BAB III

ALGORITMA PENCARIAN SOLUSI *TOWER OF HANOI*

Pada bab ini akan dibahas mengenai algoritma, asal mula dan pendefinisian aturan dari *puzzle tower of Hanoi*, algoritma yang digunakan untuk pencarian solusi tercepat *puzzle tower of Hanoi*, serta representasi graf dari *tower of Hanoi*.

3.1 Algoritma

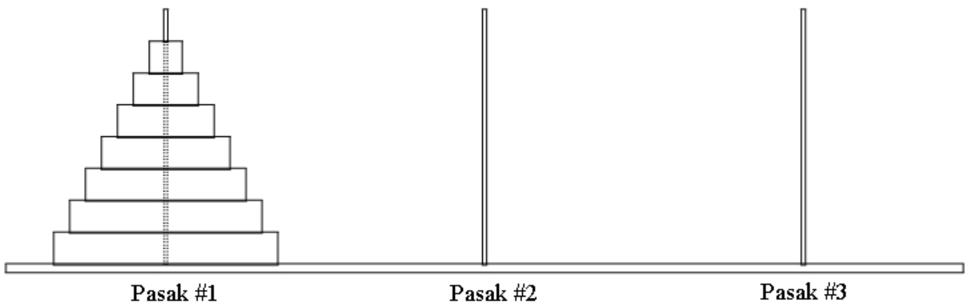
Dalam matematika dan komputasi, algoritma merupakan kumpulan perintah untuk menyelesaikan suatu masalah. Perintah-perintah ini dapat diterjemahkan secara bertahap dari awal hingga akhir. Masalah tersebut dapat berupa apa saja, dengan catatan untuk setiap masalah, ada kriteria kondisi awal yang harus dipenuhi sebelum menjalankan algoritma. Algoritma akan dapat selalu berakhir untuk semua kondisi awal yang memenuhi kriteria. Definisi algoritma secara umum adalah urutan logis langkah-langkah penyelesaian masalah (Rinaldi Munir, 2004: 4).

3.2 *Tower of Hanoi*

Tower of Hanoi (menara Hanoi) adalah sebuah permainan atau teka-teki matematika yang diperkenalkan oleh matematikawan Perancis yaitu Edouard Lucas pada tahun 1883. Teka teki tersebut terdiri dari tiga buah menara (pasak), dan sejumlah *disk* (piringan) dengan ukuran yang berbeda, dan piringan tersebut dapat dipindahkan pada tiap pasaknya. Teka-teki tersebut dimulai dengan tumpukan piringan yang tersusun rapi dari atas ke bawah mulai dari yang piringan paling kecil hingga piringan yang paling besar sehingga membentuk sebuah kerucut.

Tujuan dari permainan ini adalah untuk memindahkan seluruh tumpukan piringan dari pasak awal ke pasak yang lain dengan memenuhi aturan sebagai berikut:

- Hanya satu piringan yang dapat dipindahkan pada satu waktu,
- Hanya piringan yang paling atas yang dapat dipindahkan pada satu waktu, dan
- Piringan yang kecil harus terletak pada posisi paling atas atau dengan kata lain, piringan yang besar tidak dapat ditempatkan di atas piringan yang kecil.



