

BAB III

KAJIAN MATEMATIS DALAM ASURANSI JIWA

Nilai dana cadangan santunan yang harus dimiliki oleh setiap perusahaan asuransi jiwa merupakan hasil proses dari berbagai kajian matematis yang telah dilakukan, salah satunya berdasarkan nilai premi yang telah ditentukan. Oleh karena itu, pada bab ini akan dibahas berbagai kajian matematis yang terdapat dalam asuransi jiwa terutama mengenai proses penentuan nilai premi yang akan dibebankan kepada nasabah, dimana untuk selanjutnya nilai premi ini akan mempengaruhi proses penentuan nilai dana cadangan santunan pada suatu perusahaan asuransi jiwa.

3.1 Bunga Majemuk

Di dalam setiap polis atau kontrak asuransi jiwa pasti melibatkan sejumlah uang, baik berbentuk premi yang dibayarkan nasabah ke perusahaan asuransi maupun dalam bentuk santunan yang dibayarkan perusahaan asuransi ke nasabah. Adapun di dalam kontrak yang telah disepakati antara kedua belah pihak tersebut, biasanya memuat unsur jangka waktu yang cukup panjang (bisa puluhan tahun). Nilai dari sejumlah uang yang tertera dalam kontrak asuransi jiwa akan berbeda jika dilihat pada waktu yang akan datang, hal ini dapat terjadi karena adanya faktor bunga. Oleh karena itu, akan dibahas mengenai berbagai jenis dari bunga majemuk yang terdapat dalam perhitungan asuransi jiwa ini.

3.1.1 Suku Bunga Nominal dan Efektif

Dalam perhitungan asuransi, terdapat dua jenis suku bunga majemuk yaitu suku bunga nominal dan suku bunga efektif. Perbedaan kedua suku bunga tersebut terletak pada periode pembayaran (perhitungan) bunga yang biasa disebut periode konversi. Apabila periode pembayaran bunganya adalah tahunan, maka suku bunganya disebut suku bunga efektif. Selain dari itu, suku bunganya disebut suku bunga nominal. Suku bunga nominal dan suku bunga efektif dinyatakan dalam bentuk persen per tahun serta dinotasikan dalam i untuk suku bunga efektif dan $i^{(m)}$ untuk suku bunga nominal, dimana m menyatakan frekuensi bunga yang dibayarkan dalam setahun.

Berikut contoh penerapan suku bunga, akan ditentukan besar uang pokok setelah satu tahun dengan menggunakan suku bunga nominal dan suku bunga efektif jika dimisalkan suku bunga tahunan sebesar 5 % dan uang pokok sebesar Rp 1,- .

- Dengan menggunakan suku bunga efektif, maka $i = 5\%$ dan di akhir tahun uang pokok akan berubah menjadi sebesar $(1+i)$
- Dengan menggunakan suku bunga nominal, maka $i^{(m)} = i^{12} = 5\%$. Hal ini berarti akan ada pembayaran bunga majemuk setiap bulannya sebesar $\frac{5}{12}\% = \frac{0,05}{12}$, sehingga mengakibatkan uang pokok sebesar Rp 1,- akan

berubah menjadi $\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m = \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12}$

Terdapat ekivalensi diantara suku bunga efektif i dan suku bunga nominal $i^{(m)}$

dan dapat dilihat dalam persamaan berikut:

$$(1+i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m \quad (3.1)$$

Sehingga untuk contoh di atas dengan suku bunga nominal $i^{(m)} = 5\%$ diperoleh:

$$(1+i) = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1$$

$$i = \left(1 + \frac{0,05}{12}\right)^{12} - 1$$

$$i = 0,0512$$

$$i = 5,12\%$$

Jadi suku bunga nominal $i^{12} = 5\%$ ekuivalen dengan suku bunga efektif $i = 5,12\%$. Berdasarkan persamaan (3.1) akan diperoleh persamaan berikut:

$$\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right) = (1+i)^{\frac{1}{m}}$$

$$i^{(m)} = m \left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1 \right] \quad (3.2)$$

Jika $m \rightarrow \infty$ maka akan diperoleh definisi *the force of interest*.

Definisi 3.1.1 (*the force of interest*)

The force of interest didefinisikan dengan:

$$\delta = \lim_{m \rightarrow \infty} i^{(m)} \quad (3.3)$$

Maka limit untuk persamaan (3.1) adalah:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1+i) = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m} \right)^m = e^\delta \quad (3.4)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} (1+i) = e^\delta$$

$$(1+i) = e^\delta \Leftrightarrow \delta = \ln(1+i) \quad (3.5)$$

Nilai akumulasi untuk jangka waktu t tahun yang dinyatakan dengan $(1+i)^t = e^{\delta t}$ disebut faktor akumulasi sedangkan faktor diskonto dalam periode yang sama dinyatakan dengan $(1+i)^{-t} = e^{-\delta t}$ atau $v^t = e^{-\delta t}$ dimana $v = (1+i)^{-1}$.

