BAB III

OPERATOR LINEAR TERBATAS PADA RUANG *HILBERT*

3.1 Operator linear

Operator merupakan salah satu materi yang akan dibahas dalam fungsi real yaitu suatu fungsi dari ruang vektor ke ruang vektor. Ruang vektor yang dibahas dalam tugas akhir ini adalah ruang metrik, ruang norm dan ruang hasil kali dalam.

Selanjutnya, dalam bagian ini akan dibahas mengenai operator linear, operator terbatas dan operator linear yang kontinu,operator *Hilbert*-adjoint, dan operator self-adjoint pada ruang ruang hasil kali dalam yang lengkap (ruang *Hilbert*).

3.1.1 Definisi (Operator Linear)

Sebuah pemetaan linear T disebut sebagai operator linear jika,

i) Domain $\mathcal{D}(T)$ dari T merupakan subruang vektor dan range $\mathcal{R}(T)$ berada di sebuah ruang vektor.

ii) Untuk setiap $x, y \in \mathcal{D}(T)$ dan skalar α

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

(1)

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

$\mathcal{D}(T)$ sebagai notasi dari domain T

$\mathcal{R}(T)$ sebagai notasi dari range T

$\mathcal{N}(T)$ sebagai notasi dari ruang null T

Ruang null dari T didefinisikan sebagai himpunan dari semua $x \in \mathcal{D}(T)$ sedemikian sehingga $Tx = 0$ atau dengan kata lain ruang null disebut sebagai *kernel*.

Misalkan $\mathcal{D}(T) \subset X$ dan $\mathcal{R}(T) \subset Y$ dimana X dan Y merupakan ruang vektor, keduanya anggota bilangan real atau bilangan kompleks. Operator T merupakan operator dari (atau pemetaan dari) $\mathcal{D}(T)$ pada $\mathcal{R}(T)$, ditulis dalam bentuk,

$$T : \mathcal{D}(T) \rightarrow \mathcal{R}(T)$$

atau dari $\mathcal{D}(T)$ pada Y,

$$T : \mathcal{D}(T) \rightarrow Y$$

Jika $\mathcal{D}(T)$ adalah ruang keseluruhan atau X secara lengkap $(\mathcal{D}(T) = X)$, maka

$$T : X \rightarrow Y$$

Akibatnya, (1) ekuivalen dengan

(2) $$T(\alpha x + \beta y) = T(\alpha x) + T(\beta x) = \alpha T(x) + \beta T(y)$$

dengan memilih $\alpha = 0$, maka dari (1) mengakibatkan

$$T(\alpha x) = T(0x) = T(0) = 0 \text{ dan } T(\alpha x) = \alpha T(x) = 0T(x) = 0$$

Jadi, $T(0) = 0$

3.1.2 Contoh:

1. Operator identitas merupakan operator linear, sebab

   Misalkan operator identitas $I_X : X \rightarrow X$ didefinisikan oleh $I_X x = x$ untuk setiap $x \in X$. Sehingga, dapat ditulis dengan sederhana I untuk I_X; akibatnya

   Misalkan sebarang $x, y \in X$ maka,

$$I(x+y) = x + y = I_X x + I_X y$$

$$I(\alpha x) = \alpha x = \alpha I_X x$$

2. Operator nol merupakan operator linear sebab,

   Misalkan operator nol $0 : X \to Y$ didefinisikan oleh $0x = 0$ untuk setiap $x \in X$. Akibatnya,

   Misalkan sebarang $x, y \in X$ maka,

$$0(x+y) = 0 = 0x + 0y$$

$$0(\alpha x) = 0 = \alpha 0x = \alpha 0$$

3.1.3 Teorema (Range dan Ruang Null)

Misalkan T operator linear maka

a) Range $\mathcal{R}(T)$ adalah suatu subruang vektor

b) Jika dim $\mathcal{D}(T) = n < \infty$, maka dim $\mathcal{R}(T) \leq n$

c) Ruang null $\mathcal{N}(T)$ adalah suatu subruang vektor

Bukti:

a) Misalkan diberikan sembarang $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ dan berdasarkan definisi $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$ untuk sembarang skalar α, β.

   Karena, $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$, maka $y_1 = Tx_1$, $y_2 = Tx_2$ untuk suatu $x_1, x_2 \in \mathcal{D}(T)$. Karena $\mathcal{D}(T)$ merupakan subruang vektor , akibatnya kelinearan T

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = T(\alpha x_1) + T(\beta x_2) = \alpha T(x_1) + \beta T(x_2) = \alpha y_1 + \beta y_2$$

Karena itu, $\alpha y_1 + \beta y_2 \in \mathcal{R}(T)$. Karena, $y_1, y_2 \in \mathcal{R}(T)$ yang sembarang dan juga untuk sembarang skalar α, β akibatnya $\mathcal{R}(T)$ adalah subruang vektor.

b) Misalkan dipilih $n+1$ elemen $y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathcal{R}(T)$ dari sembarang ruang vektor dan misalkan $y_1 = Tx_1$, ... , $y_{n+1} = Tx_{n+1}$ untuk suatu $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{D}(T)$.

Karena dim $\mathcal{D}(T) = n$, himpunan $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ harus merupakan bergantung linear.

Akibatnya,

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

Untuk suatu skalar $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ yang tidak semuanya nol. Karena T linear dan $T0 = 0$.

