BAB III

QUATERNION DAN APLIKASINYA PADA ROTASI 3D

3.1 Aljabar Quaternion

Misalkan $\mathbb{R}^4$ adalah ruang vektor berdimensi empat atas bilangan real. Dengan memilih basis ortonormal $e_0 = (1,0,0,0)$, $e_1 = (0,1,0,0)$, $e_2 = (0,0,1,0)$ dan $e_3 = (0,0,0,1)$, suatu vektor $q = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari basis e_0, e_1, e_2 dan e_3, yaitu $q = ae_0 + be_1 + ce_2 + de_3$. Adapun matriks representasi untuk vektor $q = (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ didefinisikan dengan

$$q = \begin{bmatrix} a & -b & -c & -d \\ b & a & -d & c \\ c & d & a & -b \\ d & -c & b & a \end{bmatrix}.$$

Melalui penulisan dalam bentuk matriks, elemen-elemen basis akan mempunyai bentuk

$$e_0 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, e_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Didefinisikan bahwa $e_0 = 1$, $e_1 = i$, $e_2 = j$ dan $e_3 = k$. Dengan menggunakan operasi perkalian pada matriks, diperoleh tabel berikut.

Tabel 3.1 Perkalian Elemen Basis

$\cdot$	**1**	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
1	1	i	j	k
$\boldsymbol{i}$	i	-1	k	$-j$
$\boldsymbol{j}$	j	$-k$	-1	i
$\boldsymbol{k}$	k	j	$-i$	-1

Berdasarkan hasil di atas, vektor $q=(a,b,c,d)\in \mathbb{R}^4$ kemudian dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari elemen basis 1, i, j dan k, yaitu $q=a+bi+cj+dk$ di mana perkalian elemen basisnya memenuhi hubungan $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$. Bilangan di $\mathbb{R}^4$ dengan bentuk $q=a+bi+cj+dk$, di mana perkalian elemen basisnya memenuhi hubungan $i^2=j^2=k^2=ijk=-1$ disebut dengan quaternion. Selanjutnya, himpunan dari semua quaternion dinotasikan dengan H.

Pada quaternion $q=a+bi+cj+dk$, nilai a disebut dengan bagian skalar quaternion q sedangkan nilai $bi+cj+dk$ disebut dengan bagian vektor quaternion q. Jika bagian skalar quaternion q bernilai nol, maka quaternion q disebut dengan quaternion imajiner murni sedangkan jika bagian vektor quaternion q bernilai nol, maka quaternion q disebut dengan quaternion skalar. Dari uraian di atas, diperoleh bahwa vektor di $\mathbb{R}^3$ merupakan suatu quaternion imajiner murni.

Definisi 3.1.1

Untuk sebarang quaternion $q_1, q_2 \in H$, *maka operasi-operasi berikut berlaku.*

1. $q_1 \pm q_2 = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2)i + (c_1 \pm c_2)j + (d_1 \pm d_2)k$;
2. $rq_1 = ra_1 + rb_1 i + rc_1 j + rd_1 k$ *untuk setiap* $r \in \mathbb{R}$;
3. $q_1 q_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2)i +$

$$(a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2)j + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2)k.$$

Contoh:

Jika $q_1 = 4 + 3i + 5j - k$ dan $q_2 = 6 - 5i + 3j + 4k$, tentukanlah $q_1 + q_2$, $3q_2$, dan $q_1 q_2$.

Penyelesaian:

Misalkan $q_1 = 4 + 3i + 5j - k$ dan $q_2 = 6 - 5i + 3j + 4k$. Diperoleh,

$$q_1 + q_2 = (4 + 3i + 5j - k) + (6 - 5i + 3j + 4k)$$

$$= (4+6) + (3-5)i + (5+3)j + (-1+4)k = 10 - 2i + 8j + 3k$$

$$3q_2 = 3(6 - 5i + 3j + 4k) = 18 - 15i + 9j + 12k$$

$$q_1 q_2 = (4 + 3i + 5j - k)(6 - 5i + 3j + 4k)$$

$$= (24+15-15+4) + (-20+18+20+3)i + (12+30-12+5)j + (16-6+9+25)k$$

$$= 28 + 21i + 35j + 44k.$$

Dengan memperhatikan kembali Tabel 3.1, diperoleh bahwa $ij = k$ dan $ji = -k$. Ini menunjukkan bahwa perkalian pada quaternion tidak bersifat komutatif. Jika q_{1s} dan q_{2s} masing-masing menyatakan bagian skalar quaternion q_1 dan q_2 serta $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ masing-masing menyatakan bagian vektor quaternion q_1 dan q_2, maka hasil kali quaternion q_1 dan q_2 dapat dinyatakan sebagai

$$q_1q_2 = q_{1s}q_{2s} - \vec{q}_{1v}\cdot\vec{q}_{2v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + \vec{q}_{1v}\times\vec{q}_{2v}.$$

Ini memperlihatkan bahwa ketidakberlakuan sifat komutatif pada perkalian dua quaternion berasal dari hasil kali silang $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$. Hasil ini kemudian memotivasi adanya teorema berikut.

Teorema 3.1.2

Untuk sebarang quaternion $q_1, q_2 \in H$, $q_1q_2 = q_2q_1$ *jika dan hanya jika* $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ *kolinear.*

Bukti:

Ambil sebarang $q_1, q_2 \in H$.

$(\Rightarrow)$

Misalkan $q_1q_2 = q_2q_1$, akan ditunjukkan bahwa $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ kolinear. Perhatikan bahwa

$$q_1q_2 = q_2q_1$$

$$\Leftrightarrow q_{1s}q_{2s} - \vec{q}_{1v}\cdot\vec{q}_{2v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + \vec{q}_{1v}\times\vec{q}_{2v} = q_{2s}q_{1s} - \vec{q}_{2v}\cdot\vec{q}_{1v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{2v}\times\vec{q}_{1v}.$$

Berdasarkan Teorema 2.5.4, diperoleh bahwa $\vec{q}_{1v}\cdot\vec{q}_{2v} = \vec{q}_{2v}\cdot\vec{q}_{1v}$. Akibatnya, $q_{1s}q_{2s} - \vec{q}_{1v}\cdot\vec{q}_{2v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} = q_{2s}q_{1s} - \vec{q}_{2v}\cdot\vec{q}_{1v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + q_{1s}\vec{q}_{2v}$ sehingga haruslah $\vec{q}_{1v}\times\vec{q}_{2v} = \vec{q}_{2v}\times\vec{q}_{1v}$. Diperoleh,

$$\vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{2v} = \vec{q}_{2v} \times \vec{q}_{1v}$$

$\Leftrightarrow \vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{2v} = -\left(\vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{2v}\right)$ (berdasarkan Teorema 2.7.2)

$$\Leftrightarrow 2\left(\vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{2v}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{2v} = 0 .$$

Berdasarkan Akibat 2.7.4, diperoleh bahwa $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ kolinear. Karena $q_1, q_2 \in H$ sebarang, maka untuk setiap $q_1, q_2 \in H$ dengan $q_1 q_2 = q_2 q_1$ berlaku $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ kolinear.