3.1.2 Diskonto

Diskonto adalah pembayaran di muka dan dinyatakan dengan suku diskonto (*discount rate*) yang dinotasikan dengan d . Berikut ini diberikan sebuah contoh penerapan diskonto. Apabila suku diskonto efektif $d = 5\%$ diterapkan pada investasi seseorang yang berjumlah Rp 1.000.000,- maka dapat diartikan bahwa investor tersebut mendapat bunga di muka sebesar $d \times \text{Rp } 1.000.000,- = 5\% \times \text{Rp } 1.000.000,- = \text{Rp } 50.000,-$ dan uang pokok sebesar Rp 1.000.000,- akan dikembalikan di akhir tahun. Jika bunga yang diperoleh sebesar Rp 50.000,- akan diinvestasikan juga, maka akan diperoleh bunga sebesar $d^2 \times \text{Rp } 1.000.000,- = \text{Rp } 2.500,-$. Jika investasi ini dilakukan berulang-ulang dengan pola yang sama, maka pada akhir tahun akan diperoleh uang pokok sebesar Rp 1.000.000,- ditambahkan hasil investasi bunga, dimana jumlah keseluruhannya pada akhir tahun akan membentuk deret geometri sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
&= 1.000.000 + d \times 1.000.000 + d^2 \times 1.000.000 + d^3 \times 1.000.000 + \dots \\
&= 1.000.000 \times (1 + d + d^2 + d^3) \\
&= 1.000.000 \times \frac{1}{1-d}
\end{aligned}$$

Jumlah tersebut akan ekuivalen dengan investasi sebesar Rp 1.000.000,- dengan suku bunga efektif sebesar 5 %, sehingga pada akhir tahun akan diperoleh

persamaan $1.000.000 \times \frac{1}{1-d} = 1.000.000(1+i)$

$$\frac{1}{1-d} = (1+i) \quad (3.6)$$

Berdasarkan persamaan (3.6) diperoleh hubungan-hubungan sebagai berikut:

(i) $i = \frac{1}{1-d} - 1$

$$i = \frac{d}{1-d} \quad (3.7)$$

(ii) $1-d = (1+i)^{-1}$

$$d = 1-v, \text{ dengan } v = (1+i)^{-1} \quad (3.8)$$

(iii) $d = 1 - \frac{1}{1+i}$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$d = i.v, \text{ dengan } v = (1+i)^{-1} \quad (3.9)$$

3.1.3 Anuitas Pasti

Anuitas adalah serangkaian pembayaran periodik dalam jangka waktu tertentu. Pada anuitas pasti pembayarannya tidak terkait dengan kehidupan

seseorang dimana pembayaran yang dilakukan berada dalam jangka waktu tertentu . Nilai tunai anuitas pasti dengan n kali pembayaran sebesar Rp 1,- setiap awal tahun dinyatakan dengan notasi $\ddot{a}_{\overline{n}|}$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1}$$

Dikarenakan pola di atas sesuai dengan deret geometri berhingga, maka dapat diperoleh nilai tunai anuitas pasti dengan n kali pembayaran sebesar,

$$\begin{aligned}\ddot{a}_{\overline{n}|} &= \frac{1-v^n}{1-v} \\ \ddot{a}_{\overline{n}|} &= \frac{1-v^n}{d}\end{aligned}\quad (3.10)$$

Selain anuitas pasti, terdapat dua jenis anuitas lainnya yaitu anuitas-sekarang (*annuity-due*) dan anuitas-segera (*annuity-immediate*). Adapun yang dimaksud dengan anuitas-sekarang adalah anuitas dengan periode pembayaran setiap awal tahun, sedangkan untuk periode pembayaran setiap akhir tahun disebut anuitas-segera. Nilai tunai anuitas-segera dengan n kali pembayaran sebesar Rp 1,- setiap akhir tahun dinotasikan dengan $a_{\overline{n}|}$

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + v^3 + \dots + v^n$$

Dikarenakan pola nilai tunai anuitas-segera di atas sesuai dengan deret geometri berhingga, maka dapat diperoleh nilai tunai anuitas dengan n kali pembayaran

sebesar,

$$\begin{aligned}a_{\overline{n}|} &= v \frac{1-v^n}{1-v} \\ a_{\overline{n}|} &= v \frac{1-v^n}{d}\end{aligned}\quad (3.11)$$

Apabila persamaan (3.9) disubstitusikan terhadap persamaan (3.11) maka diperoleh:

$$a_{\overline{n}|} = \frac{v(1-v^n)}{i \cdot v}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{(1-v^n)}{i} \quad (3.12)$$

3.2 Mortalitas

Mortalitas ini untuk selanjutnya akan diungkapkan melalui variabel acak $T(x)$ yang menyatakan sisa umur seseorang yang berusia x . Adapun materi yang akan dibahas pada sub-bab mortalitas ini berkaitan dengan peluang hidup dan peluang kematian seseorang yang akan mempengaruhi besarnya pembayaran premi.