Akibatnya,

$$\begin{aligned} T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) &= \alpha_1 Tx_1 + \cdots + \alpha_{n+1} Tx_{n+1} \\ &= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Hal ini menunjukan bahwa, $(y_1, \dots, y_{n+1})$ merupakan himpunan yang bergantung linear karena α_j tidak semuanya sama dengan nol. Berdasarkan asumsi bahwa $\mathcal{R}(T)$ dipilih dari sembarang ruang vektor, sehingga diperoleh bahwa $\mathcal{R}(T)$ subset tidak bebas linear dari $n+1$ atau dari sembarang elemen. Berdasarkan definisi dimensi hingga dan takhingga ruang vektor mengakibatkan bahwa $\mathcal{R}(T) \leq n$.

c) Misalkan diberikan sembarang $x_1, x_2 \in \mathcal{N}(T)$, diperoleh $Tx_1 = Tx_2 = 0$.

Karena T linear, untuk sembaran skalar α, β berlaku

$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha T x_1 + \beta T x_2 = 0$

Hal ini menunjukan bahwa $\alpha x_1 + \beta x_2 \in \mathcal{N}(T)$.

Akibatnya, $\mathcal{N}(T)$ adalah subruang vektor.

Selanjutnya dengan mengingat kembali invers dari operator linear. Terlebih dahulu harus diketahui bahwa pemetaan $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ merupakan pemetaan yang injektif atau satu-satu jika titik-titik yang berbeda pada domain memilki pemetaan yang berbeda. Oleh karena itu, untuk subruang $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}(T)$ dan,

(4) $$x_1 \neq x_2 \implies Tx_1 \neq Tx_2$$

hal ini sama dengan,

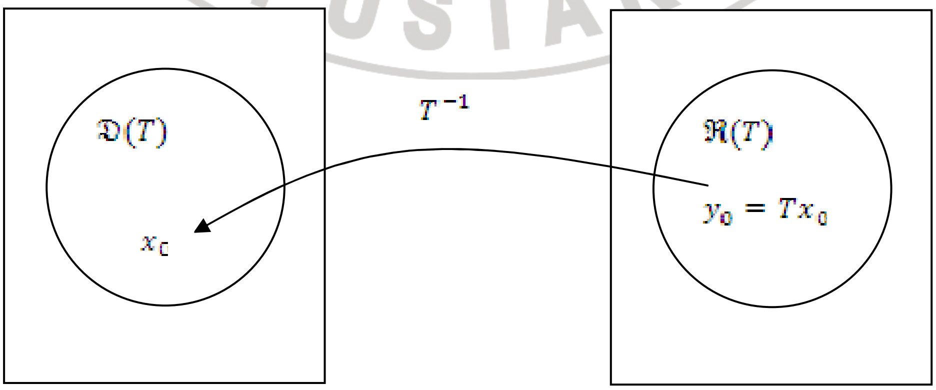
(4*) $$Tx_1 = Tx_2 \implies x_1 = x_2$$

Karena T_{1-1} maka T^{-1} ada,

(5) $$T^{-1} : \mathfrak{R}(T) \to \mathfrak{D}(T)$$

$$y_0 \longmapsto x_0, \text{ dengan } \quad y_0 = Tx_0$$

Perhatikan gambar pemetaan T^{-1} sebagai invers dari T.



Gambar 6. Hubungan pemetaan invers

dari (5) diatas jelas bahwa,

$$T^{-1}Tx = x, \text{ untuk setiap } x \in \mathfrak{D}(T)$$

$$TT^{-1}y = y, \text{ untuk setiap } y \in \mathfrak{R}(T)$$

Invers dari operator linear disajikan pada teorema berikut.

3.1.4 Teorema (Operator Invers)

Misalkan X, Y merupakan ruang vektor keduanya real atau kompleks. Misalkan juga $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ merupakan operator yang linear dengan domain $\mathfrak{D}(T) \subseteq X$ dan range $\mathfrak{R}(T) \subseteq Y$, maka,

a) Invers $T^{-1} : \mathfrak{R}(T) \to \mathfrak{D}(T)$ ada jika dan hanya jika

$$(Tx = 0 \implies x = 0)$$

b) Jika T^{-1} ada maka T^{-1} adalah operator linear.

c) Jika $\dim \mathfrak{D}(T) = n < \infty$ dan T^{-1} ada maka $\dim \mathfrak{R}(T) = \dim \mathfrak{D}(T)$

Bukti:

a) $(\Leftarrow)$ diketahui $(Tx = 0 \implies x = 0)$ akan ditunjukan $T^{-1} : \mathfrak{R}(T) \to \mathfrak{D}(T)$ ada

Misalkan $Tx = 0$ karena T operator linear mengakibatkan bahwa $x = 0$. Misalkan juga $Tx_1 = Tx_2$.

Karena T operator linear maka,

$T(x_1 - x_2) = Tx_1 - Tx_2 = 0 \quad (karena\ Tx_1 = Tx_2)$

Karena $T0 = 0$ maka, $x_1 - x_2 = 0$ atau $x_1 = x_2$. Oleh karena itu, berdasarkan (4*) maka T^{-1} ada.

$(\Longrightarrow)$ diketahui $T^{-1} : \mathfrak{R}(T) \to \mathfrak{D}(T)$ ada akan ditunjukan $(Tx = 0 \Longrightarrow x = 0)$

Misalkan $x_2 = 0 \in \mathfrak{D}(T)$ dan T^{-1} ada berdasarkan (4*), $Tx_1 = Tx_2$ yang mengakibatkan $x_1 = x_2 = 0$.

Sehingga berdasarkan (3) diperoleh,

$$Tx_1 = T0 = 0 \Longrightarrow x_1 = 0$$

b) Misalkan T operator linear dan T^{-1} ada. Akan ditunjukan bahwa T^{-1} linear. Domain dari T^{-1} adalah range $\mathfrak{R}(T)$ sedemikian sehingga $\mathfrak{R}(T)$ merupakan subruang vektor berdasarkan teorema (3.1.3).