Gambar 3.1

***Puzzle Tower of Hanoi* dengan 7 Piringan**

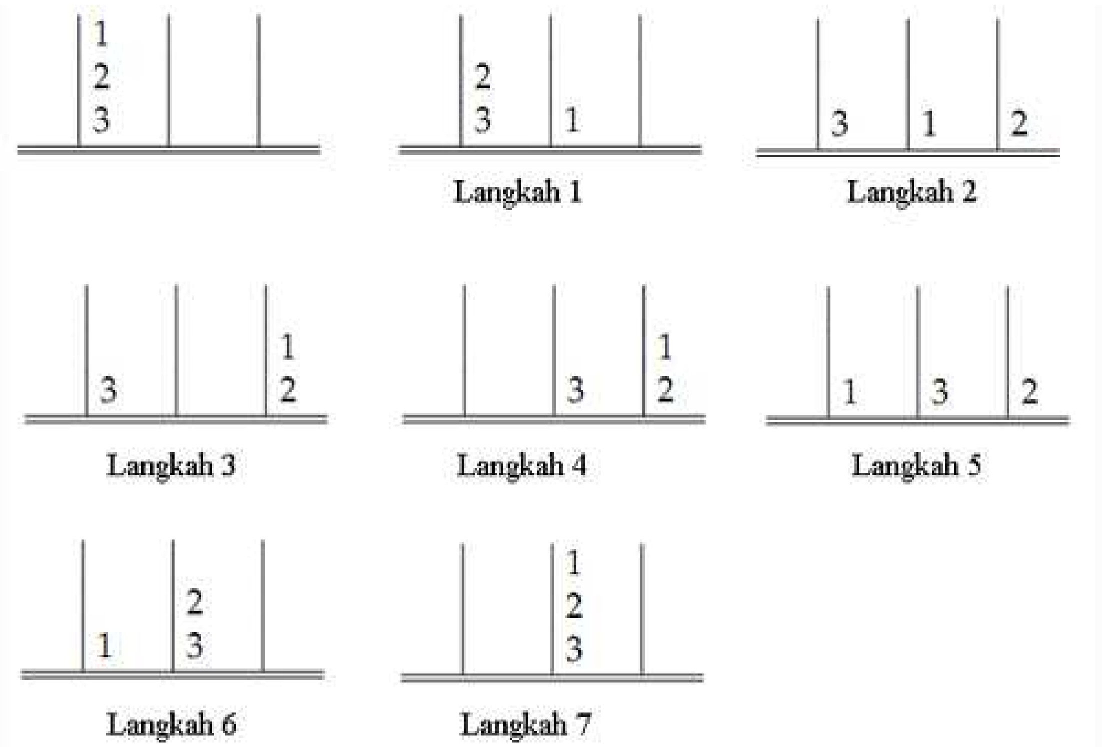
3.3 Algoritma *Tower of Hanoi*

Dalam matematika, mencari solusi dari sebuah permasalahan dapat dicari dengan menyelesaikan masalah yang lebih umum. Begitu juga dalam menyelesaikan masalah *puzzle tower of Hanoi*, akan dicari solusi dari sebuah permasalahan dengan menyelesaikan masalah dari yang lebih umum.

Sebelum menyelesaikan masalah yang umum, biasanya masalah diinisialisasi dahulu dengan menggunakan contoh yang sederhana, kemudian baru menginisialisasi masalahnya secara umum.

Untuk mencari solusi yang umum dari masalah ini tidaklah mudah, karena terdapat aturan yang membatasi masalah tersebut. Jika tidak terdapat aturan mungkin kita akan lebih mudah menyelesaikannya.

Salah satu pendekatan untuk masalah ini adalah dengan menggunakan varian atau jenis sederhana *tower of Hanoi* dengan menggunakan 3 piringan atau $n = 3$ yang telah dikemukakan oleh matematikawan Perancis Edouard Lucas. Hasilnya sangat mudah, yaitu terdapat 7 langkah tercepat untuk memindahkan piringan dari pasak semula ke pasak yang lain. Seperti yang ditunjukan pada gambar 3.2 dibawah ini.



Gambar 3.2

Langkah Tercepat *Tower Of Hanoi* dengan 3 piringan

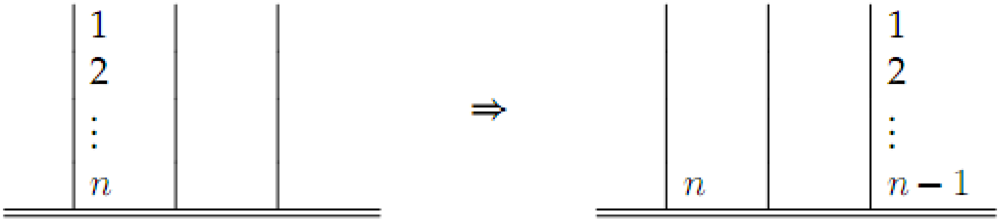
3.3.1 Menentukan Banyaknya Langkah Tercepat

