BAB III

REGRESI SPLINE

3.1 Regresi Spline

Secara sederhana, regresi spline dapat dikatakan sebagai suatu regresi yang didekati oleh suatu fungsi spline, jenis fungsi spline yang sering digunakan dalam pemodelan dan penelitian yang berhubungan dengan regresi adalah fungsi spline. Seperti telah dijelaskan pada bab sebelumnya bahwa fungsi spline merupakan fungsi polynomial yang lebih khusus dan memberikan fleksibilitas yang lebih tinggi daripada fungsi polynomial pada umumnya. Fungsi spline yang berhubungan dengan regresi spline terkait adalah fungsi spline linear, kuadratik, dan kubik. Spline linear merupakan jumlahan dari fungsi polynomial berderajat satu, spline kuadratik merupakan jumlahan dari fungsi polynomial berderajat dua dengan suatu fungsi *truncated* berderajat dua, sedangkan spline kubik merupakan jumlahan dari fungsi polinomial berderajat tiga dengan suatu fungsi (*truncated*) berderajat tiga.

3.2 Regresi Spline Univariabel

Suatu fungsi regresi yang didekati oleh fungsi spline, dan hanya melibatkan satu variabel prediktor dan satu variabel respon dikatakan sebagai regresi spline univariabel. Diberikan data berpasangan (x_i, y_i), dan hubungan antara x_i dan y_i diasumsikan mengikuti model regresi nonparametric

$y_i = f(x_i) + \varepsilon_i, i = 1,2,3, \ldots, n$, dengan y_i variabel respon, $f(x_i)$ adalah kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya dan ε_i *error random* yang berdistribusi normal independen dengan mean nol, dan variansi konstan (σ^2).

Dalam regeresi nonparametrik, kurva regresi hanya diasumsikan termuat dalam suatu ruang fungsi tertentu. Apabila $f(x_i)$ didekati dengan fungsi spline univariabel (Eubank, 1988),

$$f(x_i) = \sum_{j=0}^{q} a_j x^j + \sum_{k=1}^{M} b_k \sum_{j=0}^{q} (x_i - K_k)^q, \tag{3.1}$$

Maka model regresi dapat disajikan dalam bentuk:

$$y = \sum_{j=0}^{q} a_j x^j + \sum_{k=1}^{M} b_k \sum_{j=0}^{q} (x - K_k)^q + \varepsilon_i, \tag{3.2}$$

dimana x_i merupakan variabel prediktor ke-i, a_j dan b_k merupakan parameter, sedangkan j = 0, 1, 2, …, q, dan K_k, k= 1, 2, … , M adalah titik knot. Selanjutnya model regresi (3.2) dapat dituliskan menjadi:

$$y_i = a_1 x_1^1 + \cdots + a_i x_i^q + b_1(x_1 - K_1)^1 + \cdots + b_M(x_i - K_M)^q + \varepsilon_i.$$

Apabila model regresi disajikan dalam bentuk matriks didapat:

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & \ldots & x_1^q & (x_1 - K_1)^q & \cdots & (x_1 - K_M)^q \\ x_2 & \ldots & x_2^q & (x_2 - K_1)^q & \ldots & (x_2 - K_M)^q \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_n & \cdots & x_n^q & (x_n - K_1)^q & \ldots & (x_n - K_M)^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_q \\ b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}$$

Selanjutnya dapat ditulis menjadi:

$$y = \boldsymbol{X}(K_1, \ldots, K_M)\beta + \varepsilon \tag{3.3}$$

dengan:

$$\boldsymbol{y} = [\boldsymbol{y_1}, \ldots, \boldsymbol{y_n}]',$$

$$X(K_1, \dots, K_M) = \begin{bmatrix} x_1 & \dots & x_1^q & (x_1 - K_1)^q & \cdots & (x_1 - K_M)^q \\ x_2 & \dots & x_2^q & (x_2 - K_1)^q & \dots & (x_2 - K_M)^q \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ x_n & \cdots & x_n^q & (x_n - K_1)^q & \dots & (x_n - K_M)^q \end{bmatrix}$$

$\beta = [a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q]'$ dan $\varepsilon = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n]'$

3.2.1 Penaksir Spline Univariabel

Penaksiran parameter $\beta = [a_1, \dots, a_q, b_1, \dots, b_q]'$ diperoleh dengan menggunakan metode *least square.* Khususnya penaksir $\hat{\beta}$ diperoleh dengan menyelesaikan persamaan:

$$\text{Arg Min}_{\beta \in R^{M+3}}\{\varepsilon' \varepsilon\} = \text{Arg Min}_{\beta \in R^{M+3}}\{(y - X(K_1, \dots, K_M)\beta)'(y - X(K_1, \dots, K_M)\beta)\} \quad (3.4)$$