Misalkan juga, diberikan sembarang $x_1, x_2 \in \mathfrak{D}(T)$ dan pemetaannya,

$$y_1 = Tx_1 \text{ dan } y_2 = Tx_2$$

Diperoleh,

$$x_1 = T^{-1}y_1 \text{ dan } x_2 = T^{-1}y_2$$

Karena T operator yang linear maka untuk sembarang skalar α, β mengakibatkan,

$$\alpha y_1 + \beta y_2 = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2$$

$$= T(\alpha x_1 + \beta x_2)$$

Karena, $x_j = T^{-1}y_j$ untuk $j = 1,2$, hal ini mengakibatkan,

$$T^{-1}(\alpha y_1 + \beta y_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$$

$$= \alpha T^{-1} y_1 + \beta T^{-1} y_2$$

$$= T^{-1}(\alpha y_1) + T^{-1}(\beta y_2)$$

Akibatnya diperoleh bahwa T^{-1} merupakan operator yang linear.

c) $\dim \mathfrak{D}(T) = n < \infty$ dan T^{-1} ada sehingga dengan menggunakan pembuktian seperti pada teorema 3.1.3 (b) diatas diperoleh $dim\, \mathfrak{R}(T) = dim \mathfrak{D}(T)$.

Dipilih $n+1$ elemen $y_1, \dots, y_{n+1} \in \mathcal{R}(T)$ dari sembarang ruang vektor sehingga $y_1 = Tx_1, \dots, y_{n+1} = Tx_{n+1}$ untuk suatu $x_1, \dots, x_{n+1} \in \mathcal{D}(T)$. Karena dim $\mathcal{D}(T) = n$, himpunan $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$ harus bergantung linear. Akibatnya,

$$\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1} = 0$$

untuk suatu skalar $\alpha_1, \dots, \alpha_{n+1}$ yang tidak semuanya nol.

Karena T linear dan $T(0) = 0$,

$$T(\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} x_{n+1}) = \alpha_1 T x_1 + \cdots + \alpha_{n+1} T x_{n+1}$$

$$= \alpha_1 y_1 + \cdots + \alpha_{n+1} y_{n+1}$$

$$= 0$$

Hal ini menunjukan bahwa, $(y_1, \dots, y_{n+1})$ merupakan himpunan yang bergantung linear karena α_j tidak semuanya sama dengan nol. Berdasarkan asumsi bahwa $\mathcal{R}(T)$ dipilih dari sembarang ruang vektor, sehingga diperoleh bahwa $\mathcal{R}(T)$ subset tidak bebas linear dari $n+1$ atau dari sembarang elemen. Berdasarkan definisi mengakibatkan bahwa $dim \mathcal{R}(T) \leq n$. Hal ini menunjukan bahwa, $dim\mathcal{R}(T) = n = dim\mathfrak{D}(T)$ atau dengan kata lain $dim\ \mathcal{R}(T)$ maksimumnya adalah n yang sama dengan $dim\ \mathfrak{D}(T)$.

3.1.5 Lemma (Invers dari Perkalian)

Misalkan $T : X \to Y$ dan $S : Y \to Z$ merupakan operator linear yang bijektif, dimana X, Y, Z merupakan ruang vektor, maka invers perkalian $(ST)^{-1} : Z \to X$ dari ST ada dan

$$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$$

Bukti:

Misalkan S, T merupakan operator linear yang bijektif dan $ST : X \to Z$ merupakan operator linear yang bijektif sedemikian sehingga $(ST)^{-1}$ ada. Akibatnya, $ST(ST)^{-1} = I_Z$ dimana I_Z merupakan operator identitas pada Z. Berdasarkan asumsi, S, T operator yang linear sedemikian sehingga T^{-1}, S^{-1} ada. Oleh karena itu, $S^{-1}S = I_Y$ (operator identitas pada Y), sehingga diperoleh bahwa,

(6) $$S^{-1}ST(ST)^{-1} = S^{-1}I_Z$$

(7) $$S^{-1}ST(ST)^{-1} = T(ST)^{-1} = S^{-1}$$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left, "ST"] & Y \arrow[r, "S"] & Z \arrow[ll, bend left, "(ST)^{-1}"] \end{tikzcd}$$

Gambar 7. Operator Linear Bijektif

Juga karena $T^{-1}T = I_X$ (operator identitas pada X), sehingga berdasarkan (7) maka diperoleh,

(8) $$T^{-1}T(ST)^{-1} = T^{-1}(T(ST)^{-1}) = T^{-1}S^{-1}$$

(9) $$T^{-1}T(ST)^{-1} = (ST)^{-1}$$

Jadi berdasarkan (8) dan (9) diperoleh,

$(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$

3.2 Operator Terbatas dan Operator Linear yang Kontinu

3.2.1 Definisi (Operator Linear Terbatas)

Misalkan X, Y *ruang norm dan* $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ *merupakan operator linear, dimana* $\mathfrak{D}(T) \subset X$. *Operator* T *terbatas jika terdapat suatu* $c > 0$ *sedemikian sehingga*

(1) $$\|Tx\| \leq c\|x\|, \text{untuk setiap } x \in \mathfrak{D}(T)$$

dimana $Tx \in Y$.