3.2.1 Variabel Acak $T(x)$

Pada awal pembahasan sub-bab ini akan diperkenalkan notasi (x) yang menyatakan seseorang yang berusia x tahun, sedangkan jarak waktu antara sekarang sampai (x) meninggal dunia akan disebut sisa umur bagi (x) dan ditulis dengan notasi $T(x)$ untuk $x \geq 0$. Dikarenakan tidak ada seorangpun yang mengetahui berapa sisa umurnya, maka variabel $T(x)$ yang menyatakan sisa umur bagi (x) merupakan variabel acak kontinu.

Sebagai contoh, seseorang yang berusia 20 tahun akan dituliskan dengan notasi (20). Apabila orang tersebut meninggal pada usia 85 tahun, maka jarak

waktu dari sekarang sampai ia meninggal adalah 65 tahun dan jika dinotasikan dalam variabel $T(x)$ adalah $T(20) = 65$.

Fungsi distribusi dari $T(x)$ dinyatakan dengan $F_{T(x)}(t)$ atau diringkas notasinya menjadi $F(t)$ (dengan menghilangkan indeks $T(x)$ asal tidak menimbulkan kesalah pahaman bagi pembaca) atau didefinisikan dengan,

$$F(t) = P(T(x) \leq t), \quad t \geq 0$$

$F(t)$ menyatakan peluang (x) akan meninggal dalam t tahun. Adapun fungsi kepadatan peluang (*probability density function*) untuk variabel acak $T(x)$ yang kontinu dapat dinyatakan dengan,

$$f(t) = \frac{d}{dt} F(t) \Leftrightarrow f(t) dt = dF(t)$$

Nilai $f(t) dt$ dapat didekati oleh nilai,

$$\begin{aligned} f(t) dt &\approx \Delta F(t) \\ &\approx F(t+dt) - F(t) \\ &\approx P(T(x) \leq t+dt) - P(T(x) \leq t) \\ &\approx P(t \leq T(x) \leq t+dt) \end{aligned}$$

Persamaan $f(t) dt \approx \Delta F(t)$ dapat diartikan sebagai peluang (x) akan meninggal antara t dan $t+dt$.

Notasi yang digunakan dalam matematika aktuarial (matematika asuransi) untuk menyatakan $F(t)$ adalah ${}_t q_x$, sehingga :

$${}_t q_x = F(t) \tag{3.13}$$

$$= P(T(x) \leq t) \tag{3.14}$$

Jadi dapat diartikan bahwa ${}_t q_x$ adalah peluang seseorang berusia x akan meninggal dalam t tahun, sedangkan ${}_t p_x = 1 - {}_t q_x$ adalah peluang seseorang berusia x akan tetap hidup paling sedikit t tahun lagi.

$$\begin{aligned} {}_t p_x &= 1 - {}_t q_x \\ &= 1 - F(t) \\ &= 1 - P(T(x) \leq t) \\ &= P(T(x) > t) \end{aligned}$$

Notasi ${}_t p_x$ dapat pula menyatakan bahwa peluang seseorang berusia x akan meninggal setelah t tahun dan dikenal sebagai fungsi *survival* dalam Analisis Data Uji Hidup. Jika $x = 0$ maka ${}_t p_0$ menyatakan peluang bayi yang baru lahir dapat mencapai usia t tahun, yaitu suatu fungsi *survival* yang dinyatakan dengan notasi $s(t) = {}_t p_0$. Apabila t diganti oleh r maka diperoleh peluang bayi baru lahir dapat mencapai usia r didefinisikan dengan

$$s(x) = {}_r p_0 \quad (3.15)$$

Karakteristik variabel acak $T(x)$ akan memanfaatkan konsep *the force of mortality* yang dapat didefinisikan sebagai berikut :

Definisi 3.2.1 (*the force of mortality*)

The force of mortality dari (x) pada usia $x+t$ didefinisikan dengan,

$$\mu_{x+t} = \frac{f(t)}{1 - F(t)} \quad (3.16)$$

Definisi μ_{x+t} dapat diturunkan lagi menjadi,

$$\begin{aligned}
 \mu_{x+t} &= \frac{f(t)}{1-F(t)} \\
 &= \frac{dF(t)}{dt} \frac{1}{1-F(t)} \\
 &= \frac{d(1-{}_t p_x)}{dt} \frac{1}{{}_t p_x} \\
 &= -\frac{d {}_t p_x}{dt} \frac{1}{{}_t p_x}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

$$= -\frac{d}{dt} \ln {}_t p_x \tag{3.18}$$

Persamaan (3.18) dapat dituliskan kembali sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 d \ln {}_s p_x &= -\mu_{x+s} ds \\
 \int_0^t d \ln {}_s p_x &= -\int_0^t \mu_{x+s} ds \\
 \ln {}_s p_x \Big|_0^t &= -\int_0^t \mu_{x+s} ds \\
 \ln {}_t p_x &= -\int_0^t \mu_{x+s} ds \\
 {}_t p_x &= e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} \\
 {}_t p_x &= \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right)
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

