanya n pengantri dalam sistem pada saat t sedangkan $P_n(t+h)$ adalah peluang adanya n pelanggan yang antri dalam sistem pada saat $t+h$. Jika pada saat $t+h$ sistem tidak memiliki pengantri ($n=0$), ini berarti pada saat t sistem juga tidak memiliki pengantri dan tidak ada peristiwa kedatangan selama h. Untuk $n>0$, dimana pada saat $t+h$ sistem memiliki n pengantri, ada dua kemungkinan yang dapat terjadi yaitu terdapat n pengantri pada saat t dan tidak ada peristiwa kedatangan selama h. Dan terdapat $n-1$ pengantri pada saat t dan terjadi 1 peristiwa kedatangan selama h.

Untuk peluang terdapat $n=0$ pengantri pada saat $t+h$ adalah

$$P_0(t+h)=P(N(t+h)=0)$$

$$P_0(t+h)=P(N(t)=0,N(t+h)-N(t)=0)$$

Karena kedatangan merupakan proses kenaikan bebas maka

$$P_0(t+h)=P(N(t)=0)P(N(t+h)-N(t)=0)$$

$$P_0(t+h)=p_0(t)(1-\lambda h+o(h))$$

$$\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}=-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}$$

Ketika h mendekati 0, maka

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{P_0(t+h)-P_0(t)}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[-\lambda P_0(t)+\frac{o(h)}{h}\right]$$

$$P_0^{'}(t)=-\lambda P_0(t)$$

$$\frac{P_0^{'}(t)}{P_0(t)}=-\lambda$$

$$\ln P_0(t)=-\lambda t+C$$

Dengan mengintegralkan kedua ruas terhadap t diperoleh

$$P_0(t)=Ke^{-\lambda t}\ ,\ K = \text{konstanta}$$

Karena $P_0(0)=P\{N(0)=0\}=1$ sehingga

$$P_0(t)=e^{-\lambda t} \tag{3.2.1.1}$$

Untuk peluang terdapat $n>0$ pengantri pada saat $t+h$ adalah

$$P_n(t+h)=P(N(t+h)=n)$$

$$P_n(t+ht)=P(N(t)=n,N(t+h)-N(t)=0)+P(N(t)=n-1,N(t+h)-N(t)=1)$$

$$+P(N(t+h)=n,N(t+h)-N(t)\geq 2)$$

Karena kedatangan merupakan kenaikan bebas, maka

$$P_n(t+h)=P_n(t)[1-\lambda h+o(h)]+\lambda hP_{n-1}(t)+o(h)$$

$$\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{t}$$

Ketika h mendekati 0, maka

$$\lim_{h\to 0}\left[\frac{P_n(t+h)-P_n(t)}{h}\right]=\lim_{h\to 0}\left[-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)+\frac{o(h)}{t}\right]$$

$$P_n^{'}(t)=-\lambda P_n(t)+\lambda P_{n-1}(t)$$

$$P_n^{'}(t)+\lambda P_n(t)=\lambda P_{n-1}(t)$$

Solusi dari persamaan diferensial di atas[1] adalah

$$P_n(t)=e^{-\int \lambda dt}\left(\int \lambda P_{n-1}(t)e^{\int \lambda dt}dt+B\right),\ B = \text{Konstanta}$$

Karena $P_1(0)=0$, maka B = 0, sehingga

$$P_1(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^1}{1!}=\lambda t\, e^{-\lambda t}$$

Misalkan $n=k$ terpenuhi $P_k(t)=\dfrac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$

$$P_{k+1}(t)=e^{-\lambda t}\left(\int \lambda \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}e^{\lambda t}dt+B\right)$$

karena $P_{k+1}(0)=0$, maka B = 0. Sehingga

$$P_{k+1}(t)=\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k+1}}{(k+1)!} \qquad (3.2.1.2)$$

---

[1]Persamaan diferensial yang bentuk umumnya $y^{'}+a(t)\,y=b(t)\,PD$ dengan faktor

Integrasi memiliki solusi $y = e^{-\int a(t)dt}\left(\int b(t)e^{\int a(t)dt}dt + C\right)$, C = Konstanta

Berdasarkan prinsip pembuktian induksi matematika, terlihat bahwa banyaknya kedatangan interval waktu t berdistribusi Poisson dengan persamaan fungsi peluang (fkp) :

$$P_n(t) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}, n = 0,1,2,...$$

Dengan rata-rata sama dengan variansi yaitu λt.