Perhatikan (1) dimana dalam bentuk pembagiannya diperoleh bahwa,

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|} \leq c, \quad x \neq 0$$

Hal ini menunjukan bahwa, c harus merupakan supremum dari $\frac{\|Tx\|}{\|x\|}$ dengan mengambil domainnya adalah $\mathfrak{D}(T) - \{0\}$. Katakanlah $c = \|T\|$ sedemikian sehingga,

(2) $$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ x \neq 0}} \frac{\|Tx\|}{\|x\|}$$

$\|T\|$ dikatakan sebagai norm dari operator T. Jika domain $\mathfrak{D}(T) = \{0\}$, maka kita dapat mendefinisikan $\|T\| = 0$ sedemikian sehingga $T = 0$, karena $T0 = 0$ (3.1.4).

Karena $c = \|T\|$ maka diperoleh,

(3) $$\|Tx\| \leq \|T\| \|x\|$$

3.2.2 Lemma (Norm)

Misalkan T operator linear terbatas, maka

a) Norm T adalah

$$\|T\| = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{D}(T) \\ x = 1}} \|Tx\|$$

b) Norm T yang didefinisikan pada (2) jika $\|x\| \geq 0$ dan $\|x\| = 0$ sehingga $x = 0$ dan $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ maka,

$$\sup_{\|x\|=1} \|aTx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1 x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2 x\|$$

Bukti:

a) Misalkan T operator linear yang terbatas dan $\|x\| = a$, $y = (1/a)x$ dimana $x \neq 0$, maka $\|y\| = \|x\|/a = 1$.

Karena T operator linear maka,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}(T)\\ x\neq 0}} \frac{1}{a}\|Tx\| = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}(T)\\ x\neq 0}} \left\|T\left(\frac{1}{a}x\right)\right\| = \sup_{\substack{y\in\mathfrak{D}(T)\\ \|y\|=1}} \|Ty\|$$

Karena $x, y \in \mathfrak{D}(T)$ maka persamaan diatas menjadi,

$$\|T\| = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}(T)\\ \|x\|=1}} \|Tx\|$$

b) Misalkan $\|x\| \geq 0$, $\|0\| = 0$ dan $\|T\| = 0$ akan ditunjukan $Tx = 0$ untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T)$. Jadi $T = 0$.

Selanjutnya,

$$\sup_{\|x\|=1} \|\alpha Tx\| = \sup_{\|x\|=1} |\alpha|\|Tx\| = |\alpha| \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|$$

untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T)$.

Selanjutnya akan ditunjukan bahwa,

$$\sup_{\|x\|=1} \|(T_1 + T_2)x\| = \sup_{\|x\|=1} \|T_1x + T_2x\| \leq \sup_{\|x\|=1} \|T_1x\| + \sup_{\|x\|=1} \|T_2x\|$$

untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T)$.

3.2.3 Teorema (Dimensi Hingga)

Jika suatu ruang norm X berdimensi berhingga, maka setiap operator linear pada X terbatas.

Bukti:

Misalkan dimensi X atau $\dim X = n$ dan $e_1, \dots, e_n$ merupakan basis untuk X. Misalkan juga diberikan sembarang $x = \sum \xi_j e_j$ dan anggap T sembarang operator linear pada X.

Karena T linear maka,

$$\|Tx\| = \left\|\sum \xi_j Te_j\right\| \leq \sum |\xi_j| \|Te_j\| \leq \max_k \|Te_k\| \sum |\xi_j|$$

dimana $j = 1, \dots, n$.

Akibatnya berdasarkan Definisi (2.1.10) dengan $\alpha_j = \xi_j$ dan $x_j = e_j$, jumlah terakhir dari ketaksamaan diatas menjadi,

$$\sum |\xi_j| \leq \frac{1}{c}\left\|\sum \xi_j e_j\right\| = \frac{1}{c}\|x\|$$

Sehingga,

(4) $\quad \|Tx\| \leq \gamma\|x\|$ dimana $\gamma = \frac{1}{c}\max_k \|Te_k\|$

Berdasarkan (4) dan (1) maka diperoleh bahwa T terbatas.

3.2.4 Teorema (Kekontinuan dan Keterbatasan)

Misalkan $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ merupakan operator yang linear, dimana $\mathfrak{D}(T) \subset X$ dan X, Y keduanya ruang norm, maka

a) T kontinu jika dan hanya jika T terbatas

b) Jika T kontinu pada suatu titik tunggal maka T kontinu

Bukti:

a) $(\Longrightarrow)$ diketahui T kontinu akan ditunjukan T terbatas

Misalkan T kontinu pada sembarang titik, katakanlan $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$. Misalkan juga diberikan sembarang $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga,

(5) Untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T)$ mengakibatkan $\|x - x_0\| \leq \delta$ sedemikian sehingga $\|Tx - Tx_0\| \leq \varepsilon$.

Sekarang ambil sembarang $y \neq 0$ di $\mathfrak{D}(T)$, akibatnya

$$x = x_0 + \frac{\delta}{\|y\|} y \text{ maka } x - x_0 = \frac{\delta}{\|y\|} y$$

Karena T linear maka berdasarkan (5) mengakibatkan,

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| = \left\|T\left(\frac{\delta}{\|y\|} y\right)\right\| = \frac{\delta}{\|y\|}\|Ty\| \leq \varepsilon$$

$$\|Ty\| \leq \frac{\varepsilon}{\delta}\|y\|$$

Misalkan $\frac{\varepsilon}{\delta} = c$, maka

$$\|Ty\| \leq c\|y\|$$

Jadi T terbatas.

$(\Longleftarrow)$ diketahui T terbatas akan ditunjukan T kontinu.