Dari persamaan (3.17) atau (3.18) dapat diturunkan menjadi:

$$\begin{aligned}
 -\frac{d {}_t p_x}{dt} \frac{1}{{}_t p_x} &= \mu_{x+t} \\
 \frac{d {}_t p_x}{dt} &= -{}_t p_x \cdot \mu_{x+t}
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

$$\frac{d(1-F(t))}{dt} = - {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$$

$$-\frac{d(F(t))}{dt} = - {}_t p_x \cdot \mu_{x+t}$$

$$f(t) = {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} \quad (3.21)$$

$$f(t) = \left[\exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} ds\right) \right] \mu_{x+t} \quad (3.22)$$

Di dalam matematika aktuaria diberikan beberapa definisi peluang bersyarat yang akan digunakan pada pembahasan selanjutnya, antara lain:

- (1) ${}_t p_{x+s}$ merupakan peluang bersyarat bahwa (x) akan mencapai usia $x+t+s$ tahun apabila telah mencapai usia $x+s$ tahun. ${}_t p_{x+s}$ dapat pula diartikan sebagai peluang bersyarat bahwa (x) akan meninggal pada usia $x+t+s$ tahun apabila telah mencapai usia $x+s$ tahun. Peluang bersyarat ini dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} {}_t p_{x+s} &= P(T(x) > s+t | T(x) > s) \\ &= \frac{P(\{T(x) > s+t\} \cap \{T(x) > s\})}{P(T(x) > s)} \\ &= \frac{P(T(x) > s+t)}{P(T(x) > s)} \\ &= \frac{1 - P(T(x) \leq s+t)}{1 - P(T(x) \leq s)} \\ &= \frac{1 - F(s+t)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{1 - {}_{s+t} q_x}{1 - {}_s q_x} = \frac{{}_{s+t} p_x}{{}_s p_x} \end{aligned} \quad (3.23)$$

- (2) ${}_{s+t}p_x$ adalah peluang (x) akan mencapai usia $x+t+s$ tahun. Peluang ini diperoleh dengan memanfaatkan persamaan (3.23), yaitu:

$${}_{s+t}p_x = {}_s p_x \cdot {}_t p_{x+s} \quad (3.24)$$

- (3) ${}_t q_{x+s}$ merupakan peluang bersyarat bahwa (x) akan meninggal sebelum usia $x+t+s$ tahun apabila telah mencapai usia $x+s$ tahun. Peluang bersyarat ini dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} {}_t q_{x+s} &= 1 - {}_t p_{x+s} \\ &= 1 - \frac{1 - F(s+t)}{F(s)} \\ &= \frac{F(s+t) - F(s)}{1 - F(s)} \\ &= \frac{{}_{s+t}q_x - {}_s q_x}{{}_s p_x} \end{aligned} \quad (3.25)$$

- (4) ${}_{s|t}q_x$ adalah peluang (x) akan meninggal antara usia $x+s$ tahun dan $x+t+s$ tahun. Peluang ini dapat dinyatakan dengan persamaan berikut:

$$\begin{aligned} {}_{s|t}q_x &= P(s < T(x) \leq s+t) \\ &= P(T(x) \leq s+t) - P(T(x) \leq s) \\ &= {}_{s+t}q_x - {}_s q_x \\ &= \frac{{}_{s+t}q_x - {}_s q_x}{{}_s p_x} \end{aligned} \quad (3.26)$$

Jika mensubstitusikan persamaan (3.25) ke dalam persamaan (3.26) maka ${}_{s|t}q_x$ dapat dinyatakan kembali dengan,

$${}_{s|t}q_x = {}_s p_x \cdot {}_t q_{x+s} \quad (3.27)$$

3.2.2 Variabel Acak $K(x)$

Secara teori, definisi dari variabel acak $K(x)$ adalah $K(x) = [T(x)]$, dengan notasi $[T(x)]$ menyatakan bilangan bulat terbesar yang lebih kecil atau sama dengan dari $T(x)$. Adapun secara informal $K(x)$ menyatakan berapa kali lagi ulang tahun yang dapat dirayakan oleh (x) sebelum ia meninggal dunia. Diberikan ilustrasi sebagai berikut:

Apabila saat ini seseorang berusia 17 tahun dan ternyata meninggal pada usia 68,5 tahun, maka berdasarkan konsep variabel acak $T(x)$ diperoleh $T(17) = 51,5$ dan bila diungkapkan dalam bentuk variabel acak $K(x)$ maka diperoleh $K(17) = [T(17)] = [51,5] = 51$. Jadi, orang tersebut dapat merayakan ulang tahunnya sebanyak 51 kali sebelum ia meninggal dunia.

$K(x)$ adalah variabel acak diskrit dengan fungsi kepadatan peluang dinyatakan dengan

$$\begin{aligned}
 f(k) &= P(K=k) && k=0,1,2,\dots \\
 &= P([T(x)]=k) \\
 &= P(k \leq T(x) < k+1) \\
 &= P(T(x) \leq k+1) - P(T(x) \leq k) \\
 &= F(k+1) - F(k) \\
 &= {}_{k+1}q_x - {}_kq_x
 \end{aligned}$$

Berdasarkan persamaan (3.26) dan (3.27), maka persamaan terakhir di atas dapat dinyatakan kembali sebagai :

$$\begin{aligned} f(k) &= {}_k p_x \cdot q_{x+k} \\ &= {}_k | q_x \end{aligned}$$

Dimana ${}_k | q_x$ adalah peluang seseorang berusia x meninggal antara usia $x+k$ tahun dan $x+k+1$ tahun.