Pencarian solusi *tower of Hanoi* dapat diselesaikan secara rekursif sebagai berikut:

Misalkan T_n adalah bilangan yang menyatakan langkah tercepat untuk memindahkan *n* piringan dari satu pasak ke pasak lainnya. Contohnya untuk $T_1 = 1$ dan $T_2 = 3$. Untuk 3 piringan, solusi yang telah ditunjukan oleh gambar 3.3 diatas adalah $T_3 \leq 7$. Ilustrasi algoritma rekursif masalah *tower of Hanoi* untuk *n* piringan dapat digambarkan sebagai berikut:

Langkah 1.

Pindahkan *n - 1* piringan dari pasak semula ke pasak lain (dalam hal ini misalkan pasak no 3). Hal ini dikatakan dengan T_{n-1} langkah.

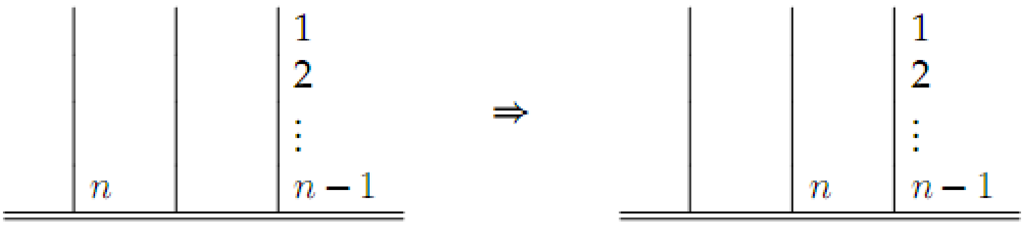


Gambar 3.3

Langkah Perpindahan *n – 1* Piringan

Langkah 2.

Pindahkan piringan terbesar (*n*) dari pasak semula ke pasak lain (dalam hal ini adalah pasak no 2)

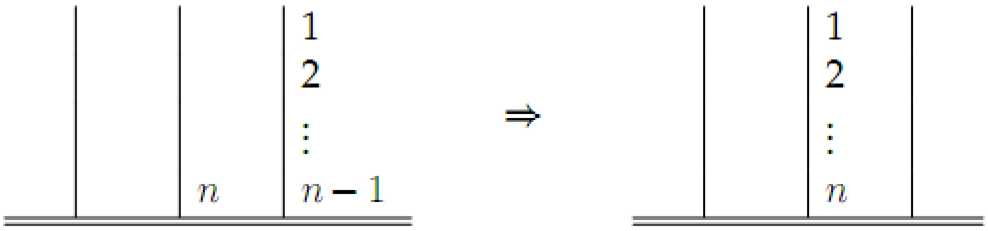


Gambar 3.4

Langkah Perpindahan *n* Piringan

Langkah 3.

Pindahkan *n - 1* piringan dari pasak no 3 ke pasak no 2. Artinya dibutuhkan T_{n-1} langkah lagi.



Gambar 3.5

Langkah Perpindahan *n – 1* Piringan di Atas *n*

Algoritma ini menunjukan bahwa T_n adalah jumlah langkah yang dibutuhkan untuk memindahkan *n* piringan dari pasak semula ke pasak yang lain adalah paling banyak $2T_{n-1} + 1$. Fakta ini dapat digunakan untuk menghitung batas atas dari bilangan dari langkah yang dibutuhkan untuk *n* piringan yang lain:

$$T_3 \leq 2.T_2 + 1$$

$$\leq 7$$

$$T_4 \leq 2.T_3 + 1$$

$$\leq 15$$

$$T_n \leq 2.T_{n-1} + 1 \qquad \ldots (1)$$

Terlihat bahwa untuk memindahkan *n* piringan, piringan terbawah hanya dapat pindah ke pasak yang kosong. Ini terjadi apabila langkah 1 telah dilakukan. Untuk menyelesaikannya, maka langkah 3 harus dilakukan. Dengan demikian

