

# BAB I

## PENDAHULUAN

### 1.1 Latar Belakang

Analisis fungsional merupakan salah satu cabang dari kelompok analisis yang membahas operator, operator linear dan sifat-sifatnya. Sebuah pemetaan antar ruang bernorm  $X$  disebut linear bila untuk setiap  $x, y \in X$  dan skalar  $\alpha, \beta$  berlaku,

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

Kasus khusus dari operator linear adalah operator linear terbatas. Misalkan  $X, Y$  ruang bernorm, dan  $S : \mathcal{D}(S) \subset X \rightarrow Y$  operator linear. Operator  $S$  dikatakan terbatas jika dan hanya jika terdapat  $c > 0$  sedemikian sehingga

$$\|Sx\| \leq c\|x\|, \text{ untuk setiap } x \in \mathcal{D}(S)$$

Salah satu kajian yang cukup menarik dalam operator linear terbatas adalah masalah perluasan dari operator tersebut. Misalkan diberikan  $S$  operator linear terbatas, operator  $T$  dikatakan perluasan dari operator  $S$  dinotasikan dengan  $S \subset T$  jika dan hanya jika  $\mathcal{D}(S) \subset \mathcal{D}(T)$  sedemikian sehingga  $T|_{\mathcal{D}(S)} = S$ .

Perluasan dari operator linear terbatas memiliki dua kemungkinan. Pertama adalah perluasan dari operator linear terbatas akan tetap terbatas dan kemungkinan kedua adalah perluasannya akan menjadi operator linear tak terbatas.

Konsep operator linear terbatas akan digunakan untuk menjelaskan sifat-sifat dari operator linear terbatas yang diwariskan pada operator perluasannya.

Berdasarkan uraian di atas dalam penulisan tugas akhir ini, penulis tertarik untuk mengambil judul tentang “**OPERATOR PERLUASAN DARI OPERATOR LINEAR TERBATAS PADA SUATU RUANG *HILBERT***”.

### **1.2 Rumusan Masalah**

Berdasarkan latar belakang masalah, maka masalah dalam tugas akhir ini adalah sebagai berikut :

1. Apa yang dimaksud dengan operator linear tak terbatas pada ruang *Hilbert*  $H$ ?
2. Sifat-sifat apakah yang berlaku pada operator linear tak terbatas pada ruang *Hilbert*  $H$ ?
3. Apa yang dimaksud dengan operator linear tertutup dan ketertutupannya pada ruang *Hilbert*  $H$ ?
4. Bagaimana definisi dari operator perkalian dan operator diferensial pada ruang *Hilbert*  $H$ ?

### **1.3 Batasan Masalah**

Pada tugas akhir ini, penulis membatasi masalah hanya pada ruang *Hilbert*  $H$ . Pada dasarnya, sebuah ruang *Hilbert*  $H$  adalah sebuah ruang vektor bernorm yang lengkap, dimana normnya diinduksi dari sebuah hasil kali dalam.

### **1.4 Tujuan**

Berdasarkan permasalahan yang telah diuraikan dalam rumusan masalah, maka tujuan dari penulisan tugas akhir ini:

- 1 Untuk mengetahui operator linear tak terbatas pada ruang *Hilbert*  $H$ .
- 2 Untuk mengetahui sifat-sifat yang berlaku pada operator linear tak terbatas pada ruang *Hilbert*  $H$ .

- 3 Untuk mengetahui operator linear tertutup dan ketertutupannya pada ruang *Hilbert*  $H$ .
- 4 Untuk mengetahui definisi dari operator perkalian dan operator diferensial pada ruang *Hilbert*  $H$ .

### 1.5 Manfaat Tugas Akhir

Tugas Akhir ini diharapkan dapat memberikan manfaat yang berguna bagi semua pihak baik secara Akademis maupun secara Praktis, antara lain :

#### 1. Akademis

##### a) Bagi Penulis

Tugas akhir ini diharapkan dapat meningkatkan pengetahuan penulis yang di dapat selama menempuh perkuliahan dan mendapatkan wawasan yang lebih baik mengenai operator linear baik terbatas maupun tak terbatas dalam ruang *Hilbert*  $H$ .

##### b) Bagi Peneliti Selanjutnya

Hasil dari tugas akhir ini dapat digunakan sebagai salah satu sumber informasi dan referensi yang akan memberikan masukan dalam pengembangan masalah-masalah yang berkaitan dengan masalah yang diangkat dalam tugas akhir ini.

#### 2. Praktisi

Meningkatkan ilmu pengetahuan dan menambah wawasan mengenai operator linear tak terbatas pada ruang *Hilbert*, serta mampu mengidentifikasi permasalahan dan memberikan alternatif pemecahan masalah.

## 1.6 Sistematika Pembahasan

Tugas akhir ini terdiri dari 5 (lima) bab yang saling berkaitan satu sama lain, yaitu:

### BAB I : PENDAHULUAN

Menguraikan latar belakang permasalahan, rumusan masalah, batasan masalah, tujuan serta manfaat baik bagi akademis maupun praktisi.

### BAB II : LANDASAN TEORITIS

Menguraikan tentang teori-teori yang digunakan dalam memecahkan permasalahan pada tugas akhir ini, antara lain tentang ruang matriks, ruang hasil kali dalam pada ruang *Hilbert*, kelengkapan ruang hasil kali dalam, komplemen ortogonal dan *direct sum* serta himpunan dan barisan ortonormal.

### BAB III: OPERATOR LINEAR TERBATAS PADA RUANG *HILBERT*

Berisi pembahasan tentang operator linear, operator linear terbatas dan operator linear kontinu, operator *Hilbert*-adjoint, self-adjoint.

### BAB VI: OPERATOR LINEAR TAK TERBATAS PADA SUATU RUANG *HILBERT*

Bab ini berisi tentang inti permasalahan yang dikaji, diantaranya pembahasan mengenai operator linear tak terbatas, operator *Hilbert*-adjoint, operator simetrik dan operator linear yang self-

adjoint, operator linear tertutup dan ketertutupannya, dan aplikasinya pada operator perkalian dan operator diferensial.

#### BAB V : KESIMPULAN DAN SARAN

Bagian ini berisi tentang hasil-hasil kajian atau temuan dan beberapa saran untuk pengembangan penelitian selanjutnya.