Sifat rerata, varians, dan fungsi pembangkit momen dari peubah acak $X : P(\lambda)$ yang berdistribusi Poisson adalah :

a. $\mu = E(X) = \lambda$

b. $\sigma^2 = Var(X) = \lambda$

c. $M_x(t) = e^{\lambda(e^t - 1)},\ t \in R.$

Bukti :

Untuk membuktikan sifat di atas terlebih dahulu menentukan fungsi pembangkit momen (fpm) dari peubah acak Poisson yaitu:

$$M_x(t) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} P(x)$$

$$= \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(e^t \lambda)^x}{x!}$$

$$= e^{-\lambda} e^{(et\lambda)}$$

$$= e^{-\lambda + et}$$

$$= e^{\lambda(et-1)}$$, untuk semua nilai t

Turunan pertama dan kedua dari fpm adalah

$$M_x(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)}$$

$$M_x^{'}(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)} \lambda e^t$$

$$M_x^{'}(t) = e^{\lambda\left(e^t - 1\right)} \lambda e^t + \lambda^{\left(e^t - 1\right)} \left(\lambda e^t\right)^2$$

Maka

$$\mu = E(X) = M_x^{'}(t)\big|_{t=0}$$

$$= e^{\lambda\left(e^t - 1\right)} \lambda e^t \,|_{t=0}$$

$$= e^{\lambda\left(e^0 - 1\right)} \lambda e^0$$

$$= e^0 \lambda$$

$$= \lambda$$

Dan

$$E\left(X^2\right) = M_x^{''}(t)\big|_{t=0}$$

$$= e^{\lambda\left(e^t - 1\right)} \lambda e^t + \lambda^{\left(e^t - 1\right)} \left(\lambda e^t\right)^2 \,|_{t=0}$$

$$= e^{\lambda(1-1)} \lambda + \lambda^{(1-1)} \lambda^2$$

$$= \lambda + \lambda^2$$

Sehingga

$$\sigma^2 = Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \lambda + \lambda^2 - (\lambda)^2 = \lambda$$

Jadi terbukti bahwa nilai rerata dan varians dari distribusi Poisson adalah sama.

3.2.2. Distribusi Waktu Antar Kedatangan

Interval waktu antara dua peristiwa kedatangan disebut sebagai waktu antar kedatangan. Setelah mengetahui distribusi banyak kedatangan adalah Poisson, maka selanjutnya dapat diperoleh distribusi waktu antar kedatangan. Misalkan $f(t)$ untuk $t > 0$ adalah fungsi peluang waktu antar kedatangan dan $F(t)$ didefinisikan sebagai fungsi distribusi kumulatif dari $f(t)$, dengan demikian

$$F(t) = \int_0^t f(u)\,du$$

Karena tidak ada kedatangan selama interval $(0, t]$ ekuivalen dengan waktu antar kedatangan satu peristiwa lebih besar dari t maka

$$P_0(t) = \int_t^\infty f(u)\,du = 1 - \int_0^t f(u)\,du = 1 - F(t)$$

Dari hasil (2.5.1.1), yakni $P_0(t) = e^{-\lambda t}$, sehingga

$$e^{-\lambda t} = 1 - F(t)$$

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

Pendiferensialan $F(t)$ terhadap t akan menghasilkan

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, t > 0 \\ 0 \quad\quad , t \leq 0 \end{cases} \qquad (3.2.2.1)$$

Ini menunjukkan bahwa untuk distribusi banyak kedatangan Poisson maka distribusi waktu antar kedatangan adalah berdistribusi Eksponensial dengan rata-rata $1/\lambda$ dan variansi $1/\lambda^2$.