$$T_n \geq 2.T_{n-1} + 1 \qquad \ldots(2)$$

Dari (1) dan (2) diperoleh:

$$T_n = 2.T_{n-1} + 1$$

Untuk $n = 1, T_n = 1$, untuk $n = 2, T_n = 3$, untuk $n = 3, T_n = 7$, untuk n=4, $n = 1, T_n = 15$. Berdasarkan ini diprediksikan langkah tercepatnya $T_n = 2^n - 1$. Untuk membuktikannya, haruslah dibuktikan secara matematis.

Selanjutnya langkah tercepat ini akan dibuktikan menggunakan induksi matematika. Misalkan $P(n) = T_n = 2^n - 1$

Bukti:

1. Harus dibuktikan untuk *P(1)* benar.

   $P(1)$ benar karena $T_1 = 1 = 2^1 - 1$

2. Sekarang akan dibuktikan untuk $P(n) = T_n = 2^n - 1$ benar.

   Misalkan benar untuk $P(k) = T_k = 2^k - 1$. Maka harus dibuktikan benar untuk $P(k+1)$.

   $$\begin{aligned} T_{k+1} &= 2T_k + 1 \\ &= 2(2^k - 1) + 1 \\ &= 2^{k+1} - 1 \end{aligned}$$

   Jadi terbukti benar untuk $P(k+1)$.

   Jadi terbukti bahwa solusi tercepatnya adalah $T_n = 2^n - 1$ $\square$

3.3.2 Algoritma Rekursif *Tower of Hanoi* Dalam *Pseudo Code*

Didefinisikan pasak *a* adalah sumber, pasak *t* adalah tujuan, pasak s adalah sementara, dan *n* adalah jumlah piringan, di bawah ini merupakan prosedur singkat mengenai cara pemindahan sebuah piringan dari pasak *a* ke pasak *t* dengan pasak *s* sebagai pasak sementara.

Algoritma: memindahkan *n*-piringan *tower of Hanoi* dari pasak *a* ke pasak *t* melalui pasak *s*

1. Pindahkan *n - 1* piringan dari *a* ke *s*
2. Pindahkan *n* piringan dari *a* ke *t*
3. Pindahkan *n - 1* piringan dari *s* ke *t*

Algoritma di atas jika ditulis ke dalam *pseudo code* adalah sebagai berikut:

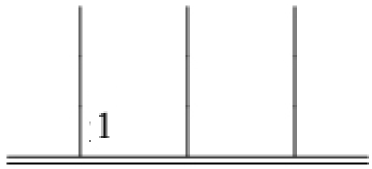
```
def moveTower(n, sumber, tujuan, sementara):
        if n == 1:
print "Pindahkan piringan dari", sumber, "ke", tujuan "."
else:
        moveTower(n-1, sumber, tujuan, sementara)
        moveTower(n, sumber, tujuan, sementara)
        moveTower(n-1, sumber, tujuan, sementara)
```

3.4 Representasi Graf *Puzzle Tower of Hanoi*

Untuk mencari solusi dan langkah tercepat dari *puzzle tower of Hanoi*, dapat juga dicari menggunakan representasi grafnya. *Tower of Hanoi* ini direpresentasikan sebagai graf tak berarah. Tiap titik pada grafnya merepresentasikan posisi piringan pada pasak, sedangkan sisi pada graf nya merepresentasikan perpindahan posisi piringan pada pasak. Agar lebih jelasnya akan digambarkan langkah-langkah penggambaran grafnya untuk $1 \leq n \leq 3$.