Misalkan T terbatas dan anggap sembarang $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$ sehingga akan ditunjukan bahwa T kontinu di x_0. Misalkan juga diberikan sembarang $\varepsilon > 0$ maka terdapat $\delta > 0$ sedemikian sehingga,

$$\|x - x_0\| < \delta \text{ dimana } \delta = \frac{\varepsilon}{\|T\|}$$

Karena T linear maka untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T)$ mengakibatkan,

$$\|Tx - Tx_0\| = \|T(x - x_0)\| \leq \|T\|\,\|x - x_0\| < \|T\|\delta = \|T\|\frac{\varepsilon}{\|T\|} = \varepsilon$$

Karena $x_0 \in \mathfrak{D}(T)$ sembarang maka T kontinu.

3.2.5 Akibat (Kekontinuan, Ruang Null)

Misalkan T operator linear terbatas maka

a) Jika $x_n \to x$, dimana $x_n, x \in \mathfrak{D}(T)$ maka $Tx_n \to Tx$

b) Ruang null $\mathcal{N}(T)$ tertutup

Bukti:

a) Misalkan $x_n \to x$, dimana $x_n, x \in \mathfrak{D}(T)$, akan ditunjukan bahwa $Tx_n \to Tx$

$$\|Tx_n - Tx\| = \|T(x_n - x)\| \leq \|T\|\|x_n - x\| \to 0$$

Hal ini dikarenakan $x_n \to x$ sedemikian sehingga $\|x_n - x\| \to 0$.

Akibatnya, $\|Tx_n - Tx\| \to 0$.

Jadi, $Tx_n \to Tx$.

b) Akan ditunjukan bahwa ruang null $\mathcal{N}(T)$ tertutup

Berdasarkan teorema *closure* dan himpunan tutup, maka untuk setiap $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ sembarang, terdapat barisan (x_n) di $\mathcal{N}(T)$ sedemikian sehingga $x_n \to x$ dan dari bagian (a) mengakibatkan $Tx_n \to Tx$. Misalkan $Tx_n = 0$ maka $Tx = 0$. Karena berdasarkan definisi dari ruang null $\mathcal{N}(T)$ dimana himpunan dari semua $x \in \mathfrak{D}(T)$ mengakibatkan $Tx = 0$, sehingga $x \in \mathcal{N}(T)$.

Karena $x \in \overline{\mathcal{N}(T)}$ sembarang, maka $\mathcal{N}(T)$ tutup.

3.2.6 Definisi (Dua Operator yang Sama)

Dua operator T_1 dan T_2 didefinisikan sama maka ditulis,

$$T_1 = T_2$$

jika T_1, T_2 keduanya memiliki domain yang sama $\mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$ dan jika $T_1x = T_2x$, untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T_1) = \mathfrak{D}(T_2)$.

Pembatas dari suatu operator $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ ke suatu subset $B \subset \mathfrak{D}(T)$ dan dinotasikan oleh,

$T|_B$

dan operator pembatas ini didefinisikan oleh,

$$T|_B : B \to Y \text{ dan } T|_B x = Tx \text{ untuk setiap } x \in B$$

Serta suatu operator perluasan dari T ke suatu himpunan $M \supset \mathfrak{D}(T)$ didefinisikan oleh,

$$\tilde{T} : M \to Y \text{ sedemikian sehingga } \tilde{T}|_{\mathfrak{D}(T)} = T$$

sehingga, $\tilde{T}x = Tx$ untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T)$ (karena T merupakan $\tilde{T}$ ke domain $\mathfrak{D}(T)$).

3.2.7 Teorema (Perluasan Linear Terbatas)

Misalkan $T : \mathfrak{D}(T) \to Y$ merupakan operator linear terbatas, dimana $\mathfrak{D}(T) \subset X$ dan Y adalah ruang Banach, maka T memiliki perluasan,

$$\tilde{T} : \overline{\mathfrak{D}(T)} \to Y$$

dimana $\tilde{T}$ operator linear terbatas dari,

$$\|\tilde{T}\| = \|T\|$$

Bukti:

Misalkan diberikan sembarang $x \in \overline{\mathfrak{D}(T)}$, sehingga berdasarkan teorema closure dan himpunan tutup mengakibatkan, terdapat barisan (x_n) di $\mathfrak{D}(T)$ sedemikian sehingga $x_n \to x$.

Karena T linear dan terbatas maka,

$$\|Tx_n - Tx_m\| = \|T(x_n - x_m)\| \le \|T\|\|x_n - x_m\|$$

Akibatnya, (Tx_n) merupakan barisan *Cauchy* sebab (x_n) barisan yang konvergen.

Berdasarkan asumsi Y adalah ruang *Banach* hal ini mengakibatkan Y lengkap sedemikian sehingga (Tx_n) konvergen, katakanlah $(Tx_n) \to y \in Y$.

Selanjutnya didefinisikan $\tilde{T}$ oleh,

$$\tilde{T}x = y$$

Karena berdasarkan definisi bahwa setiap barisan akan konvergen ke limit yang sama, katakan jika $x_n \to x$ dan $z_n \to x$ maka $v_m \to x$, dimana (v_m) adalah barisan dari,

$$(x_1, z_1, x_2, z_2, \ldots)$$

Karena (Tv_m) konvergen maka dua subbarisan (Tx_n) dan (Tz_n) dari (Tv_m) harus memiliki limit yang sama. Hal ini menunjukan bahwa, $\tilde{T}$ didefinisikan unik pada setiap $x \in \overline{\mathfrak{D}(T)}$.

Jelas, $\tilde{T}$ linear sebab

$$T(x_n - z_n) = 0 = T(x_n) - T(z_n)$$

$$= y - y = 0$$

dan $\tilde{T}x = Tx$ untuk setiap $x \in \mathfrak{D}(T)$ sebab, $x_n \to x$ sedemikian sehingga $(Tx_n) \to Tx$ dan berdasarkan asumsi $(Tx_n) \to y$, akibatnya

$$(Tx_n) \to y = Tx = \tilde{T}x$$

Jadi, $\tilde{T}$ merupakan perluasan dari T.