Teorema

Jika X_n menyatakan ”waktu antar kedatangan” yaitu waktu yang dibutuhkan untuk memperoleh 1 peristiwa (1 sukses) antara waktu peristiwa (n-1) sampai dengan peristiwa ke-n dalam proses Poisson $\{N(t), t \geq 0\}$ dengan intensitas λ, maka $X_n = Exp(1/\lambda), n = 1, 2, \ldots$

3.2.3. Distribusi Waktu Pelayanan

Sesuai dengan notasi Kendall yang telah dikemukakan sebelumnya, distribusi waktu pelayanan dalam teori antian dapat bervariasi. Distribusi waktu pelayanan merupakan distribusi kontinu karena melibatkan selang waktu tertentu, ini berarti daerah hasilnya berupa interval pada garis bilangan real. Distribusi waktu pelayanan tersebut dapat berbentuk:

1. Distribusi Erlang

Peubah acak X dikatakan berdistribusi Erlang jika fungsi kepadatan pelunagnya berbentuk:

$$f(x)=\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}$$

Sifat rerata dan varians dari peubah acak yang berdistribusi Erlang $X : E(x;k,\lambda)$ adalah :

a. Rata-rata = $E(X)=\frac{k}{\lambda}$

b. Varians = $Var(X)=\frac{k}{\lambda^2}$

Bukti:

a. $E(X)=\int_0^\infty xf(x)dx$

$$=\int_0^\infty x\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}dx$$

$$=\lim_{p\to\infty}\int_0^p x\frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!}dx$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\lim_{p\to\infty}\int_0^p x^k e^{-\lambda x}dx$$

Terlebih dahulu diselesaikan $\lim\limits_{p\to\infty}\int_0^p x^k e^{-\lambda x}dx$ menggunakan integral parsial. Misalkan $u = x^k$ maka $du = kx^{k-1}dx$ dan $dv = e^{-\lambda x}dx$ maka $v = -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$, sehingga

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^p x^k e^{-\lambda x}dx = \lim_{p\to\infty}\left[-x^k \left.\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_0^p + \left(\frac{k}{\lambda}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-1}dx\right)\right]$$

$$= 0 + \frac{k}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-1}dx$$

$$= \frac{k}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-1}dx$$

Misalkan $u = x^{k-1}$ maka $du = (k-1)x^{k-2}dx$ dan $dv = e^{-\lambda x}dx$ maka $v = -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$, sehingga

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{k-1}dx = \lim_{p\to\infty}\left[-x^{k-1}\left.\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\right|_0^p + \left(\frac{k-1}{\lambda}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-2}dx\right)\right]$$

$$= 0 + \left[\frac{k-1}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-2}dx\right]$$

$$= \frac{(k-1)}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-2}dx$$

Misalkan $u = x^{k-2}$ maka $du = (k-2)x^{k-3}dx$ dan $dv = e^{-\lambda x}dx$ maka $v = -\dfrac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$, sehingga

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{k-2}dx=\lim_{p\to\infty}\left[-x^{k-2}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^p+\left(\frac{k-2}{\lambda}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-3}dx\right)\right]$$

$$=0+\left[\frac{k-2}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-3}dx\right]$$

$$=\frac{(k-2)}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-3}dx$$

Maka

$$E(X)=\int_0^\infty x\frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}dx$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\left(\frac{k}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-1}dx\right)$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{k}{\lambda}\left(\frac{(k-1)}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-2}dx\right)$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{k}{\lambda}\frac{(k-1)}{\lambda}\left(\frac{(k-2)}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-3}dx\right)$$

$$\vdots$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{k(k-1)(k-2)\ldots(k-(k-1))}{\lambda^k}\left[\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-k}dx\right]$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{k(k-1)(k-2)\ldots1}{\lambda^k}\left[\lim_{p\leftarrow\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}dx\right]$$

$$=\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\frac{k(k-1)!}{\lambda^k}\left[\lim_{p\leftarrow\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}dx\right]$$

$$=k\lim_{p\leftarrow\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}dx$$

$$= \frac{-k}{\lambda} \lim_{p \leftarrow \infty} e^{-\lambda x} \Big|_0^p$$

$$= \frac{k}{\lambda}$$

b. $E\left(X^2\right) = \int_0^\infty x^2 f(x) dx$

$$= \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx$$

$$= \lim_{p \to \infty} \int_0^p x^2 \frac{\lambda^k x^{k-1} e^{-\lambda x}}{(k-1)!} dx$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \lim_{p \to \infty} \int_0^p x^{k+1} e^{-\lambda x} dx$$