3.4.1 Representasi *Graf Puzzle Tower Of Hanoi* Untuk *n = 1*

Misalkan diinisialisasikan posisi awal *tower of Hanoi* dengan *n = 1* seperti gambar dibawah ini:

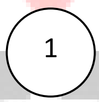


Gambar 3.6

Posisi Awal *Tower of Hanoi* dengan *n = 1*

Dan disepakati bahwa pasak nomor 1, pasak nomor 2, dan pasak nomor 3, secara berurutan berawal dari kiri ke kanan.

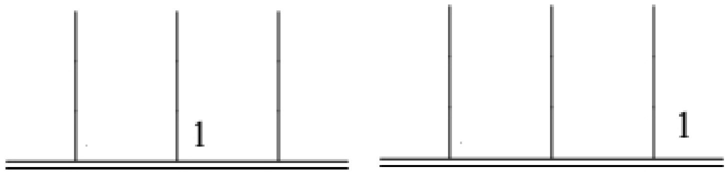
Pada posisi ini, direpresentasikan sebuah titik dengan nama titik 1. Yang artinya piringan nomor 1 terletak pada pasak nomor 1. Direpresentasikan dengan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.7

Representasi Graf Pada Posisi Awal

Karena piringan hanya 1, dan terdapat 2 pasak yang kosong, jadi hanya memindahkannya dengan satu kali perpindahan yaitu pindahkan ke pasak nomor 2 atau pindahkan ke pasak nomor 3 seperti yang digambarkan pada gambar 3.8 (i) dan (ii) di bawah ini:

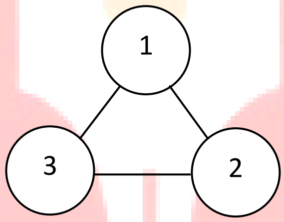


(i) (ii)

Gambar 3.8

Perpindahan Piringan Pada Pasak nomor 2 dan nomor 3

Maka representasinya grafnya digambarkan seperti berikut:



Gambar 3.9

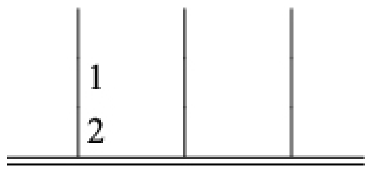
Representasi Graf *Tower of Hanoi* untuk *n = 1*

Representasi graf pada gambar 3.9 menyatakan bahwa:

1. Jika posisi awal piringan nomor satu terletak di pasak nomor 1 maka hanya dapat berpindah satu langkah agar dapat berpindah ke pasak nomor 2 atau pasak nomor 3,
2. Jika posisi awal piringan nomor satu terletak di pasak nomor 2 maka hanya dapat berpindah satu langkah agar dapat berpindah ke pasak nomor 2 atau pasak nomor 3,
3. Jika posisi awal piringan nomor satu terletak di pasak nomor 3 maka hanya dapat berpindah satu langkah agar dapat berpindah ke pasak nomor 1 atau pasak nomor 2,

3.4.2 Representasi *Graf Puzzle Tower Of Hanoi* Untuk *n = 2*

Misalkan diinisialisasikan posisi awal *tower of Hanoi* dengan $n = 2$ seperti pada gambar di bawah ini:

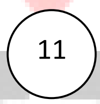


Gambar 3.10

Posisi Awal *Tower of Hanoi* dengan *n = 2*

Dan disepakati bahwa pasak nomor 1, pasak nomor 2, dan pasak nomor 3, secara berurutan berawal dari kiri ke kanan.

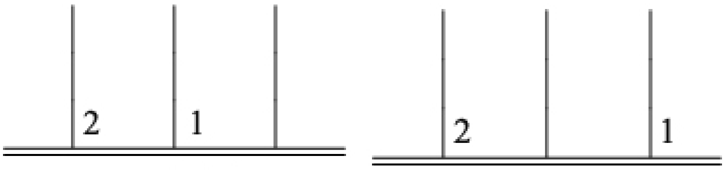
Pada posisi ini, direpresentasikan sebuah titik dengan nama titik 11. Yang artinya piringan nomor 1, dan piringan nomor 2 terletak pada pasak nomor 1. Direpresentasikan dengan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.11