3.2.8 Definisi (*Sesquilinear form*)

Misalkan $h : X \times Y \to K$, *disebut bentuk sesquilinear yang linear atau fungsi sesquilinear yang linear dimana subruang* $K = \mathbb{R} = \mathbb{C}$.

Jika untuk setiap $x, x_1, x_2 \in X$ *dan untuk setiap* $y, y_1, y_2 \in Y$ *serta untuk setiap skalar* α, β *maka,*

a) $h(x_1 + x_2, y) = h(x_1, y) + h(x_2, y)$

b) $h(x, y_1 + y_2) = h(x, y_1) + h(x, y_2)$

c) $h(\alpha x, y) = \alpha h(x, y)$

d) $h(x, \beta y) = \bar{\beta}(x, y)$

e) $h(x, y) = \langle Tx, y \rangle$, *dimana* $T : H_1 \to H_2$ *operator linear terbatas*

3.3 Operator *Hilbert*-Adjoint

3.3.1 Definisi (Operator *Hilbert*-adjoint T^*)

Misalkan $T: H_1 \rightarrow H_2$ merupakan operator linear yang terbatas, dimana H_1 dan H_2 keduanya merupakan ruang Hhilbert, maka operator adjoint T^* dari T adalah suatu operator Hilbert-adjoint,

$$T^*: H_2 \rightarrow H_1$$

sedemikian sehingga untuk setiap $x \in H_1$ dan untuk setiap $y \in H_2$

(1) $$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

Yang perlu diperhatikan bahwa jika diberikan T sedemikian sehingga T^* ada.

3.3.2 Teorema (Existensi)

Misalkan operator Hilbert-adjoint T^* dari T, dimana $T^*: H_2 \rightarrow H_1$ ada maka T^* unik dan merupakan operator linear yang terbatas dengan norm

(2) $$\|T^*\| = \|T\|$$

Bukti:

Misalkan T^* ada, diperoleh

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

misalkan juga bahwa, $h(y,x) = \langle y, Tx\rangle$ merupakan bentuk *sesquilinear* pada $H_2 \times H_1$ karena hasil kali dalamnya merupakan *sesquilinear* (Definisi (3.2.8) dan T merupakan operator yang linear.

Untuk sembarang skalar α, β maka diperoleh,

$$h(y, \alpha x_1 + \beta x_2) = \langle y, T(\alpha x_1 + \beta x_2)\rangle$$

$$= \langle y, \alpha T x_1 + \beta T x_2 \rangle$$
$$= \bar{\alpha}\langle y, T x_1\rangle + \bar{\beta}\langle y, T x_2\rangle$$
$$= \bar{\alpha} h(y, x_1) + \bar{\beta} h(y, x_2)$$

h terbatas, hal ini diperoleh dari ketaksamaan *schwarz*

$$|h(y,x)| = |\langle y, Tx\rangle| \leq \|y\|\|Tx\| \leq \|T\|\|x\|\|y\|$$

(3) $$\Leftrightarrow \|h\| \leq \|T\|$$

Berdasarkan definisi, T merupakan operator linear yang terbatas, sehingga untuk kasus $T = 0$ maka diperoleh,

(4) $$\|h\| = \sup_{\substack{x \neq 0 \\ y \neq 0}} \frac{|\langle Tx, y\rangle|}{\|x\|\|y\|} \geq \sup_{\substack{x \neq 0 \\ Tx \neq 0}} \frac{|\langle Tx, Tx\rangle|}{\|x\|\|Tx\|} = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \|T\|$$

Akibatnya diperoleh bahwa $\|h\| \geq \|T\|$.

Sehingga berdasarkan (3) dan (4) diperoleh bahwa

(4) $$\|h\| = \|T\|$$

berdasarkan Teorema (2.3.4) representasi *Riesz* dengan menggantikan $S = T^*$ mengakibatkan,

(5) $$h(y,x) = \langle T^* y, x\rangle$$

juga berdasarkan representasi Riesz menyatakan bahwa,

(6) $$\|S\| = \|T^*\| = \|h\|$$

Akibatnya berdasarkan (5) dan (7) diperoleh,

$$\|T^*\| = \|h\| = \|T\|$$

Jadi teorema terbukti.

3.3.3 Lemma (Operator Nol)

Misalkan X dan Y merupakan ruang hasil kali dalam dan $Q : X \to Y$ merupakan operator linear yang terbatas, maka:

a) $Q = 0$ jika dan hanya jika $\langle Qx, y \rangle = 0$ untuk setiap $x \in X$ dan untuk setiap $y \in Y$

b) Jika $Q : X \to X$, dimana X merupakan ruang kompleks dan $\langle Qx, x \rangle = 0$ untuk setiap $x \in X$ maka $Q = 0$

Bukti:

a) $(\Longrightarrow)$ diketahui $Q = 0$ akan ditunjukan $\langle Qx, y \rangle = 0$ untuk setiap $x \in X$ dan untuk setiap $y \in Y$.

Misalkan $Q = 0$ hal ini menyatakan bahwa $Qx = 0$ untuk setiap $x \in X$ dan mengakibatkan,

$$\langle Qx, y \rangle = \langle 0, y \rangle = 0\langle x, y \rangle = 0$$

$(\Longleftarrow)$ diketahui $\langle Qx, y \rangle = 0$ untuk setiap $x \in X$ dan untuk setiap $y \in Y$ akan ditunjukan $Q = 0$.

Misalkan $\langle Qx, y \rangle = 0$ untuk setiap $x \in X$ dan untuk setiap $y \in Y$, ini berarti bahwa $Qx = 0$, untuk setiap $x \in X$.