$(\Leftarrow)$

Misalkan $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ kolinear, akan ditunjukkan bahwa $q_1 q_2 = q_2 q_1$. Karena $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ kolinear, maka berdasarkan Akibat 2.7.4 diperoleh bahwa $\vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{2v} = 0$. Akibatnya,

$$q_1 q_2 = q_{1s} q_{2s} - \vec{q}_{1v} \cdot \vec{q}_{2v} + q_{1s} \vec{q}_{2v} + q_{2s} \vec{q}_{1v}$$

$= q_{2s} q_{1s} - \vec{q}_{2v} \cdot \vec{q}_{1v} + q_{2s} \vec{q}_{1v} + q_{1s} \vec{q}_{2v}$ karena $\vec{q}_{1v} \cdot \vec{q}_{2v} = \vec{q}_{2v} \cdot \vec{q}_{1v}$

$$= q_2 q_1 .$$

Karena $q_1, q_2 \in H$ sebarang, maka untuk setiap $q_1, q_2 \in H$ dengan $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ kolinear berlaku $q_1 q_2 = q_2 q_1$. ■

Adapun operasi pembagian pada H didefinisikan secara terpisah melalui definisi berikut.

Definisi 3.1.3

Diberikan sebarang quaternion $q_1, q_2 \in H$. *Jika* $q_2 \neq 0$ *membagi* q_1 *dinotasikan dengan* $q_1 q_2^{-1}$, *maka* $q_1 q_2^{-1}$ *didefinisikan dengan*

$$q_1 q_2^{-1} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 + d_1d_2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2} + \frac{b_1a_2 + d_1c_2 - a_1b_2 - c_1d_2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2} i$$

$$+ \frac{b_1d_2 + c_1a_2 - a_1c_2 - d_1b_2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2} j + \frac{c_1b_2 + d_1a_2 - a_1d_2 - b_1c_2}{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 + d_2^2} k .$$

Contoh:

Jika $q_1 = 4 + 3i + 5j - k$ dan $q_2 = 6 - 5i + 3j + 4k$, tentukanlah $q_1 q_2^{-1}$.

Penyelesaian:

Misalkan $q_1 = 4 + 3i + 5j - k$ dan $q_2 = 6 - 5i + 3j + 4k$. Diperoleh,

$$q_1 q_2^{-1} = \frac{24 - 15 + 15 - 4}{6^2 + (-5)^2 + 3^2 + 4^2} + \frac{18 - 3 + 20 - 20}{6^2 + (-5)^2 + 3^2 + 4^2} i + \frac{12 + 30 - 12 - 5}{6^2 + (-5)^2 + 3^2 + 4^2} j + \frac{-25 - 6 - 16 - 9}{6^2 + (-5)^2 + 3^2 + 4^2} k$$

$$= \frac{20}{36 + 25 + 9 + 16} + \frac{15}{36 + 25 + 9 + 16} i + \frac{25}{36 + 25 + 9 + 16} j - \frac{56}{36 + 25 + 9 + 16} k$$

$$= \frac{20}{86} + \frac{15}{86} i + \frac{25}{86} j - \frac{56}{86} k = \frac{10}{43} + \frac{15}{86} i + \frac{25}{86} j - \frac{28}{43} k .$$

Definisi selanjutnya akan menjelaskan kemungkinan lain tentang hasil bagi dari dua quaternion.

Definisi 3.1.4

Diberikan sebarang quaternion $q_1, q_2 \in H$. *Jika* $q_2 \neq 0$ *membagi* q_1, *maka hasil baginya adalah salah satu dari* $q_1 q_2^{-1}$ *atau* $q_2^{-1} q_1$.

Selain operasi seperti yang telah dijelaskan di atas, himpunan H juga mempunyai operasi yang lain yaitu operasi konjuget. Berikut ini adalah definisi operasi konjuget pada H.

Definisi 3.1.5

Diberikan sebarang quaternion $q = a + bi + cj + dk \in H$. *Konjuget dari quaternion* q *didefinisikan dengan* $\overline{q} = a - bi - cj - dk$.

Selanjutnya, sifat-sifat operasi konjuget pada H disajikan melalui teorema berikut.

Teorema 3.1.6

Diberikan sebarang quaternion $q_1, q_2 \in H$. *Operasi konjuget pada quaternion adalah:*

1. $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2}$;
2. $\overline{rq_1} = r\overline{q_1}$ *untuk setiap* $r \in \mathbb{R}$;
3. $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1}$.