Adapun untuk nilai ekspektasi dari variabel acak $K(x)$ dinotasikan dengan e_x dan didefinisikan sebagai :

$$\begin{aligned} e_x &= E[K(x)] \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot P(K=k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k ({}_{k+1} q_x - {}_k q_x) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k ((1 - {}_{k+1} p_x) - (1 - {}_k p_x)) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k ({}_k p_x - {}_{k+1} p_x) \\ &= ({}_1 p_x - {}_2 p_x) + 2({}_2 p_x - {}_3 p_x) + 3({}_3 p_x - {}_4 p_x) + \dots \\ &= {}_1 p_x + {}_2 p_x + {}_3 p_x + \dots \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x \end{aligned} \tag{3.28}$$

3.2.3 Tabel Mortalitas

Pada dasarnya tabel mortalitas adalah tabel yang menyajikan $q_x = f(0) = P(K(x)=0)$ untuk beragam usia x dimulai dari 0 sampai batas usia tertinggi ω . Dengan demikian tabel mortalitas secara implisit mendeskripsikan secara lengkap distribusi dari $K(x)$. Jika persamaan (3.24) dimanfaatkan kembali dengan memisalkan $s = 1$ dan $t = k - 1$, maka ${}_k p_x$ dapat dinyatakan sebagai :

$${}_k p_x = p_x \cdot {}_{k-1} p_{x+1} \quad (3.29)$$

Berdasarkan persamaan (3.29) maka ${}_{k-1} p_{x+1}$ dapat dinyatakan kembali sebagai :

$${}_{k+1} p_{x+1} = p_{x+1} \cdot {}_{k-2} p_{x+2}$$

Apabila persamaan terakhir di atas disubstitusikan ke persamaan (3.29) dan ${}_{k-2} p_{x+2}$ diuraikan lagi dengan menggunakan persamaan (3.24), maka akan diperoleh bentuk sebagai berikut :

$$\begin{aligned} {}_k p_x &= p_x \cdot {}_{k-1} p_{x+1} \\ &= p_x (p_{x+1} \cdot {}_{k-2} p_{x+2}) \\ &= p_x \cdot p_{x+1} ({}_{k-3} p_{x+3}) \\ &\quad \vdots \\ &\quad \vdots \\ &= p_x \cdot p_{x+1} \cdot p_{x+2} \cdots p_{x+k-1} \end{aligned} \quad (3.30)$$

Semua nilai p_x untuk usia yang berbeda-beda tersedia dalam tabel mortalitas sehingga ${}_k p_x$ dan ${}_k q_x = 1 - {}_k p_x$ dapat dihitung dengan menggunakan persamaan (3.30).

Selain itu, pada tabel mortalitas juga terdapat variabel l_x yang menyatakan jumlah orang yang diharapkan masih hidup sampai usia x dari sekelompok orang yang jumlahnya l_0 ketika baru lahir. Dengan menggunakan pengertian fungsi *survival*, maka diperoleh beberapa hubungan berikut :

$$l_x = l_0 \cdot S(x) \quad (3.31)$$

$$= l_0 \cdot {}_x p_0 \quad (3.32)$$

$$= l_0 \cdot \exp\left(-\int_0^x \mu_s ds\right) \quad (3.33)$$

$${}_t p_x = \frac{l_{x+t}}{l_x} \quad (3.34)$$

$${}_t q_x = 1 - {}_t p_x = 1 - \frac{l_{x+t}}{l_x} = \frac{l_x - l_{x+t}}{l_x} = \frac{d_x}{l_x} \quad (3.35)$$

dimana d_x menyatakan banyaknya orang berusia x tahun yang mati sebelum mencapai usia $(x+1)$ tahun.

3.3 Asuransi Jiwa Berjangka

Pada asuransi jiwa terdapat berbagai jenis produk yang ditawarkan, yaitu diantaranya produk asuransi jiwa seumur hidup (*whole life insurance*), asuransi jiwa berjangka (*term life insurance*), asuransi jiwa dwiguna murni (*pure endowment insurance*), dan lain-lain. Namun pada penelitian ini, penulis akan membatasi produk yang digunakan hanya asuransi jiwa berjangka saja. Asuransi jiwa berjangka (*term life insurance*) adalah jenis asuransi yang menawarkan perlindungan dengan kontrak asuransi yang berlangsung hanya dalam jangka waktu tertentu dan hanya akan memberikan pertanggungan pada masa perlindungan saja.