Metode *derivative parsial* digunakan untuk menyelesaikan persamaan (3.4). Dimisalkan

$$\begin{aligned} \varphi(\beta) &= (y - X(K_1, \dots, K_M)\beta)'(y - X(K_1, \dots, K_M)\beta) \\ &= (y' - \beta' X'(K_1, \dots, K_M))(y - X(K_1, \dots, K_M)\beta) \\ &= y'y - y'X(K_1, \dots, K_M)\beta - \beta' X'(K_1, \dots, K_M)y \quad + \\ &= y'y - (y'X(K_1, \dots, K_M)\beta)' - \beta' X'(K_1, \dots, K_M)y \\ &\quad +\beta' X'(K_1, \dots, K_M)X(K_1, \dots, K_M)\beta \\ &= y'y - yX'(K_1, \dots, K_M)\beta' - \beta' X'(K_1, \dots, K_M)y \\ &\quad +\beta' X'(K_1, \dots, K_M)X(K_1, \dots, K_M)\beta \\ &= y'y - \beta' X'(K_1, \dots, K_M)y - \beta' X'(K_1, \dots, K_M)y \\ &\quad +\beta' X'(K_1, \dots, K_M)X(K_1, \dots, K_M)\beta \end{aligned}$$

$$= y'y - 2\beta'\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)y + \beta'\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)\boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)\beta \qquad (3.5)$$

Selanjutnya persamaan (3.5) diturunkan terhadap β, maka didapat:

$$\frac{\partial\varphi(\beta)}{\partial\beta} = \frac{\partial(y'y - 2\beta'\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)y + \beta'\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)\boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)\beta)}{\partial\beta} =$$

$$-2\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)y + 2\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)\boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)\beta \qquad (3.6)$$

Setelah diturunkan, untuk mendapatkan penaksir dari β, yaitu $\hat{\beta}$, maka persamaan (3.6) disamakan dengan nol:

$$-2\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)y + \boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)\boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)\hat{\beta} = 0 \qquad (3.7)$$

Persamaan (3.7) memberikan hasil:

$$2\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)y = \boldsymbol{2X}'(K_1,\dots,K_M)\boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)\hat{\beta}$$

$$\widehat{\beta} = \left(\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)\boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)\right)^{-1}2\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)y \qquad (3.8)$$

Kemudian persamaan dapat dibentuk menjadi:

$$\hat{\beta} = \left(\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)\boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)\right)^{-1}\boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)y \qquad (3.9)$$

dengan $\hat{\beta} = (\widehat{a_1},\dots,\widehat{a_q},\widehat{b_1},\dots,\widehat{b_M})'$

Setelah didapat penaksir parameter spline univariabel, maka penaksir kurva regresi $f(x)$diberikan oleh:

$$\hat{f}(x) = (\hat{f}(x_1)\hat{f}(x_2)\dots\ \hat{f}(x_n))'$$

$$= \mathbf{X}(K_1,\dots,K_M)\hat{\beta} \qquad (3.10)$$

$$= \mathbf{X}(K_1,\dots,K_M))(\mathbf{X}'(K_1,\dots,K_M)\mathbf{X}(K_1,\dots,K_M))^{-1}\ x'(K_1,\dots,K_M)y$$

$$= \boldsymbol{A}(K_1,\dots,K_M)y \qquad (3.11)$$

dengan matriks

$$\boldsymbol{A}(K_1,\dots,K_M) = \boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)(\boldsymbol{X}'^{(K_1,\dots,K_M)}\boldsymbol{X}(K_1,\dots,K_M)^{-1}\ \boldsymbol{X}'(K_1,\dots,K_M)$$

Penaksir untuk kurva regresi dapat ditulis:

$$\hat{f}(x_i) = \sum_{j=0}^{q} \hat{a}_j x_i^j + \sum_{k=1}^{M} \hat{\beta}_k (x_i - K_k)^q$$

dimana $i = 1,2, \dots, K$. $\hat{a}_j, j = 0, \dots, q$ dan $\hat{b}_k, k = 1,2, \dots, M$ diperoleh dari:

$$\hat{\beta} = (\hat{a}_1, \dots, \hat{a}_q, \hat{b}_1, \dots, \hat{b}_M)'$$

3.3 Regresi Spline Multivariabel

Suatu fungsi regresi yang didekati oleh fungsi spline dan melibatkan satu variabel prediktor dan banyak variabel respon, dikatakan sebagai regresi spline kubik multivariabel. Diberikan data berpasangan $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}, y_i)$, dan hubungan antara $(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})$ dan y_i diasumsikan mengikuti model regresi nonparametrik $y_i = f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}) + \varepsilon_i, i = 1,2,3, \dots, n$, dengan y_i variabel respon, $f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi})$ adalah kurva regresi yang tidak diketahui bentuknya dan ε_i *error random* yang berdistribusi normal independen dengan mean nol, dan variansi konstan (σ^2).