Misalkan juga, $\langle Qx_1, y \rangle = \langle Qx_2, y \rangle$ dengan $Qx_1 = Qx_2$, $x_1, x_2 \in X$ akibatnya:

$$\langle Qx_1 - Qx_2, y \rangle = \langle Qx_1, y \rangle - \langle Qx_2, y \rangle = 0$$

untuk $y = Qx_1 - Qx_2$, sedemikian sehingga $\|y\|^2 = \|Qx_1 - Qx_2\|^2 = 0$.

Karena $Qx_1 = Qx_2$, hal ini mengakibatkan $\langle Qx_1, y\rangle = 0$ dengan $y = Qx_1$, sehingga $\|Qx_1\|^2 = 0$.

Jadi, Q$x_1 = 0$ sedemikian sehingga $Q = 0$.

b) Misalkan$\langle Qx, x\rangle = 0$ dan $\langle Qv, v\rangle = 0$ dengan $v = \alpha x + y \in X$

Akibatnya,

$$0 = \langle Qv = \alpha x + y, v = \alpha x + y\rangle$$

$$(1) \qquad = |\alpha|^2\langle Qx, x\rangle + \langle Qy, y\rangle + \alpha\langle Qx, y\rangle + \bar{\alpha}\langle Qy, x\rangle$$

Berdasarkan asumsi maka persamaan (1) dan untuk $\alpha = 1$, maka diperoleh,

(2) $$\langle Qx, y\rangle + \langle Qy, x\rangle = 0$$

Sedangkan untuk untuk $\alpha = i$ dan untuk $\alpha = -i$ mengakibatkan persamaan (1) menjadi,

(3) $$\langle Qx, y\rangle - \langle Qy, x\rangle = 0$$

Berdasarkan (2) dan (3) dengan menjumlahkannya maka diperoleh,

$$2\langle Qx, y\rangle = 0 \iff \langle Qx, y\rangle = 0$$

Berdasarkan pembuktian (a) mengakibatkan $Q = 0$.

3.3.4 Teorema (Kelengkapan dari Operator *Hilbert*-adjoint)

Misalkan H_1, H_2 merupakan ruang Hilbert, dimana $S : H_1 \to H_2$ dan $T : H_1 \to H_2$ dimana keduanya merupakan operator linear yang terbatas dan untuk sembarang skalar α, maka

a) $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$, $(x \in H_1, y \in H_2)$

b) $(S+T)^* = S^* + T^*$

c) $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

d) $(T^*)^* = T$

e) $\|T^*T\| = \|TT^*\| = \|T\|^2$

f) $T^*T = 0 \quad \Leftrightarrow \quad T = 0$

g) $(ST)^* = T^*S^*$*, dengan mengasumsikan bahwa* $H_2 = H_1$

Bukti:

a) Misalkan $T:\ H_1 \to H_2$ dan $T^*: H_2 \to H_1$ merupakan operator yang linear maka berdasarkan definisi (3.3.1) operator *Hilbert*-adjoint diperoleh:

$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$

untuk setiap $x \in H_1$ dan untuk setiap $y \in H_2$

Juga berdasarkan Definisi (2.2.2) berlaku

(1) $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$

akan ditunjukan $\langle T^*y, x\rangle = \langle y, Tx\rangle$

$\langle T^*y, x\rangle = \overline{\langle x, T^*y\rangle} = \overline{\langle Tx, y\rangle} = \langle y, Tx\rangle$

b) Misalkan untuk setiap $y \in \mathfrak{D}(T^*), \mathfrak{D}(S^*)$ sedemikian sehingga,

$$(S+T)^*(y) = (S^*y + T^*y)$$
$$= (S^* + T^*)(y)$$

c) Sebelum membuktikannya, bagian (c) diatas mempunyai bentuk yang sama dengan $T^*(\alpha x) = \alpha T^*x$.

Juga berdasarkan Definisi (2.2.2) berlaku

$\langle x, \alpha y\rangle = \bar{\alpha}\langle x, y\rangle$

Akibatnya,

$$\langle(\alpha T)^* y, x\rangle = \langle y, (\alpha T)x\rangle$$

$$= \langle y, \alpha(Tx)\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\langle y, Tx\rangle$$

$$= \bar{\alpha}\langle T^* y, x\rangle$$

$$= \langle \bar{\alpha} T^* y, x\rangle$$

Jadi, $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

d) Dengan menggunakan definisi (3.3.1) operator *Hilbert*-adjoint T^* dan dari (a) maka:

$$\langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle x, T^* y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle (T^*)^* x, y\rangle = \langle Tx, y\rangle$$

Hal ini berarti bahwa,

$$(T^*)^* x = Tx \Leftrightarrow (T^*)^* = T$$

e) Misalkan untuk setiap x dan y dan supremum $\|x\| = 1$ diatas maka dengan menggunakan ketaksamaan Schwarz diperoleh,

$$\|Tx\|^2 = \langle Tx, Tx\rangle = \langle T^*Tx, x\rangle \leq \|T^*Tx\|\|x\| \leq \|T^*T\|\|x\|^2$$

Sehingga berdasarkan asumsi maka diperoleh,

$$\|T\|^2 \leq \|T^*T\|$$

Selanjutnnya,

$$\|T^*T\| \leq \|T^*\|\|T\| = \|T\|\|T\| = \|T\|^2$$

Akibatnya, $\|T^*T\| = \|T\|^2$

Dengan menggantikan, T dengan T^* maka diperoleh,

$\|T^{**}T^{*}\| = \|T^{*}\|^2 = \|T\|^2$

Dimana $T^{**} = T$ berdasarkan (d). Akibatnya diperoleh,

$\|T^{*}T\| = \|TT^{*}\| = \|T\|^2$

f) Berdasarkan (6e) maka (6f) terbukti.