Bukti:

Ambil sebarang quaternion $q_1, q_2 \in H$ dan $r \in \mathbb{R}$, di mana $q_1 = a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k$ dan $q_2 = a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k$. Diperoleh:

1. $$\begin{aligned}\overline{q_1 + q_2} &= \overline{(a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i + (c_1 + c_2)j + (d_1 + d_2)k} \\ &= (a_1 + a_2) - (b_1 + b_2)i - (c_1 + c_2)j - (d_1 + d_2)k \\ &= a_1 + a_2 - b_1 i - b_2 i - c_1 j - c_2 j - d_1 k - d_2 k \\ &= a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k + a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k\end{aligned}$$

$$= \overline{a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k} + \overline{a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k}$$

$$= \overline{q_1} + \overline{q_2} \,;$$

2. $\overline{rq_1} = \overline{ra_1 + rb_1 i + rc_1 j + rd_1 k} = ra_1 - rb_1 i - rc_1 j - rd_1 k$

$$= r\left(a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k\right) = r\left(\overline{a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k}\right) = r\overline{q_1} \,;$$

3. $\overline{q_1 q_2} = \overline{\left(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k\right)\left(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k\right)}$

$$= \overline{\left(a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2\right) + \left(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2\right) i +}$$

$$\overline{\left(a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2\right) j + \left(a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2\right) k}$$

$$= \left(a_1 a_2 - b_1 b_2 - c_1 c_2 - d_1 d_2\right) - \left(a_1 b_2 + b_1 a_2 + c_1 d_2 - d_1 c_2\right) i$$

$$- \left(a_1 c_2 + c_1 a_2 - b_1 d_2 + d_1 b_2\right) j - \left(a_1 d_2 + d_1 a_2 + b_1 c_2 - c_1 b_2\right) k$$

$$= \left(a_2 - b_2 i - c_2 j - d_2 k\right)\left(a_1 - b_1 i - c_1 j - d_1 k\right)$$

$$= \overline{\left(a_2 + b_2 i + c_2 j + d_2 k\right)}\,\overline{\left(a_1 + b_1 i + c_1 j + d_1 k\right)} = \overline{q_2}\,\overline{q_1} \,.$$

Karena $q_1, q_2 \in H$ dan $r \in \mathbb{R}$ sebarang, maka untuk setiap $q_1, q_2 \in H$ dan $r \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $\overline{q_1 + q_2} = \overline{q_1} + \overline{q_2} \,;$
2. $\overline{rq_1} = r\overline{q_1} \,;$
3. $\overline{q_1 q_2} = \overline{q_2}\,\overline{q_1} \,.$ ■

Selanjutnya, akan dibahas tentang modulus dan sifat-sifatnya pada quaternion.

Definisi 3.1.7

Modulus dari quaternion $q = a + bi + cj + dk \in H$ *didefinisikan dengan* $|q| = \sqrt{q\overline{q}} = \sqrt{\overline{q}q} = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$.

Adapun sifat-sifat modulus pada quaternion disajikan pada teorema berikut.

Teorema 3.1.8

Diberikan sebarang quaternion $q_1, q_2 \in H$ *, maka:*

1. $|rq_1| = |r||q_1|$ *untuk setiap* $r \in \mathbb{R}$ *;*
2. $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$.

Bukti:

Ambil sebarang $q_1, q_2 \in H$ dan $r \in \mathbb{R}$. Diperoleh:

1. $|rq_1| = \sqrt{(rq_1)\left(\overline{rq_1}\right)} = \sqrt{rq_1 r\overline{q_1}} = \sqrt{r^2 q_1 \overline{q_1}} = \sqrt{r^2 |q_1|^2} = |r||q_1|$;
2. $|q_1 q_2| = \sqrt{(q_1 q_2)\left(\overline{q_1 q_2}\right)} = \sqrt{q_1 q_2 \overline{q_2}\,\overline{q_1}} = \sqrt{q_1 |q_2|^2 \overline{q_1}} = \sqrt{q_1 \overline{q_1} |q_2|^2}$

$$= \sqrt{|q_1|^2 |q_2|^2} = |q_1||q_2| .$$

Karena $q_1, q_2 \in H$ dan $r \in \mathbb{R}$ sebarang, maka untuk setiap $q_1, q_2 \in H$ dan $r \in \mathbb{R}$ berlaku:

1. $|rq_1| = |r||q_1|$;
2. $|q_1 q_2| = |q_1||q_2|$. ■

Teorema 3.1.9

Fungsi yang didefinisikan dengan

$d : H \times H \to \mathbb{R}$

$(q_1, q_2) \mapsto |q_1 - q_2|$

merupakan suatu metrik pada H *sehingga* (H, d) *adalah suatu ruang metrik.*

Bukti:

Ambil sebarang quaternion $q_1, q_2, q_3 \in H$. Perhatikan bahwa:

1. Jelas bahwa

$$d(q_1, q_2) = |q_1 - q_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2} \geq 0 .$$

2. Akan ditunjukkan bahwa $d(q_1, q_2) = 0$ jika dan hanya jika $q_1 = q_2$.

$(\Rightarrow)$

Misalkan $d(q_1, q_2) = 0$, akan ditunjukkan bahwa $q_1 = q_2$.

Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned} d(q_1, q_2) = 0 &\Leftrightarrow |q_1 - q_2| = 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2} = 0 \\ &\Leftrightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 + (c_1 - c_2)^2 + (d_1 - d_2)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow a_1 = a_2, b_1 = b_2, c_1 = c_2, d_1 = d_2 \\ &\Rightarrow q_1 = q_2 . \end{aligned}$$

Terbukti bahwa jika $d(q_1, q_2) = 0$ maka $q_1 = q_2$.

$(\Leftarrow)$

Misalkan bahwa $q_1 = q_2$, akan ditunjukkan bahwa $d(q_1, q_2) = 0$.

Perhatikan bahwa

$$d(q_1, q_2) = |q_1 - q_2| = |0 + 0i + 0j + 0k| = 0.$$

Terbukti bahwa jika $q_1 = q_2$ maka $d(q_1, q_2) = 0$.

Berdasarkan penjelasan di atas, terbukti bahwa $d(q_1, q_2) = 0$ jika dan hanya jika $q_1 = q_2$.