Terlebih dahulu diselesaikan $\lim_{p \to \infty} \int_0^p x^{k+1} e^{-\lambda x} dx$ menggunakan integral parsial. Misalkan $u = x^{k+1}$ maka $du = (k+1)x^k dx$ dan $dv = e^{-\lambda x} dx$ maka $v = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$, sehingga

$$\lim_{p \to \infty} \int_0^p x^{k+1} e^{-\lambda x} dx = \lim_{p \to \infty} \left[-x^{k+1} \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda} \Big|_0^p + \left(\frac{(k+1)}{\lambda} \int_0^p e^{-\lambda x} x^k dx \right) \right]$$

$$= 0 + \frac{(k+1)}{\lambda} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-\lambda x} x^k dx$$

$$= \frac{(k+1)}{\lambda} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-\lambda x} x^k dx$$

Misalkan $u = x^k$ maka $du = kx^{k-1}dx$ dan $dv = e^{-\lambda x}dx$ maka $v = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$,

sehingga

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^k dx = \lim_{p\to\infty}\left[-x^k \frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\bigg|_0^p + \left(\frac{k}{\lambda}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-1}dx\right)\right]$$

$$= 0 + \left[\frac{k}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-1}dx\right]$$

$$= \frac{k}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-1}dx$$

Misalkan $u = x^{k-1}$ maka $du = (k-1)x^{k-2}dx$ dan $dv = e^{-\lambda x}dx$ maka $v = -\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}$, sehingga

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{k-1}dx = \lim_{p\to\infty}\left[-x^{k-1}\frac{e^{-\lambda x}}{\lambda}\bigg|_0^p + \left(\frac{k-1}{\lambda}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-2}dx\right)\right]$$

$$= 0 + \left[\frac{k-1}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-2}dx\right]$$

$$= \frac{(k-1)}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^{k-2}dx$$

Maka

$$E(X^2) = \int_0^\infty x^2 \frac{\lambda^k x^{k-1}e^{-\lambda x}}{(k-1)!}dx$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!}\left(\frac{k+1}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\int_0^p e^{-\lambda x}x^k dx\right)$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{k+1}{\lambda} \left(\frac{k}{\lambda} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-\lambda x} x^{k-1} dx \right)$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{(k+1)k}{\lambda^2} \left(\frac{(k-1)}{\lambda} \lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-\lambda x} x^{k-2} dx \right)$$

$$\vdots$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{(k+1)k(k-1)\ldots(k-(k-1))}{\lambda^{k+1}} \left[\lim_{p \to \infty} \int_0^p e^{-\lambda x} x^{k-k} dx \right]$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{(k+1)k(k-1)\ldots 1}{\lambda^{k+1}} \left[\lim_{p \leftarrow \infty} \int_0^p e^{-\lambda x} dx \right]$$

$$= \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \frac{(k+1)k(k-1)!}{\lambda^{k+1}} \left[\lim_{p \leftarrow \infty} \int_0^p e^{-\lambda x} dx \right]$$

$$= -\frac{(k+1)k}{\lambda} \left[\lim_{p \leftarrow \infty} e^{-\lambda x} \Big|_0^p \right]$$

$$= -\frac{(k+1)k}{\lambda} \left[\lim_{p \leftarrow \infty} e^{-\lambda x} \Big|_0^p \right]$$

$$= -\frac{(k+1)k}{\lambda} \left(0 - \frac{1}{\lambda} \right)$$

$$= \frac{(k+1)k}{\lambda^2}$$

Dan

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{k(k+1)}{\lambda^2} - \left(\frac{k}{\lambda}\right)^2$$

$$= \frac{k}{\lambda^2}$$

2. Distribusi Eksponensial

Distribusi eksponensial merupakan kasus khusus dari distribusi Erlang dengan k=1. Oleh karena itu, peubah acak X dikatakan berdistribusi eksponensial $X : Eks(\lambda)$