Representasi Graf Posisi Awal *Tower of Hanoi* Untuk *n = 2*

Berdasarkan algoritma rekursif, untuk memindahkan piringan-piringan yang semula terletak pada pasak awal (dalam hal ini adalah pasak nomor 1), harus memindahkan piringan $n - 1$ (dalam hal ini adalah piringan nomor 1) ke pasak sementara (dalam hal ini jika pasak tujuannya adalah pasak nomor 3 maka pasak sementaranya adalah pasak nomor 2 begitu juga sebaliknya). Ini berarti terdapat 2 kemungkinan perpindahan piringan yaitu perpindahan dari pasak nomor 1 ke pasak nomor 2, atau ke pasak nomor 3 seperti yang ditampilkan pada gambar 3.12 (i) dan gambar (ii)

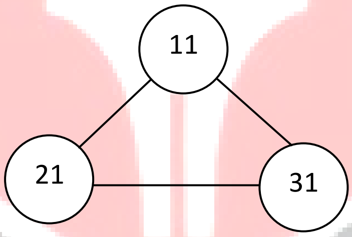


(i) (ii)

Gambar 3.12

Kemungkinan Langkah Pertama *Tower of Hanoi* untuk n=2

Maka representasi grafnya menjadi seperti sebagai berikut:

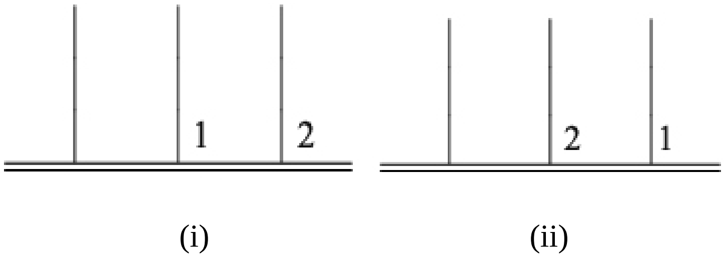


Gambar 3.13

Representasi Graf dari Kemungkinan Langkah Pertama *Tower of Hanoi* dengan n=2

Dalam gambar 3.13 di atas terdapat sisi yang merepresentasikan perpindahan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2 dan pasak nomor 3.

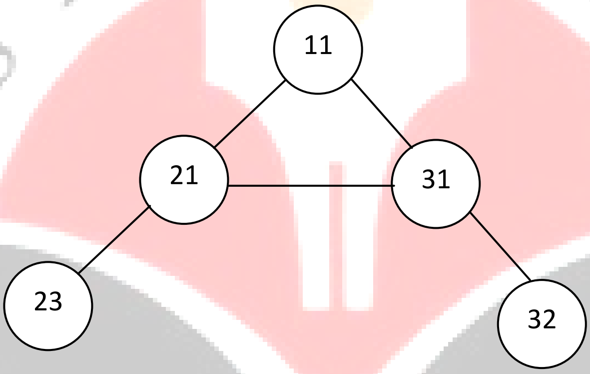
Piringan nomor 2 sudah dapat dipindahkan ke pasak tujuan (dalam hal ini adalah pasak nomor 2 dan pasak nomor 3) oleh karena piringan $n - 1$ telah terpindahkan ke pasak sementara. Seperti yang digambarkan pada gambar 3.14 di bawah ini.



Gambar 3.14

Kemungkinan Langkah Ke-2 *Tower of Hanoi* dengan n=2

Maka representasi grafnya adalah sebagai berikut:



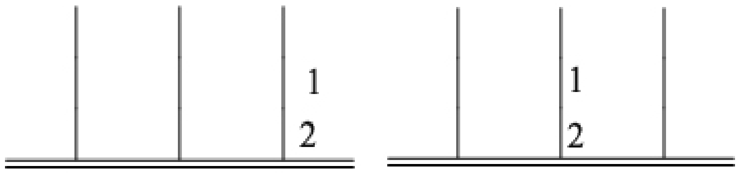
Gambar 3.15

Representasi Graf dari Kemungkinan Langkah Ke-2 *Tower of Hanoi* dengan

***n* = 2**

Dalam gambar 3.15 di atas terdapat sisi yang merepresentasikan perpindahan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3 dan pasak nomor 2.