Hal ini maksudnya adalah pihak asuransi akan memberikan sejumlah uang santunan kepada ahli waris jika terjadi risiko kematian dalam jangka waktu tersebut. Namun, apabila tidak terjadi risiko kematian dalam jangka waktu tersebut, maka nasabah tidak akan mendapatkan nilai tunai apapun. Asuransi jiwa berjangka hanya diambil untuk proteksi saja dan tidak ada unsur tabungan ataupun investasi didalamnya. Jika dilihat dari waktu pemberian santunan kepada pihak

nasabah, maka asuransi jiwa berjangka dibedakan menjadi dua jenis, yaitu asuransi jiwa berjangka diskrit dan asuransi jiwa berjangka kontinu yang akan dibahas pada subbab selanjutnya.

3.3.1 Asuransi Jiwa Berjangka Diskrit

Asuransi jiwa berjangka diskrit adalah jenis asuransi dimana pihak asuransi akan memberikan santunan kepada nasabah pada akhir periode (mingguan, bulanan, tahunan, dan sebagainya). Nilai tunai aktuaria dapat dinyatakan dengan variabel acak Z yang didefinisikan sebagai berikut :

$$Z = \begin{cases} B \cdot v^{K+1} & K = 0, 1, 2, \dots, n-1 \\ 0 & K \geq n \end{cases}$$

Dimana $B = \textit{Benefit}$ adalah besarnya jumlah santunan yang akan diberikan kepada pihak nasabah. Besarnya santunan sangat beragam, namun untuk memudahkan dalam perhitungan pada pembahasan berikutnya akan diasumsikan besar santunan adalah Rp 1,-

Nilai tunai aktuaria Z merupakan variabel acak dan distribusinya bergantung dari distribusi $T(x)$. Adapun ekspektasi dari Z menyatakan nilai premi tunggal netto (*net single premium*) yang didasarkan atas dasar mortalita dan bunga, tanpa memperhatikan biaya-biaya lainnya. Pada asuransi jiwa berjangka diskrit dinotasikan dengan $A_{x:\overline{n}|}$ dan didefinisikan dengan :

$$\begin{aligned} A_{x:\overline{n}|} &= E[Z] \\ &= B \sum_{k=0}^{n-1} v^{k+1} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k} \end{aligned} \quad (3.36)$$

$$\text{Atau } A_{x:\overline{n}|} = B \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta(k+1)} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}$$

3.3.2 Asuransi Jiwa Berjangka Kontinu

Asuransi jiwa berjangka kontinu merupakan jenis asuransi dimana santunan akan diberikan seketika oleh pihak asuransi manakala nasabah meninggal dunia dan nilai tunai aktuariannya dapat dinyatakan dengan variabel acak Z yang didefinisikan sebagai berikut :

$$Z = B \cdot v^{T(x)} \quad T(x) \leq n$$

$$= 0 \quad T(x) > n$$

Dimana $B = \textit{Benefit}$ adalah besarnya jumlah santunan yang akan diberikan kepada pihak nasabah dan diasumsikan besar santunan adalah Rp 1,-

Adapun ekspektasi dari Z menyatakan nilai premi tunggal netto (*net single premium*) yang didasarkan atas dasar mortalita dan bunga, tanpa memperhatikan biaya-biaya lainnya. Pada asuransi jiwa berjangka kontinu dinotasikan dengan $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ dan didefinisikan dengan :

$$\begin{aligned} \bar{A}_{x:\overline{n}|} &= E[Z] \\ &= B \int_0^{\infty} z \cdot f(t) dt \\ &= B \int_0^n v^t f(t) dt + \int_n^{\infty} 0 \cdot f(t) dt \\ &= B \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt \end{aligned} \quad (3.37)$$

3.4 Anuitas Kehidupan

Anuitas kehidupan merupakan serangkaian pembayaran yang dilakukan oleh nasabah selama waktu tertentu sepanjang nasabah tersebut masih hidup. Apabila nasabah tersebut saat ini berusia x tahun dan akan tetap hidup dalam n tahun mendatang, maka jumlah pembayaran anuitas kehidupan akan sangat bergantung pada sisa umur (x), yaitu $T(x)$. Jika nilai tunai aktuarial dari anuitas kehidupan dinotasikan dengan Y , maka variabel ini merupakan suatu fungsi dari variabel acak $T(x)$.

3.4.1 Anuitas Kehidupan Berjangka

Anuitas kehidupan berjangka merupakan serangkaian pembayaran yang dilakukan oleh nasabah disetiap awal tahun selama n tahun, jadi maksimum terdapat n kali pembayaran dengan syarat nasabah tersebut masih hidup dalam n tahun mendatang. Untuk pemahaman lebih lanjut, maka akan diberikan ilustrasi sebagai berikut.