3. $d(q_1, q_2) = |q_1 - q_2| = |q_2 - q_1| = d(q_2, q_1)$.
4. $d(q_1, q_2) = |q_1 - q_2| = |q_1 - q_3 + q_3 - q_2|$

$$\leq |q_1 - q_3| + |q_3 - q_2| = d(q_1, q_3) + d(q_3, q_2).$$

Karena $q_1, q_2, q_3 \in H$ sebarang, maka sifat 1 sampai dengan 4 berlaku untuk setiap $q_1, q_2, q_3 \in H$. Berdasarkan Definisi 2.8.1, diperoleh bahwa d adalah suatu metrik pada H sehingga (H, d) adalah suatu ruang metrik. ■

Modulus dari suatu quaternion q memainkan peranan penting dalam pembahasan selanjutnya. Jika q_{1s} dan q_{2s} masing-masing menyatakan bagian skalar quaternion q_1 dan q_2 serta $\vec{q}_{1v}$ dan $\vec{q}_{2v}$ masing-masing menyatakan bagian vektor quaternion q_1 dan q_2, maka hasil bagi quaternion q_1 oleh q_2 pada Definisi 3.1.3 dapat dinyatakan sebagai

$$q_1 q_2^{-1} = \frac{q_{1s} q_{2s} + \vec{q}_{1v} \cdot \vec{q}_{2v} - q_{1s} \vec{q}_{2v} + q_{2s} \vec{q}_{1v} - \vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{2v}}{|q_{2s} + \vec{q}_{2v}|^2}.$$

Suatu quaternion dengan modulus satu disebut dengan versor. Jika $q \in H$ dan $q \neq 0$, maka versor dari q didefinisikan dengan $U_q = \frac{q}{|q|}$. Selanjutnya, akan ditentukan $q^{-1} \in H$ sedemikian sehingga $qq^{-1} = q^{-1}q = 1$. Karena $q\overline{q} = \overline{q}q = |q|^2$, maka $q^{-1} = \frac{\overline{q}}{|q|^2}$. Melalui hasil ini, operasi pembagian pada Definisi 3.1.3 dapat juga dituliskan dalam bentuk $q_1 q_2^{-1} = \frac{q_1 \overline{q_2}}{|q_2|^2}$. Selanjutnya, hasil yang telah diperoleh sejauh ini memotivasi adanya teorema berikut.

Teorema 3.1.10

Himpunan H dengan operasi jumlah dan hasil kalinya merupakan suatu division ring.

Bukti:

1. Akan ditunjukkan bahwa H dengan operasi jumlah yang didefinisikan padanya membentuk suatu grup komutatif. Perhatikan bahwa:
   a. Untuk setiap $q_1, q_2, q_3 \in H$ berlaku $(q_1 + q_2) + q_3 = q_1 + (q_2 + q_3)$;
   b. Terdapat $0 = 0 + 0i + 0j + 0k \in H$ sedemikian sehingga untuk setiap $q \in H$ berlaku $0 + q = q = q + 0$;
   c. Untuk setiap $q \in H$, terdapat $-q \in H$ sedemikian sehingga berlaku $q + (-q) = 0 = -q + q$;
   d. Untuk setiap $q_1, q_2 \in H$ berlaku $q_1 + q_2 = q_2 + q_1$.

Berdasarkan a sampai dengan d, diperoleh bahwa H dengan operasi jumlah yang didefinisikan padanya membentuk suatu grup komutatif.

2. Akan ditunjukkan bahwa $H-\{0\}$ dengan operasi kali yang didefinisikan padanya membentuk suatu grup. Perhatikan bahwa:

   a. Untuk setiap $q_1, q_2, q_3 \in H-\{0\}$ berlaku $(q_1 q_2) q_3 = q_1 (q_2 q_3)$;

   b. Terdapat $1 = 1 + 0i + 0j + 0k \in H-\{0\}$ sedemikian sehingga untuk setiap $q \in H-\{0\}$ berlaku $1 \cdot q = q = q \cdot 1$;

   c. Untuk setiap $q \in H-\{0\}$, terdapat $q^{-1} = \dfrac{\overline{q}}{|q|^2} \in H-\{0\}$ sedemikian sehingga $qq^{-1} = 1 = q^{-1}q$.

   Berdasarkan a sampai dengan c, diperoleh bahwa H dengan operasi kali yang didefinisikan padanya membentuk suatu grup.

3. Akan ditunjukkan bahwa H memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan. Ambil sebarang $q_n = q_{ns} + \vec{q}_{nv} \in H$, di mana $n = 1, 2, 3$. Perhatikan bahwa

$$\begin{aligned}
q_1(q_2 + q_3) &= (q_{1s} + \vec{q}_{1v})\left[(q_{2s} + \vec{q}_{2v}) + (q_{3s} + \vec{q}_{3v})\right] \\
&= (q_{1s} + \vec{q}_{1v})\left[(q_{2s} + q_{3s}) + (\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{3v})\right] \\
&= q_{1s}(q_{2s} + q_{3s}) - \vec{q}_{1v} \cdot (\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{3v}) + q_{1s}(\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{3v}) + (q_{2s} + q_{3s})\vec{q}_{1v} + \\
&\quad \vec{q}_{1v} \times (\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{3v}) \\
&= q_{1s}q_{2s} + q_{1s}q_{3s} - (\vec{q}_{1v} \cdot \vec{q}_{2v} + \vec{q}_{1v} \cdot \vec{q}_{3v}) + q_{1s}\vec{q}_{2v} + q_{1s}\vec{q}_{3v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + q_{3s}\vec{q}_{1v} \\
&\quad + \vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{2v} + \vec{q}_{1v} \times \vec{q}_{3v} \text{ (berdasarkan Teorema 2.5.4 dan 2.7.2)}
\end{aligned}$$

$$= q_{1s}q_{2s} + q_{1s}q_{3s} - \vec{q}_{1v}\cdot\vec{q}_{2v} - \vec{q}_{1v}\cdot\vec{q}_{3v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + q_{1s}\vec{q}_{3v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + q_{3s}\vec{q}_{1v}$$

$$+\vec{q}_{1v}\times\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{1v}\times\vec{q}_{3v}$$

$$= q_{1s}q_{2s} - \vec{q}_{1v}\cdot\vec{q}_{2v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + \vec{q}_{1v}\times\vec{q}_{2v} + q_{1s}q_{3s} - \vec{q}_{1v}\cdot\vec{q}_{3v}$$

$$+q_{1s}\vec{q}_{3v} + q_{3s}\vec{q}_{1v} + \vec{q}_{1v}\times\vec{q}_{3v}$$

$$= (q_{1s} + \vec{q}_{1v})(q_{2s} + \vec{q}_{2v}) + (q_{1s} + \vec{q}_{1v})(q_{3s} + \vec{q}_{3v}) = q_1q_2 + q_1q_3 \text{ dan}$$

$$(q_2 + q_3)q_1 = \left[(q_{2s} + \vec{q}_{2v}) + (q_{3s} + \vec{q}_{3v})\right](q_{1s} + \vec{q}_{1v})$$