Kurva regresi f yang dihampiri oleh fungsi spline kubik multivariabel dituliskan sebagai:

$$f(x_{1i}, x_{2i}, \dots, x_{pi}) = \sum_{j=1}^{p} f(x_{ji}) \tag{3.12}$$

dengan

$$f(x_{ji}) = \sum_{k=1}^{q} \alpha_{kj} x_{ji}^k + \sum_{l=1}^{M} \beta_{lj} (x_{lj} - K_{lj})^q$$

$$= \alpha_{kj} x_{ji} + \dots + \alpha_{kj} x_{ji}^k + \beta_{lj} (x_{lj} - K_{lj})^q + \dots + \beta_{Mj} (x_{lj} - K_{Mj})^q$$

dimana $j = 1, 2, \dots, p$ dan $k = 1, 2, \dots, M$ titik-titik knot yang memerlihatkan perubahan pola perilaku dari fungsi tersebut pada sub-sub interval yang berbeda. Model regresi fungsi tersebut berbentuk:

$$
\begin{aligned}
y_i = {} & \alpha_{00} + \alpha_{11} x_{1i} + \dots + \alpha_{q1} x_{ji}^q + \beta_{11}(x_{1i} - K_{11})^q + \beta_{M1}(x_{1i} - K_{M1})^q + \cdots + \\
& \alpha_{1p} x_{pi} + \dots + \alpha_{qp} x_{pi}^q + \beta_{1p}\left(x_{pi} - K_{1p}\right)^q + \beta_{2p} + \dots \\
& + \beta_{Mp}\left(x_{pi} - K_{Mp}\right)^q + \varepsilon_i
\end{aligned}
\tag{3.12}
$$

Model regresi (3.12) dapat disajikan dalam bentuk matrik, yaitu:

$$
\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{11}^q & (x_{11} - K_{11})^q & \cdots & (x_{11} - K_{M1})^q \\ x_{12} & \dots & x_{12}^q & (x_{12} - K_{11})^q & \dots & (x_{12} - K_{M1})^q \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{1n}^q & (x_{1n} - K_{11})^q & \dots & (x_{1n} - K_{M1})^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{q1} \\ \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{M1} \end{bmatrix} + \dots
$$

$$
+ \begin{bmatrix} x_{p1} & \dots & x_{p1}^q & \left(x_{p1} - K_{1p}\right)^q & \cdots & \left(x_{p1} - K_{Mp}\right)^q \\ x_{p2} & \dots & x_{p2}^q & \left(x_{p2} - K_{1p}\right)^q & \dots & \left(x_{p2} - K_{Mp}\right)^q \\ & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ x_{pn} & \cdots & x_{pn}^q & \left(x_{pn} - K_{1p}\right)^q & \dots & \left(x_{pn} - K_{Mp}\right)^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{1p} \\ \vdots \\ \alpha_{qp} \\ \beta_{1p} \\ \vdots \\ \beta_{Mp} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} x_{11} & \dots & x_{11}^q & (x_{11} - K_{11})^q & \cdots & (x_{11} - K_{M1})^q & \vdots & \cdots & \vdots & x_{p1} & \dots & x_{p1}^q & \left(x_{p1} - K_{1p}\right)^q & \cdots & \left(x_{p1} - K_{Mp}\right)^q \\ x_{12} & \dots & x_{12}^q & (x_{12} - K_{11})^q & \dots & (x_{12} - K_{M1})^q & \vdots & \cdots & \vdots & x_{p2} & \dots & x_{p2}^q & \left(x_{p2} - K_{1p}\right)^q & \dots & \left(x_{p2} - K_{Mp}\right)^q \\ & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & & \vdots \\ x_{1n} & \cdots & x_{1n}^q & (x_{1n} - K_{11})^q & \dots & (x_{1n} - K_{M1})^q & \vdots & \cdots & \vdots & x_{pn} & \cdots & x_{pn}^q & \left(x_{pn} - K_{1p}\right)^q & \dots & \left(x_{pn} - K_{Mp}\right)^q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{11} \\ \vdots \\ \alpha_{q1} \\ \beta_{11} \\ \vdots \\ \beta_{M1} \\ \hline \vdots \\ \hline \alpha_{1p} \\ \vdots \\ \alpha_{qp} \\ \beta_{1p} \\ \vdots \\ \beta_{Mp} \end{bmatrix}
$$

$$+\begin{bmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \vdots\\ \varepsilon_n\end{bmatrix} \tag{3.13}$$