Langkah selanjutnya adalah memindahkan piringan *n-1* ke pasak tujuan. Seperti yang digambarkan pada gambar 3.16 (i) dan (ii) di bawah ini.

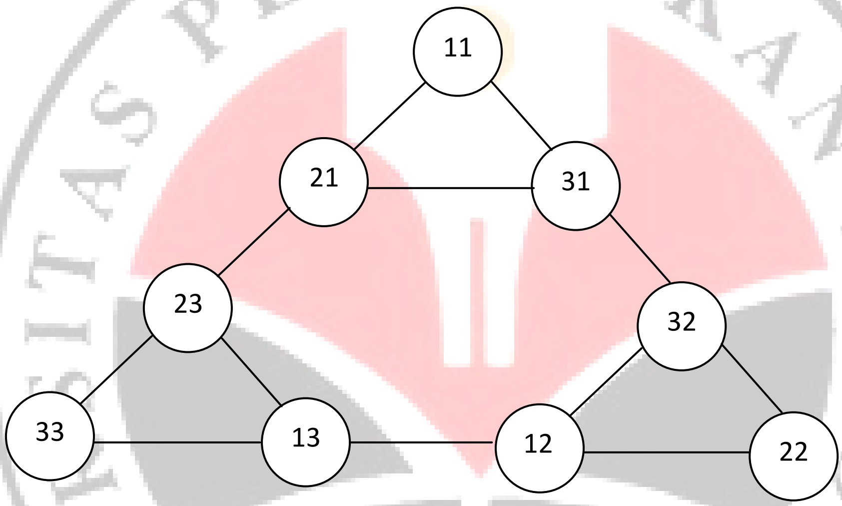


(i) (ii)

Gambar 3.16

Kemungkinan Langkah Ke-3 *Tower of Hanoi* dengan *n = 2*

Maka representasi grafnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.17

Representasi Graf *Tower of Hanoi* dengan *n = 2*

Dari gambar 3.17 terlihat pada titik 23 serta titik 32 memiliki cabang masing-masing sebanyak dua berturut-turut adalah 33, dan 13, serta 12 dan 22. Jika ditarik sebuah garis yang menghubungkan titik 33 dengan titik 13, titik 13 dihubungkan dengan 12, dan titik 12 dihubungkan dengan 22, ini merupakan langkah tercepat untuk memindahkan piringan yang berposisi awal pada pasak 3 ke pasak 2, begitu juga sebaliknya.

Jadi representasi graf pada gambar 3.17 menyatakan bahwa:

1. Jika posisi awal piringan nomor 1 dan nomor 2 terletak pada pasak nomor 1, maka agar posisi piringan 1 dan 2 berpindah ke pasak nomor 3, maka terdapat tiga langkah tercepat yaitu :

   a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

   b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3, dan

   c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3.

2. Jika posisi awal piringan nomor 1 dan nomor 2 terletak pada pasak nomor 2, maka agar posisi piringan 1 dan 2 berpindah ke pasak nomor 3, maka terdapat tiga langkah tercepat yaitu :

   a. Pindahkan pasak piringan 1 ke pasak nomor 2,

   b. Pindahkan pasak piringan 2 ke pasak nomor 3, dan

   c. Pindahkan pasak piringan 1 ke pasak nomor 3.

3. Jika posisi awal piringan nomor 1 dan nomor 2 terletak pada pasak nomor 3, maka agar posisi piringan 1 dan 2 berpindah ke pasak nomor 1, maka terdapat tiga langkah tercepat yaitu :

   a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

   b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3, dan

   c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 1.

4. Jika posisi awal piringan nomor 1 dan nomor 2 terletak pada pasak nomor 1, maka agar posisi piringan 1 dan 2 berpindah ke pasak nomor 2, maka terdapat tiga langkah tercepat yaitu :

   a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3, dan

c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2.