$$= \left[(q_{2s} + q_{3s}) + (\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{3v})\right](q_{1s} + \vec{q}_{1v})$$

$$= (q_{2s} + q_{3s})q_{1s} - (\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{3v})\cdot\vec{q}_{1v} + (q_{2s} + q_{3s})\vec{q}_{1v} + q_{1s}(\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{3v}) +$$

$$(\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{3v})\times\vec{q}_{1v}$$

$$= q_{2s}q_{1s} + q_{3s}q_{1s} - (\vec{q}_{2v}\cdot\vec{q}_{1v} + \vec{q}_{3v}\cdot\vec{q}_{1v}) + q_{2s}\vec{q}_{1v} + q_{3s}\vec{q}_{1v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + q_{1s}\vec{q}_{3v}$$

$$+\vec{q}_{2v}\times\vec{q}_{1v} + \vec{q}_{3v}\times\vec{q}_{1v} \text{ (berdasarkan Teorema 2.5.4 dan 2.7.2)}$$

$$= q_{2s}q_{1s} + q_{3s}q_{1s} - \vec{q}_{2v}\cdot\vec{q}_{1v} - \vec{q}_{3v}\cdot\vec{q}_{1v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + q_{3s}\vec{q}_{1v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + q_{1s}\vec{q}_{3v}$$

$$+\vec{q}_{2v}\times\vec{q}_{1v} + \vec{q}_{3v}\times\vec{q}_{1v}$$

$$= q_{2s}q_{1s} - \vec{q}_{2v}\cdot\vec{q}_{1v} + q_{2s}\vec{q}_{1v} + q_{1s}\vec{q}_{2v} + \vec{q}_{2v}\times\vec{q}_{1v} + q_{3s}q_{1s} - \vec{q}_{3v}\cdot\vec{q}_{1v}$$

$$+q_{3s}\vec{q}_{1v} + q_{1s}\vec{q}_{3v} + \vec{q}_{3v}\times\vec{q}_{1v}$$

$$= (q_{2s} + \vec{q}_{2v})(q_{1s} + \vec{q}_{1v}) + (q_{3s} + \vec{q}_{3v})(q_{1s} + \vec{q}_{1v}) = q_2q_1 + q_3q_1.$$

Karena $q_1, q_2, q_3 \in H$ sebarang, maka berdasarkan 3 diperoleh bahwa H memenuhi sifat distributif perkalian terhadap penjumlahan.

Berdasarkan 1 sampai dengan 3, diperoleh bahwa H dengan operasi jumlah dan hasil kalinya merupakan suatu *division ring*. ■

3.2 Quaternion sebagai Pasangan Terurut dari Bilangan Kompleks

Diberikan $\mathbb{C}^2$ sebagai suatu ruang vektor berdimensi dua atas bilangan kompleks. Pilih basis 1 dan j sedemikian sehingga suatu vektor $(a+bi, c+di)$ di $\mathbb{C}^2$ dapat dituliskan sebagai kombinasi linear dari basis 1 dan j, yaitu $(a+bi)+(c+di)j$. Dengan menggunakan hukum distributif dan perkalian elemen basis pada Tabel 3.1, diperoleh

$$(a+bi)+(c+di)j = a+bi+cj+dk.$$

Kemudian, suatu vektor $(a+bi, c+di)$ di $\mathbb{C}^2$ bersesuaian dengan quaternion $a+bi+cj+dk$. Jika setiap anggota dari $\mathbb{C}^2$ ditulis sebagai pasangan terurut dan quaternion sebagai *quadruple*, diperoleh hubungan

$$(a+bi, c+di) \leftrightarrow (a,b,c,d).$$

3.3 Akar Kuadrat dari -1

Terdapat dua bilangan kompleks di $\mathbb{C}$, yaitu i dan $-i$ yang kuadratnya sama dengan -1. Jika hal tersebut dibicarakan di H, maka terdapat tak berhingga banyak akar kuadrat dari -1. Untuk melihat hal tersebut, diberikan $q = a+bi+cj+dk \in H$ dengan $q^2 = -1$. Ini berarti bahwa

$$q^2 = (a+bi+cj+dk)^2 = a^2-b^2-c^2-d^2+2abi+2acj+2adk = -1.$$

Diperoleh, $a^2-b^2-c^2-d^2=-1$, $2ab=0$, $2ac=0$, dan $2ad=0$. Oleh karena itu, haruslah $b=c=d=0$ atau $a=0$.

Kasus 1: Jika $b = c = d = 0$, maka $a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = a^2 = -1$. Hal ini jelas tidak mungkin karena $a \in \mathbb{R}$.

Kasus 2: Jika $a = 0$, maka $b^2 + c^2 + d^2 = 1$.

Berdasarkan kasus 2, diperoleh bahwa kuadrat suatu quaternion adalah -1 jika dan hanya jika quaternion tersebut merupakan suatu quaternion imajiner murni satuan. Solusi quaternion untuk akar kuadrat dari -1 ini mencakup setiap titik pada permukaan dari *sphere* satuan di $\mathbb{R}^3$.

3.4 Bentuk Kutub Quaternion

Secara khusus, bagian ini akan menjelaskan tentang bentuk kutub dari suatu quaternion. Namun, seperti telah dijelaskan pada bagian Pendahuluan bahwa bentuk kutub yang dibicarakan pada bagian ini dibatasi hanya untuk bentuk kutub klasik dari suatu quaternion.