Atau $y = \boldsymbol{X}(K_{\boldsymbol{11}}, \dots, K_{\boldsymbol{M1}} \vdots \cdots \vdots K_{\boldsymbol{1p}}, \dots, K_{\boldsymbol{Mp}} + \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\varepsilon}$ **,** dengan $y = [y_i, \dots, y_n]'$,

$\boldsymbol{X}(K_{\boldsymbol{11}}, \dots, K_{\boldsymbol{M1}} \vdots \cdots \vdots K_{\boldsymbol{1p}}, \dots, K_{\boldsymbol{Mp}} =$

$$\begin{bmatrix}
x_{11} & \dots & x_{11}^q & (x_{11}-K_{11})^q & \cdots & (x_{11}-K_{M1})^q & \vdots & \cdots & \vdots x_{p1} & \dots & x_{p1}^q & (x_{p1}-K_{1p})^q & \cdots & (x_{p1}-K_{Mp})^q \\
x_{12} & \dots & x_{12}^q & (x_{12}-K_{11})^q & \dots & (x_{12}-K_{M1})^q & \vdots & \cdots & \vdots x_{p2} & \dots & x_{p2}^q & (x_{p2}-K_{1p})^q & \dots & (x_{p2}-K_{Mp})^q \\
 & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & \vdots & & & \vdots \\
x_{1n} & \cdots & x_{1n}^q & (x_{1n}-K_{11})^q & \dots & (x_{1n}-K_{M1})^q & \vdots & \cdots & \vdots x_{pn} & \cdots & x_{pn}^q & (x_{pn}-K_{1p})^q & \dots & (x_{pn}-K_{Mp})^q
\end{bmatrix}$$

$\theta = (\theta_1', \dots, \theta_1^p)'$, dengan $\theta_1' = (\alpha_{11}, \dots, \alpha_{q1}, \beta_{11}, \dots, \beta_{M1})$ dan $\theta_{\boldsymbol{p}}' = (\alpha_{1p}, \dots, \alpha_{qp}, \beta_{1p}, \dots, \beta_{Mp})$ dan $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)'$

3.3.1 Penaksir Spline Multivariabel

Penaksiran untuk $\theta = (\theta_1', \dots, \theta_1^p)'$ diperoleh dengan menggunakan metode *least square*, khususnya penaksir parameter θ yaitu $\hat{\theta}$ didapat dengan menyelesaikan persamaan:

$$\text{Arg Min}_{\substack{\theta \in R^{3+Mj} \\ j=1,2,\dots,p}} \{\varepsilon'\varepsilon\} = \text{Arg Min}_{\substack{\theta \in R^{3+Mj} \\ j=1,2,\dots,p}} \begin{Bmatrix} (y - \boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta)' \\ (y - \boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta) \end{Bmatrix} \tag{3.14}$$

Metode *derivative partial* digunakan untuk menyelesaikan persamaan (3.14). Dimisalkan:

$$\begin{aligned}
\rho(\theta) &= \{(y - \boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta)'(y - \boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta)\} \\
&= (y' - \theta'\boldsymbol{X'}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp}))\ (y - \boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta \\
&= y'y - \boldsymbol{y'X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta - \theta'\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y \\
&\quad + \theta'\boldsymbol{X'}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\,\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta
\end{aligned}$$

$$= y'y - (\theta'\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y)' - \theta'\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y$$
$$+ \theta'\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\,\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta$$
$$= y'y - 2\theta'\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y$$
$$+ \theta'\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\,\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta \tag{3.15}$$

Selanjutnya persamaan (3.15) diturunkan terhadap θ

$$\frac{\partial\rho(\theta)}{\partial(\theta)}$$
$$= \frac{(y'y - 2\theta'\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y + \theta'\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\,\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta}{\partial(\theta)}$$
$$= \{-2\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y +$$
$$2\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\,\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\theta\} \tag{3.16}$$