Apabila seseorang melakukan pembayaran disetiap awal tahun selama n tahun dengan asumsi pembayaran sebesar Rp 1,- sehingga maksimum terdapat n kali pembayaran dimana orang tersebut harus tetap hidup dalam n tahun mendatang, maka anuitasnya adalah :

$$Y = 1 + v + v^2 + \dots + v^{k(x)} \quad \text{untuk } K(x) = 0, 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.38)$$

$$= \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$$

$$= 1 + v + v^2 + \dots + v^{n-1} \quad \text{untuk } K(x) = n, n+1, \dots \quad (3.39)$$

$$= \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

Nilai ekspektasi dari Y dinotasikan dengan $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ dan jika memanfaatkan persamaan (3.38) maka akan diperoleh hasil sebagai berikut :

$$\begin{aligned}
 \ddot{a}_{x:\overline{n}|} &= E[Y] \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (1+v+v^2+\dots+v^{k(x)}) P(K(x)=x) + \sum_{k=n}^{\infty} (1+v+v^2+\dots+v^{n-1}) P(K(x)=x) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (1+v+v^2+\dots+v^{k(x)}) ({}_kP_x - {}_{k+1}P_x) + (1+v+v^2+\dots+v^{n-1}) \sum_{k=n}^{\infty} P(K(x)=x) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} (1+v+v^2+\dots+v^{k(x)}) ({}_kP_x - {}_{k+1}P_x) + (1+v+v^2+\dots+v^{n-1}) \cdot {}_n P_x \\
 &= 1 \cdot ({}_0P_x - {}_1P_x) + (1+v)({}_1P_x - {}_2P_x) + (1+v+v^2)({}_2P_x - {}_3P_x) + \dots \\
 &\quad + (1+v+v^2+\dots+v^{n-1})({}_{n-1}P_x - {}_n P_x) + (1+v+v^2+\dots+v^{n-1})({}_n P_x) \\
 &= 1+v \cdot {}_1P_x + v^2 \cdot {}_2P_x + \dots + v^{n-1} \cdot {}_n P_x \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k P_x \tag{3.39}
 \end{aligned}$$

3.5 Premi Asuransi

Salah satu hal yang sangat mendasar dalam asuransi adalah penentuan besarnya nilai premi. Premi adalah biaya asuransi yang harus ditanggung oleh pihak nasabah kepada pihak perusahaan asuransi. Premi terdiri dari dua bagian yaitu premi bersih dan premi kotor. Namun pada penelitian ini, penulis akan membatasi premi yang digunakan hanya premi bersih. Premi bersih adalah premi yang dihitung tanpa memperhatikan faktor biaya, hanya memperhatikan peluang meninggal dan tingkat bunga.

Salah satu prinsip yang digunakan untuk menentukan nilai premi adalah prinsip ekivalensi yaitu nilai tunai premi yang dibayarkan oleh pihak nasabah harus sama dengan nilai tunai asuransi atau santunan yang akan dibayarkan oleh

pihak perusahaan asuransi. Berikut akan dibahas mengenai beberapa hal yang mendasari perhitungan nilai premi.

3.5.1 Fungsi Kerugian

Terdapat dua jenis kewajiban didalam asuransi yaitu :

1. Kewajiban pihak perusahaan asuransi adalah membayar santunan yang besarnya sesuai perjanjian yang telah ditetapkan diawal kontrak manakala sewaktu-waktu terjadi klaim.
2. Kewajiban pihak nasabah adalah membayar premi langsung sekaligus diawal kontrak atau secara berkala pada setiap periode yang telah ditentukan.

Kedua jenis kewajiban di atas membentuk suatu fungsi total kerugian untuk menghitung seberapa besar kerugian yang akan ditanggung oleh pihak perusahaan asuransi dan dihitung dengan

$$L = Z - P \cdot Y$$

Dimana L = nilai dari fungsi kerugian, Z = nilai tunai asuransi jiwa, P = premi, Y = nilai tunai anuitas kehidupan.

Apabila diberikan santunan sebesar Rp 1,- untuk asuransi jiwa berjangka yang dibayarkan pada akhir tahun kematian, maka fungsi kerugian yang diperoleh sebagai berikut :

$$L = v^{K(x)+1} - P \cdot \ddot{a}_{\overline{K(x)+1}|}$$

Resiko kerugian perusahaan terjadi ketika nilai kerugiannya memberikan nilai positif, dimana nilai santunan yang dibayarkan kepada pihak nasabah lebih besar dari premi yang diterima oleh pihak perusahaan asuransi. Secara teoritis

nilai kerugian yang positif terjadi ketika pihak nasabah meninggal dunia pada awal kontrak asuransi.

3.5.2 Prinsip Ekivalensi

Prinsip perhitungan ini adalah ekspektasi dari fungsi kerugian bernilai sama dengan nol untuk asumsi nilai santunan Rp 1,- dan secara matematis dapat didefinisikan sebagai :

$$\begin{aligned}
 E[L] &= 0 \\
 E[Z - P \cdot Y] &= 0 \\
 E[Z] - P \cdot E[Y] &= 0 \\
 P \cdot E[Y] &= E[Z] \\
 P &= \frac{E[Z]}{E[Y]}
 \end{aligned}
 \tag{3.40}$$

3.5.3 Penentuan Nilai Premi

Berikut ini akan dikemukakan beberapa persamaan untuk menentukan besarnya nilai premi, khusus untuk produk asuransi jiwa berjangka n tahun untuk usia tertanggung x tahun dimana santunan dibayarkan seketika pada saat nasabah meninggal dunia dan pembayaran premi dilakukan secara kontinu selama masih hidup.