Diberikan quaternion $q \in H$ dengan $q \neq 0$. Karena $q = q_s + \vec{q}_v$, maka q dapat dituliskan sebagai $q = q_s + \vec{q}_v = |q|\left(\frac{q_s}{|q|} + \frac{\vec{q}_v}{|\vec{q}_v|} \cdot \frac{|\vec{q}_v|}{|q|}\right)$, di mana $n = \frac{\vec{q}_v}{|\vec{q}_v|}$ menyatakan vektor satuan dari bagian vektor quaternion q. Karena ${q_s}^2 + |\vec{q}_v|^2 = |q|^2$, maka $\frac{q_s}{|q|}$ dapat diinterpretasikan sebagai kosinus dari suatu sudut real dan $\frac{|\vec{q}_v|}{|q|}$ dapat diinterpretasikan sebagai sinus dengan sudut yang sama. Jika sudut yang dimaksud adalah θ, maka

$$q = q_s + \vec{q}_v = |q|\left(\frac{q_s}{|q|} + \frac{\vec{q}_v}{|\vec{q}_v|}\cdot\frac{|\vec{q}_v|}{|q|}\right) = |q|(\cos\theta + n\sin\theta) \qquad \ldots (1)$$

Di sisi lain, bentuk deret untuk $e^{n\theta}$ adalah

$$e^{n\theta} = 1 + \frac{n\theta}{1!} + \frac{(n\theta)^2}{2!} + \ldots + \frac{(n\theta)^k}{k!} + \ldots .$$

Karena n adalah quaternion imajiner murni satuan, maka berdasarkan penjelasan sebelumnya diperoleh bahwa $n^2 = -1$. Akibatnya,

$$\begin{aligned}
e^{n\theta} &= 1 + \frac{n\theta}{1!} + \frac{(n\theta)^2}{2!} + \ldots + \frac{(n\theta)^k}{k!} + \ldots \\
&= 1 + \frac{n\theta}{1!} - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{n\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + \ldots\right) + \frac{n\theta}{1!} - \frac{n\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{n(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \ldots + \frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + \ldots\right) + n\left(\frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} + \ldots\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k}}{(2k)!} + n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k\theta^{2k+1}}{(2k+1)!} \\
&= \cos\theta + n\sin\theta \qquad \ldots (2)
\end{aligned}$$

Berdasarkan (1) dan (2), diperoleh

$$q = |q|(\cos\theta + n\sin\theta) = |q|e^{n\theta}.$$

Jika quaternion q dinyatakan dalam bentuk $q = |q|(\cos\theta + n\sin\theta) = |q|e^{n\theta}$, maka quaternion q telah dinyatakan dalam bentuk kutub. Dalam hal ini, besarnya sudut θ dibatasi hanya pada interval $[0,\pi]$. Ini disebabkan karena modulus dari bagian vektor suatu quaternion selalu bernilai positif. Hasil ini kemudian memotivasi adanya teorema berikut.

Teorema 3.4.1 (Perluasan De Moivre untuk Quaternion)

Jika $q \in H$ dinyatakan dalam bentuk kutub $q = |q|(\cos\theta + n\sin\theta)$, maka $q^k = |q|^k(\cos k\theta + n\sin k\theta)$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

Bukti:

Misalkan $q \in H$ dengan $q = |q|(\cos\theta + n\sin\theta)$, akan ditunjukkan bahwa $q^k = |q|^k(\cos k\theta + n\sin k\theta)$ untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

1. Akan ditunjukkan bahwa $q^k = |q|^k(\cos k\theta + n\sin k\theta)$ benar untuk setiap $k \in \mathbb{N}$. Dengan menggunakan induksi matematika, diperoleh:

   a. Untuk $k = 1$, maka $q = |q|(\cos\theta + n\sin\theta)$ adalah benar.

   b. Misalkan $q^m = |q|^m(\cos m\theta + n\sin m\theta)$, akan ditunjukkan bahwa $q^{m+1} = |q|^{m+1}(\cos(m+1)\theta + n\sin(m+1)\theta)$. Perhatikan bahwa

$$
\begin{aligned}
q^{m+1} = q^m q &= |q|^m(\cos m\theta + n\sin m\theta)|q|(\cos\theta + n\sin\theta) \\
&= |q|^{m+1}(\cos m\theta\cos\theta + n^2\sin m\theta\sin\theta + n\sin m\theta\cos\theta + n\sin\theta\cos m\theta) \\
&= |q|^{m+1}(\cos m\theta\cos\theta - \sin m\theta\sin\theta + n(\sin m\theta\cos\theta + \sin\theta\cos m\theta)) \\
&= |q|^{m+1}(\cos(m\theta + \theta) + n\sin(m\theta + \theta)) \\
&= |q|^{m+1}(\cos(m+1)\theta + n\sin(m+1)\theta).
\end{aligned}
$$

Berdasarkan prinsip induksi matematika, terbukti bahwa $q^k = |q|^k (\cos k\theta + n \sin k\theta)$ benar untuk setiap $k \in \mathbb{N}$.

2. Untuk $k = 0$, maka $q^0 = |q|^0 (\cos 0 + n \sin 0) = 1$ adalah benar.

3. Akan ditunjukkan bahwa $q^k = |q|^k (\cos k\theta + n \sin k\theta)$ benar untuk setiap $k \in \mathbb{Z}^-$. Misalkan $k = -m$, di mana $m \in \mathbb{N}$. Diperoleh,

$$q^k = q^{-m} = \left(q^{-1}\right)^m = \left[\left(|q|(\cos\theta + n\sin\theta)\right)^{-1}\right]^m = \left[|q|^{-1}(\cos\theta + n\sin\theta)^{-1}\right]^m$$

$$= \left[|q|^{-1} \frac{\overline{\cos\theta + n\sin\theta}}{|\cos\theta + n\sin\theta|}\right]^m = \left[|q|^{-1}(\cos\theta - n\sin\theta)\right]^m$$

$$= \left[|q|^{-1}(\cos(-\theta) + n\sin(-\theta))\right]^m .$$

Dengan menggunakan bukti pada bagian 1, diperoleh

$$q^k = q^{-m} = \left[|q|^{-1}(\cos(-\theta) + n\sin(-\theta))\right]^m = |q|^{-m}(\cos(-m\theta) + n\sin(-m\theta))$$

$$= |q|^k (\cos k\theta + n\sin k\theta) .$$

Terbukti bahwa $q^k = |q|^k (\cos k\theta + n \sin k\theta)$ benar untuk setiap $k \in \mathbb{Z}^-$.

Berdasarkan 1 sampai dengan 3, terbukti bahwa $q^k = |q|^k (\cos k\theta + n \sin k\theta)$ benar untuk setiap $k \in \mathbb{Z}$. ■

Contoh:

Nyatakanlah $q = 3 + 4i + 5j - 2k$ dalam bentuk kutub, kemudian tentukanlah q^5.