g) Misalkan S, T operator yang linear. Akibatnya berdasarkan (1) diperoleh,

$$\begin{aligned} \langle x, (ST)^{*}y \rangle &= \langle STx, y \rangle \\ &= \langle Tx, S^{*}y \rangle \\ &= \langle x, T^{*}S^{*}y \rangle \\ \Leftrightarrow (ST)^{*} &= T^{*}S^{*} \end{aligned}$$

3.4 Self-adjoint, Unitary dan Operator Normal

3.4.1 Definisi (Self-adjoint, Unitary, dan Operator Normal)

Suatu operator linear terbatas $T : H \to H$ pada ruang Hilbert H merupakan suatu

Self-adjoint atau hermitian jika $T^{*} = T$

Unitary jika T bijektif dan $T^{*} = T^{-1}$

Normal jika $TT^{*} = T^{*}T$

Operator adjoint T^{*} dari T yang telah didefinisikan sebelumnya menyatakan bahwa,

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^{*}y \rangle$$

Jika T self-adjoint maka rumus diatas akan menjadi,

(1) $$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$$

Jika T self-adjoint atau unitary maka T adalah operator normal. Tetapi tidak sebaliknya sebab, jika T operator normal belum tentu T self-adjoint atau unitary.

3.4.2 Teorema (Self-Adjoint)

Misalkan $T : H \rightarrow H$ merupakan operator yang linear pada ruang Hilbert H, maka,

a) Jika T self-adjoint, maka $\langle Tx, x\rangle$ elemen bilangan real untuk setiap $x \in H$

b) Jika H merupakan ruang yang kompleks dan $\langle Tx, x\rangle$ elemen bilangan real maka operator T self-adjoint.

Bukti:

a) Jika T self adjoint maka berdasarkan definisi diperoleh,

$\langle Tx, y\rangle = \langle x, Ty\rangle$

untuk setiap $x \in H$.

Perhatikan persamaan bagian kanan,

$\overline{\langle Tx, x\rangle} = \langle x, Tx\rangle = \langle Tx, x\rangle$

Jadi diperoleh bahwa $\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle}$. Akibatnya, $\langle Tx, x\rangle$ elemen bilangan real.

b) Jika $\langle Tx, x\rangle$ elemen bilangan real untuk setiap $x \in H$ maka

$\langle Tx, x\rangle = \overline{\langle Tx, x\rangle} = \overline{\langle x, T^*x\rangle} = \langle T^*x, x\rangle$

Karena,

$0 = \langle Tx, x\rangle - \langle T^*x, x\rangle = \langle (T - T^*)x, x\rangle$

dan $T - T^* = 0$, sebab H kompleks.

Jadi, T operator yang self-adjoint.

3.4.3 Teorema (Perkalian dari Self-Adjoint)

Perkalian dari dua operator linear self-adjoint yang terbatas S dan T pada ruang Hilbert H adalah self adjoint jika dan hanya jika merupakan operator komutatif dan

(2) $$ST = TS$$

Bukti:

($\Leftarrow$) diketahui $ST = TS$ akan ditunjukan S dan T operator yang self-adjoint

Sehingga berdasarkan Teorema (3.2.4(g)) diperoleh,

$(ST)^* = T^*S^* = ST = TS$

($\Rightarrow$) jika S dan T operator yang self-adjoint maka $ST = TS$

Berdasarkan Teorema (3.2.4(g)) diperoleh,

$$(ST)^* = T^*S^*$$

Misalkan S, T dua operator linear self-adjoint yang terbatas, diperoleh,

$$T^* = T \text{ dan } S^* = S$$

Akibatnya,

$$ST = (ST)^* \text{ dan } TS = T^*S^* = (ST)^*$$

Jadi diperoleh $ST = TS$.

3.4.4 Teorema (Barisan dari Operator Self-adjoint)

Misalkan (T_n) *merupakan barisan dari operator linear self-adjoint yang terbatas, dimana* $T_n : H \to H$ *pada suatu ruang Hilbert* H*. Didefinisikan* (T_n) *konvergen, katakanlah* (T_n) *konvergen ke* T *dan ditulis,*

$$T_n \to T \text{ sedemikian sehingga } \|T_n - T\| \to 0$$

dimana ekspresi pada $\|\cdot\|$ *merupakan norm pada ruang banach* $B(H, H)$*, maka limit operator* T *merupakan operator linear self-adjoint yang terbatas pada* H.

Bukti:

Misalkan $\|T - T^*\| = 0$ dan (T_n) barisan dari operator linear self-adjoint yang terbatas dan barisan (T_n) konvergen ke T sedemikian sehingga,

$$\|T_n - T\| \to 0$$

akan ditunjukan bahwa, $T^* = T$.

Dengan menggunakan Teorema (3.2.4) diperoleh,

$$\|T_n^* - T^*\| = \|(T_n - T)^*\| = \|T_n - T\|$$

Sehingga berdasarkan Lemma (2.3.1) diperoleh,

$$\begin{aligned} \|T - T^*\| = \|T - T_n + T_n - T_n^* + T_n^* - T^*\| & \\ \leq \|T - T_n\| + \|T_n - T_n^*\| + \|T_n^* - T^*\| & \\ = \|T - T_n\| + 0 + \|T_n - T\| & \\ = 2\|T_n - T\| \to 0, \quad (n \to \infty) & \end{aligned}$$

Karena, $\|T - T^*\| = 0$ akibatnya, $T^* = T$.