3.5.3.1 Penentuan Nilai Premi Diskrit

Berdasarkan persamaan (3.40) maka diperoleh persamaan baru yang akan digunakan untuk menghitung nilai premi diskrit sebagai berikut :

$$P = \frac{E[Z]}{E[Y]}$$

$$P = \frac{A_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{B \sum_{k=0}^{n-1} v^{(k+1)} \cdot {}_k p_x \cdot q_{x+k}}{\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x} \quad (3.41)$$

Dengan $A_{x:\overline{n}|}$ adalah premi tunggal netto asuransi berjangka diskrit dan $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ merupakan anuitas kehidupan.

3.5.3.2 Penentuan Nilai Premi Kontinu

Berdasarkan persamaan (3.40) maka diperoleh persamaan baru yang akan digunakan untuk menghitung nilai premi kontinu sebagai berikut :

$$P = \frac{E[Z]}{E[Y]}$$

$$P = \frac{\bar{A}_{x:\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x:\overline{n}|}} = \frac{B \int_0^n e^{-\delta t} \cdot {}_t p_x \cdot \mu_{x+t} dt}{\sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x} \quad (3.42)$$

Dengan $\bar{A}_{x:\overline{n}|}$ adalah premi tunggal netto asuransi berjangka kontinu dan $\ddot{a}_{x:\overline{n}|}$ merupakan anuitas kehidupan.

3.6 Cadangan Asuransi

Pada awal kontrak dimulai, pihak perusahaan asuransi telah memperhitungkan apakah ekspektasi nilai tunai dari perolehan premi di masa yang akan datang sama dengan ekspektasi nilai tunai dari santunan yang akan dibayarkan. Jika sama maka kerugian yang diperoleh pihak perusahaan asuransi sama dengan nol, berarti dalam keadaan seimbang. Namun pada kenyataannya keseimbangan yang diharapkan tidak selalu terjadi pada setiap saat, oleh karena

itu pihak perusahaan asuransi harus mencadangkan sejumlah dana untuk menutupi kerugian yang terjadi.

Secara umum, cadangan adalah sejumlah uang yang harus disediakan oleh pihak perusahaan asuransi dalam waktu pertanggungan dan digunakan untuk membayar santunan sesuai dengan kesepakatan pada awal kontrak. Cara perhitungan nilai cadangan santunan terdiri atas dua jenis, dengan berdasarkan waktu yang telah lalu (retrospektif) dan waktu yang akan datang (prospektif).

Cadangan retrospektif adalah perhitungan nilai cadangan berdasarkan nilai premi yang telah dibungakan dikurangi oleh nilai santunan yang telah dibungakan di masa lalu. Sedangkan cadangan prospektif adalah perhitungan nilai cadangan berdasarkan nilai santunan yang akan datang dikurangi oleh nilai premi yang akan datang. Pada proses perhitungan nilai dana cadangan santunan pada asuransi jiwa berjangka selanjutnya, yang akan digunakan adalah cadangan prospektif.

3.6.1 Cadangan Prospektif

Cadangan prospektif diberi simbol ${}_jV_x$. Sebagai ilustrasi ${}_2V_x$ merupakan cadangan akhir tahun kedua untuk asuransi jiwa berjangka n , yaitu sejumlah dana yang harus disediakan oleh perusahaan pada akhir tahun kedua agar perusahaan tersebut dapat menunaikan kewajibannya di masa yang akan datang.

Secara umum, cadangan akhir tahun ke j untuk asuransi jiwa berjangka n tahun dengan asumsi besar santunannya sebesar Rp 1,- adalah

$$\begin{aligned} {}_jV_x &= E\left[v^{K(x+j)+1}\right] - P \cdot E\left[\ddot{a}_{\overline{K(x+j)+1}|}\right] \\ &= \bar{A}_{x+j:n-j} - P \cdot \ddot{a}_{x+j:n-j} \end{aligned} \quad (3.43)$$

Khusus pada asuransi berjangka, karena uang pertanggungan habis kontrak yang diperoleh adalah 0, maka besar dana cadangan santunan yang diperoleh pada akhir jangka pertanggungan seharusnya bernilai 0 pula. Namun, pada kenyataannya nilai cadangan di akhir tahun pertanggungan biasanya tidak bernilai nol, hal ini disebabkan karena dalam perhitungan terdapat peluang orang yang dapat bertahan hidup lebih dari jangka waktu tertanggung menghasilkan nilai cadangan di akhir jangka pertanggungan.

Dikarenakan nilai mata uang pada saat ini dan saat yang akan datang berbeda, maka hal ini sangat memungkinkan adanya selisih yang timbul antara nilai premi yang dibutuhkan oleh pihak perusahaan asuransi dengan nilai premi yang dibayarkan oleh pihak nasabah. Disinilah peran dana cadangan sangat membantu dalam upaya menutupi kekurangan akibat selisih yang terjadi.