Penyelesaian:

Diketahui $q = 3 + 4i + 5j - 2k$, diperoleh

$$|q| = \sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2 + 2^2} = \sqrt{9+16+25+4} = \sqrt{54} = 3\sqrt{6},$$

$$\frac{q_s}{|q|} = \frac{3}{\sqrt{4^2+5^2+2^2}} = \frac{3}{\sqrt{45}} = \frac{3}{3\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{6},$$

$$\frac{\vec{q}_v}{|\vec{q}_v|} = \frac{4i+5j-2k}{\sqrt{4^2+5^2+2^2}} = \frac{4i+5j-2k}{\sqrt{45}} = \frac{4i+5j-2k}{3\sqrt{5}} = \frac{4i+5j-2k}{15}\sqrt{5} \text{ dan}$$

$$\frac{|\vec{q}_v|}{|q|} = \frac{\sqrt{4^2+5^2+2^2}}{\sqrt{3^2+4^2+5^2+2^2}} = \frac{\sqrt{45}}{\sqrt{54}} = \frac{3\sqrt{5}}{3\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{6}\sqrt{30}.$$

Selanjutnya, substitusikan nilai-nilai yang telah diperoleh ke persamaan

$q = q_s + \vec{q}_v = |q|\left(\frac{q_s}{|q|} + \frac{\vec{q}_v}{|\vec{q}_v|}\cdot\frac{|\vec{q}_v|}{|q|}\right)$ sehingga

$$q = 3\sqrt{6}\left(\frac{1}{6}\sqrt{6} + \frac{4i+5j-2k}{15}\sqrt{5}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)$$

$$= 3\sqrt{6}\left(\cos\left(arc\cos\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}\right)\right) + \frac{4i+5j-2k}{15}\sqrt{5}\sin\left(arc\sin\left(\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)\right)\right).$$

Diperoleh,

$$q^5 = \left(3\sqrt{6}\right)^5\left(\cos\left(5arc\cos\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}\right)\right) + \frac{4i+5j-2k}{15}\sqrt{5}\sin\left(5arc\sin\left(\frac{1}{6}\sqrt{30}\right)\right)\right)$$

$$= 8748\sqrt{6}\left(\cos\left(5arc\cos\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}\right)\right) + \frac{(4i+5j-2k)}{15}\sqrt{5}\sin\left(5\arcsin\left(\frac{1}{6}\sqrt{6}\right)\right)\right).$$

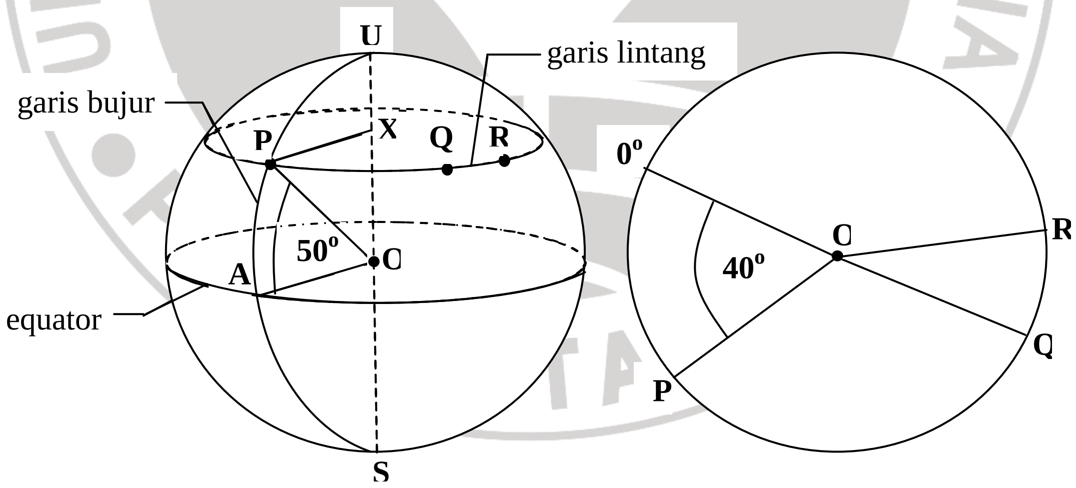
3.5 Geometri Quaternion

Secara geometri, vektor di dalam ruang berdimensi lebih dari tiga tidak dapat digambarkan. Karena quaternion sama seperti vektor di $\mathbb{R}^4$, maka quaternion juga tidak dapat digambarkan secara geometri. Meskipun demikian, bagian ini akan menjelaskan secara khusus mengenai geometri perkalian dari dua buah quaternion.

Diberikan quaternion $q = a + bi + cj + dk \in H$. Didefinisikan

$$a = \mu\cos\theta,\ b = \mu\sin\theta\cos\phi,\ c = \mu\sin\theta\sin\phi\cos\psi \text{ dan } d = \mu\sin\theta\sin\phi\sin\psi,$$

di mana μ adalah modulus dari quaternion q, θ adalah *amplitude* quaternion q dengan $0 \le \theta \le \pi$, ϕ adalah sudut lintang (*latitude*) quaternion q dengan $0 \le \phi \le \pi$ dan ψ adalah sudut bujur (*longitude*) quaternion q dengan $0 \le \psi \le \pi$. Untuk lebih memahami penjelasan di atas, perhatikan gambar berikut.



(a) (b)

Gambar 3.1 (a) Koordinat Titik Secara Melintang pada *Sphere*
(b) Koordinat Titik Secara Membujur pada *Sphere*

Misalkan (b,c,d), (b',c',d') dan (b'',c'',d'') adalah koordinat titik-titik pada sumbu xyz di ruang tiga dimensi serta R, R' dan R'' masing-masing menyatakan titik di mana vektor $bi+cj+dk$, $b'i+c'j+d'k$ dan $b''i+c''j+d''k$ yang diperpanjang memotong *sphere* satuan dengan pusat di titik asal. Jika R, R' dan R'' masing-masing adalah titik representasi dari quaternion q, q', dan q'' dengan $qq'=q''$, maka *amplitude* dari quaternion q dan q' masing-masing sama dengan besar sudut R dan R' pada segitiga permukaan $RR'R''$ yang diperoleh dengan cara menggambar busur terpendek RR', $R'R''$ dan RR''. Ini berarti bahwa $\angle R=\theta$ dan $\angle R'=\theta'$. Adapun suplemen *amplitude* dari quaternion q'' didefinisikan sebagai besar sudut R'' pada segitiga permukaan $RR'R''$ yang besarnya sama dengan $\pi-\theta''$. Dengan kata lain, $\angle R''=\pi-\theta''$. Selanjutnya jika $\theta=\theta'=\theta''=0$, maka diperoleh persamaan $\angle R+\angle R'+\angle R''=\pi$ yang merepresentasikan jumlah sudut pada segitiga di bidang.