Kemudian persamaan (3.16) disamakan dengan nol, yaitu:

$$\{-2\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y +$$
$$2\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\hat{\theta}\} = 0$$

diperoleh:

$$2\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\hat{\theta} =$$
$$2\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y.$$
$$\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\hat{\theta} =$$
$$\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\mathrm{y} \tag{3.17}$$

dengan asumsi bahwa $\boldsymbol{X}(K, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})$ memiliki *rank* penuh. Penaksir untuk θ, yaitu $\hat{\theta}$ diberikan oleh

$$\hat{\theta} = \left(\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\boldsymbol{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\right)^{-1}$$
$$\boldsymbol{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y \tag{3.18}$$

dengan $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1', \dots, \hat{\theta}_p')'$

Penaksir kurva regresi $f(x)$diperoleh dari:

$$\hat{f}(x) = [\hat{f}(x_1)', \hat{f}(x_2)', \dots, \hat{f}(x_n)']' \quad (3.19)$$

$$= \mathbf{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\hat{\theta} \quad (3.20)$$

$$= \mathbf{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})$$

$$(\mathbf{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\mathbf{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp}))^{-1}\, \boldsymbol{X}'(K_1, \dots, K_M)y$$

$$= \boldsymbol{B}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})y \quad (3.21)$$

Matrik $\boldsymbol{B}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})$ pada persamaan (3.21) merupakan matrik yang diberikan oleh persamaan:

$$\{\mathbf{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp}) =$$

$$(\mathbf{X}'(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp})\mathbf{X}(K_{11}, \dots, K_{M1}, \dots, K_{1p}, \dots, K_{Mp}))^{-1}\, \boldsymbol{X}'(K_1, \dots, K_M)\}$$

Penaksiran dari f dapat ditulis menjadi:

$$\hat{f}(x_1, x_2, \dots, x_p) = \sum_{j=1}^{p} \hat{f}(x_j) \quad (3.22)$$

dengan : $\hat{f}(x_j) = \sum_{k=1}^{q} \hat{\alpha}_{kj}\, x_j^k + \sum_{l=1}^{M} \hat{\beta}_{lj}\, (x_j - K_{lj})^q$

dimana $\hat{\alpha}_{kj}$ dan $\hat{\beta}_{lj}$, $k = 1, 2,3, j = 1,2, \dots .\, p, dan\ l = 1,2, \dots, M$ diperoleh dari

$\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1', \dots, \hat{\theta}_P')'$ dan $\hat{\theta}_1 = (\hat{\alpha}_{11}, \dots\ , \hat{\alpha}_{q1}, \hat{\beta}_{11}, \dots, \hat{\beta}_{M1}) \dots$

$\hat{\theta}_p = (\hat{\alpha}_{1p}, \dots\ , \hat{\alpha}_{qp}, \hat{\beta}_{1p}, \dots, \hat{\beta}_{Mp})$

3.4 Uji Asumsi

Uji asumsi dilakukan apabila model-model yang diasumsikan dapat merepresentasikan data telah diperoleh. Pengujian ini dilakukan untuk menentukan ada atau tidak adanya hubungan nyata antara variabel-variabel prediktor yang terdapat dalam model terhadap variabel respon. Pengujian yang dilakukan adalah sebagai berikut

1. Uji Serentak

Hipotesis yang digunakan untuk menguji signifikansi model secara serentak adalah sebagai berikut:

$H_0 : a_1 = a_2 = \cdots = a_q = 0 \; atau \; b_1 = b_2 = \cdots = b_M = 0$

H_1: Minimal ada satu $a_q \neq 0 \; atau \; b_M \neq 0$.

Kriteria pengujian:

Tolak H_0 jika $F_{hitung} > F_{tabel}$ atau terima H_0 jika $F_{hitung} < F_{tabel}$

2. Uji Parsial

Pengaruh secara individu setiap variabel dapat dilihat dari signifikan atau tidaknya kesesuaian koefisien regresi dari setiap variabel prediktor dengan variabel respon. Hipotesis yang digunakan dalam uji parsial ini adalah sebagai berikut:

$H_0 : a_p = 0 \; atau \; b_M = 0$

H_1: $a_q \neq 0 \; atau \; b_M \neq 0,$ $\qquad q = 1, 2, \dots, 6. \; dan \; M = 1, 2, \dots 6.$

Kriteria pengujian:

Tolak H_0 jika $t_{hitung} > t_{tabel}$ atau

Terima H_0 jika $t_{hitung} < t_{tabel}$.