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

Sifat rerata dan varians dari peubah acak yang berdistribusi Eksponensial $X : Eks(\lambda)$ adalah :

a. Rata-rata = $E(X) = \frac{1}{\lambda}$

b. Varians = $Var(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Bukti:

a. $E(X) = \int_0^\infty xf(x)dx$

$$= \int_0^\infty x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lim_{p\to\infty} \int_0^p x\lambda e^{-\lambda x} dx$$

Misalkan $u = x$ maka $du = dx$ dan $dv = \lambda e^{-\lambda x}dx$ maka $v = -e^{-\lambda x}$, sehingga

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^p x\lambda e^{-\lambda x}dx = \lim_{p\to\infty}\left[-xe^{-\lambda x}\Big|_0^p + \left(\int_0^p e^{-\lambda x}dx\right)\right]$$

$$= 0 + \left(\lim_{p\to\infty}\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^p\right)$$

$$= 0 - \left(-\frac{1}{\lambda}\right)$$

$$= \frac{1}{\lambda}$$

b. $E\left(X^2\right) = \int_0^\infty x^2 f(x)dx$

$$= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx$$

$$= \lim_{p\to\infty}\int_0^p x^2 \lambda e^{-\lambda x}dx$$

Misalkan $u = x^2$ maka $du = 2xdx$ dan $dv = \lambda e^{-\lambda x}dx$ maka $v = -e^{-\lambda x}$, sehingga

$$\lim_{p\to\infty}\int_0^p x^2 e^{-\lambda x}dx = \lim_{p\to\infty}\left[x^2\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^p + \frac{2}{\lambda}\left(\int_0^p e^{-\lambda x}xdx\right)\right]$$

$$= 0 + \frac{2}{\lambda}\lim_{p\to\infty}\frac{-e^{-\lambda x}}{\lambda}\Big|_0^p$$

$$= 0 - \left(-\frac{2}{\lambda^2}\right)$$

$$= \frac{2}{\lambda^2}$$

Dan

$$Var(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$= \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2$$

$$= \frac{1}{\lambda^2}$$

3. Distribusi Deterministik

Distribusi deterministik terbentuk jika waktu pelayanan bersifat kostan sehingga memiliki sifat rerata dan varians sebagai berikut :

a. Rata-rata = $E(T) = k$
b. Varians = $Var(T) = 0$

4. Distribusi *General*.

Distribusi *General* berarti distribusi waktu pelayanan dapat berupa sembarang distribusi peluang seperti, distribusi eksponensial, Erlang, Gamma dll.

3.3. Penentuan Ukuran-ukuran Kinerja Sistem Antrian

Sebelum memperoleh ukuran-ukuran kinerja sistem dari model (M_i /G_i /1) : (NPRP/∞/∞), perlu diketahui bahwa:

$$\rho_k = \lambda_k E_k(t) \qquad (1 \le k \le m)$$

dan

$$\sigma_k = \sum_{i=1}^{k} \rho_i \qquad\qquad (\sigma_0 \equiv 0, \sigma_m \equiv \rho)$$

Sistem dapat dikatakan stasioner jika $\sigma_m = \rho < 1$.

Kemudian, misalkan pelanggan dengan prioritas ke-*i* tiba ke dalam sistem saat t_0 dan dilayani pada saat t_1, maka waktu tunggunya adalah $T_q = t_1 - t$. Diasumsikan saat t_0 terdapat n_1 pelanggan prioritas ke-1, n_2 pelanggan untuk prioritas ke, n_3 pelanggan untuk prioritas ke-3 dan seterusnya. Dimisalkan S_0 adalah waktu yang diperlukan untuk melayani pelanggan yang sedang berada dalam pelayanan dan S_k adalah jumlah waktu yang diperlukan untuk melayani n_k. Selama waktu tunggu T_q, n_k' pelanggan prioritas ke-$k < i$ akan datang dan dilayani terlebih dahulu dari pada pelanggan prioritas ke-r dengan $r < k$. Jika Sk' merupakan jumlah waktu pelayanan dari semua n_k', maka

$$T_q = \sum_{k-1}^{i-1} S_k' + \sum_{k=1}^{i} S_k + S_0$$

Jika dari kedua ruas persamaa diambil ekspektasinya, maka

$$W_q^{(t)} \equiv E(T_q) = \sum_{k-1}^{i-1} E(S_k') + \sum_{k=1}^{i} E(S_k) + E(S_0)$$