Contoh:

Jika $q=i$, $q'=j$, dan $q''=k$, tentukanlah besar *amplitude* quaternion q, q', dan q''.

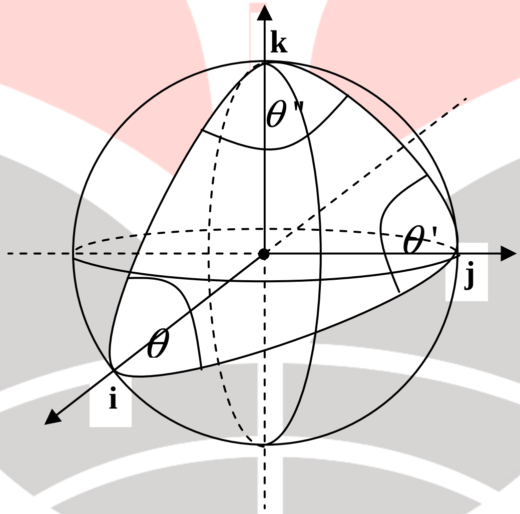
Penyelesaian:

Misalkan $q=i$, $q'=j$, dan $q''=k$. Karena

$$q=\mu\cos\theta+\mu\sin\theta\cos\phi i+\mu\sin\theta\sin\phi\cos\psi j+\mu\sin\theta\sin\phi\sin\psi k,$$

maka $\mu=1$, $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ dan $\phi=0$. Selanjutnya, karena

$q' = \mu' \cos\theta' + \mu' \sin\theta' \cos\phi' i + \mu' \sin\theta' \sin\phi' \cos\psi' j + \mu' \sin\theta' \sin\phi' \sin\psi' k$ dan $q'' = \mu'' \cos\theta'' + \mu'' \sin\theta'' \cos\phi'' i + \mu'' \sin\theta'' \sin\phi'' \cos\psi'' j + \mu'' \sin\theta'' \sin\phi'' \sin\psi'' k$, maka $\mu' = 1$, $\theta' = \frac{\pi}{2}$, $\phi' = \frac{\pi}{2}$, $\psi' = 0$, $\mu'' = 1$, $\theta'' = \frac{\pi}{2}$, $\phi'' = \frac{\pi}{2}$ dan $\psi'' = \frac{\pi}{2}$. Jika R, R' dan R'' masing-masing adalah titik representasi dari quaternion q, q', dan q'', maka *amplitude* dari quaternion q, q', dan q'' masing-masing adalah $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta' = \frac{\pi}{2}$ dan $\theta'' = \frac{\pi}{2}$. Untuk lebih memahami masalah ini, perhatikan gambar berikut.



Gambar 3.2 Geometri Perkalian $ij = k$

3.6 Aplikasi Quaternion pada Rotasi 3D

Diberikan (a,b,c,d) sebagai koordinat suatu titik pada *hyperspherical* $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$. Titik (a,b,c,d) merepresentasikan suatu rotasi di sekitar sumbu yang diberi arah oleh vektor $bi + cj + dk$ dengan suatu sudut

$$\alpha = 2\cos^{-1} a = 2\sin^{-1}\sqrt{b^2+c^2+d^2}\ .$$

Dengan kata lain, $a = \cos\frac{\alpha}{2}$ dan $b^2+c^2+d^2 = \sin^2\frac{\alpha}{2}$.

Didefinisikan quaternion

$$q = a+bi+cj+dk = a+\frac{bi+cj+dk}{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}\sqrt{b^2+c^2+d^2}$$

$$= \cos\frac{\alpha}{2} + U_{\vec{q}_v}\sin\frac{\alpha}{2},$$

di mana $U_{\vec{q}_v}$ adalah vektor satuan dari vektor $bi+cj+dk$. Jika $\vec{v}$ adalah sebarang vektor pada R^3, maka hasilkali quaternion $q\vec{v}q^{-1}$ akan menghasilkan vektor $\vec{v}$ yang dirotasikan oleh sudut α mengelilingi sumbu $U_{\vec{q}_v}$. Hasilkali quaternion $q\vec{v}q^{-1}$ disebut dengan konjugasi oleh q. Ini berarti bahwa perkalian quaternion adalah komposisi dari rotasi. Sebagai contoh, jika p dan q adalah quaternion yang merepresentasikan rotasi, maka konjugasi oleh pq dinyatakan dengan $(pq)\vec{v}(pq)^{-1} = pq\vec{v}q^{-1}p^{-1} = p\left(q\vec{v}q^{-1}\right)p^{-1}$ yang mana sama seperti konjugasi oleh q kemudian oleh p.

Contoh:

Jika f merotasikan titik-titik di R^3 dengan sudut $\frac{2}{3}\pi$ mengelilingi sumbu $\vec{u} = i+j+k$, tentukanlah bayangan titik $(0,0,1)$ oleh f.

Penyelesaian:

Misalkan f merotasikan titik-titik di R^3 dengan sudut $\frac{2}{3}\pi$ mengelilingi sumbu $\vec{u} = i + j + k$. Diperoleh,

$$q = \cos\frac{\pi}{3} + \frac{i+j+k}{\sqrt{3}}\sin\frac{\pi}{3} = \frac{1+i+j+k}{2}.$$

Jika $\vec{v} = xi + yj + zk$, maka

$$f(\vec{v}) = q\vec{v}q^{-1} = \left(\frac{1+i+j+k}{2}\right)(xi+yj+zk)\left(\frac{1-i-j-k}{2}\right).$$

$$= \frac{1}{4}(1+i+j+k)(xi+yj+zk)(1-i-j-k)$$

$$= \frac{1}{4}(4zi+4xj+4yk) = zi+xj+yk.$$

Diperoleh, $f(k) = i$. Jadi, bayangan titik $(0,0,1)$ oleh rotasi sejauh $\frac{2}{3}\pi$ mengelilingi sumbu $\vec{u} = i + j + k$ adalah $(1,0,0)$.