Selanjutnya akan ditentukan nilai $E(S_0)$ sebagai berikut:

$E(S_0) = p$ (saat sistem sibuk) * E[S_0 | saat sistem sibuk]

Peluang saat sistem sedang sibuk adalah

$$\lambda^* \text{ (waktu pelayanan yang diharapkan) } = \lambda \sum_{k=1}^{i} \frac{\lambda_k}{\lambda} E_k(t) = \rho$$

dan

E[S_0|saat sistem sibuk] = $\sum_{k=1}^{1}$ {E[S0 | saat sistem sibuk dengan pelanggan prioritas ke-*k*]* *p*(pelanggan yang memilki prioritas ke-*k*)}.

$$E[S_0|\text{saat sistem sibuk}] = \sum_{k=1}^{i} E_i(t) \frac{\rho_k}{\rho}$$

maka

$$E[S_0] = \rho \sum_{k=1}^{i} E_i(t) \frac{\rho_k}{\rho}$$

$$= \sum_{k=1}^{i} E_i(t) \rho_k \qquad (3.3.1)$$

Karena n_k dan waktu pelayanan $S_n^{(k)}$ adalah saling bebas, maka

$$E[S_k] = E[n_k S_k^{(n)}] = E[n_k]\, E[S_k^n] = E[n_k]\, E_k(t)$$

Sesuai dengan rumus Little, didapat

$$E[S_k] = \lambda_k W_q^{(k)} E_k(t) = \rho_k W_q^{(k)}$$

Dan

$$E[S_k^{'}] = E[n_k^{'}]\ \ E_k(t)$$

$$= \lambda_k W_q^{(i)} E_k(t)$$

Sehingga

$$W_q^{(i)} = \sum_{k=1}^{i=1} \rho_k W_q^{(i)} + \sum_{k=1}^{i=1} \rho_k W_q^{(k)} + E[S_0]$$

atau

$$W_q^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{i} \rho_k W_q^{(k)} + E[S_0]}{1-\sigma_{i-1}} \qquad (3.3.2)$$

berdasarkan Cobham (1954), solusi persamaan diatas adalah

$$W_q^{(i)} = \frac{E[S_0]}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

Dengan menggunakan persamaan (3.3.1) diperoleh rata-rata waktu menunggu adalah

$$W_q^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{i} E_k(t)\rho_k}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

$$= \frac{\sum_{k=1}^{i} E_k{}^2(t)\lambda_k}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} \qquad (3.3.3)$$

Dan rata-rata jumlah pengantri dalam antrian adalah

$$L_q^{(i)} = \frac{\lambda_k \sum_{k=1}^{i} E_k(t)\lambda_k}{(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)} \qquad (3.3.4)$$

$$= \lambda_k W_q^{(i)}$$

Persamaan (3.3.3) dan (3.3.4) digunakan untuk menentukan rata-rata waktu menunggu dalam antrian dengan disiplin pelayanan berdistribusi eksponensial.

Sedangkan untuk distribusi pelayanan secara umum, ukuran-ukuran kinerja sistem dapat ditentukan menggunakan persamaan berikut:

1. Rata-rata waktu menunggu dalam antrian adalah

$$W_q^{(i)} = \frac{\sum_{k=1}^{i} \lambda_k \left(E_k{}^2(t) + v_k(t)\right)}{2(1-\sigma_{i-1})(1-\sigma_i)}$$

2. Rata-rata waktu menunggu dalam sistem adalah

$$W_s^{(i)} = W_q^{(i)} + E_k(t)$$

3. Rata-rata jumlah pengantri yang menunggu dalam antrian adalah

$$L_q^{(i)} = \lambda_k \mathrm{W}_\mathrm{q}^{(\mathrm{i})}$$

4. Rata-rata jumlah pengantri yang menunggu dalam antrian adalah

$$L_s^{(i)} = L_q^{(i)} + \rho_k$$