5. Jika posisi awal piringan nomor 1 dan nomor 2 terletak pada pasak nomor 2, maka agar posisi piringan 1 dan 2 berpindah ke pasak nomor 1, maka terdapat tiga langkah tercepat yaitu :

a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3, dan

c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 1.

6. Jika posisi awal piringan nomor 1 dan nomor 2 terletak pada pasak nomor 3, maka agar posisi piringan 1 dan 2 berpindah ke pasak nomor 2, maka terdapat tiga langkah tercepat yaitu :

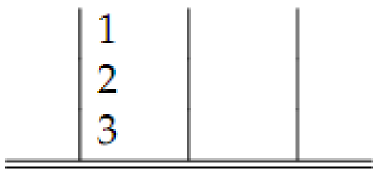
a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3, dan

c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2.

3.4.3 Representasi Graf *Puzzle Tower Of Hanoi* Untuk *n = 3*

Misalkan diinisialisasikan posisi awal *tower of Hanoi* dengan $n = 3$ seperti pada gambar di bawah ini:

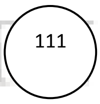


Gambar 3.18

Posisi Awal *Tower of Hanoi* dengan *n = 3*

Dan disepakati bahwa pasak nomor 1, pasak nomor 2, dan pasak nomor 3, secara berurutan berawal dari kiri ke kanan.

Pada posisi ini, direpresentasikan sebuah titik dengan nama titik 111. Yang artinya piringan nomor 1, piringan nomor 2, dan piringan nomor 3 terletak pada pasak nomor 1. Direpresentasikan dengan gambar sebagai berikut:



Gambar 3.19

Representasi Graf dari Posisi Awal *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

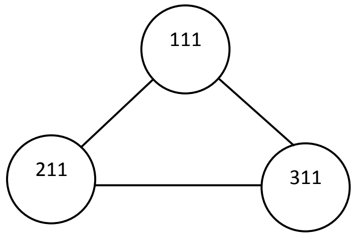
Berdasarkan algoritma rekursif, untuk memindahkan piringan-piringan yang semula terletak pada pasak awal (dalam hal ini adalah pasak nomor 1), harus memindahkan piringan-piringan *n - 1* (dalam hal ini adalah piringan nomor 1 dan piringan nomor 2) ke pasak sementara (dalam hal ini jika pasak tujuannya adalah pasak nomor 3 maka pasak sementaranya adalah pasak nomor 2 begitu juga sebaliknya). Ini berarti terdapat 2 kemungkinan perpindahan piringan yaitu perpindahan dari pasak nomor 1 ke pasak nomor 2, atau ke pasak nomor 3 seperti yang ditampilkan pada gambar 3.20 (i) dan gambar (ii) berikut ini:

(i) (ii)

Gambar 3.20

Kemungkinan Langkah Pertama dari *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Maka representasi grafnya menjadi seperti sebagai berikut:

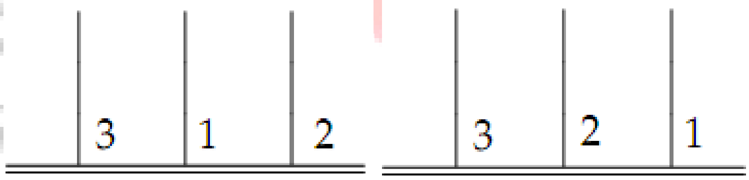


Gambar 3.21

Representasi Graf dari Kemungkinan Langkah Pertama *Tower of Hanoi* untuk *n* = *3*

Dalam gambar 3.21 di atas terdapat sisi yang merepresentasikan perpindahan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2 dan pasak nomor 3.

Berdasarkan algoritma rekursif, piringan terbawah *n* belum dapat dipindahkan (dalam hal ini adalah piringan nomor 3), maka langkah selanjutnya yaitu masih memindahkan piringan *n* – *1* tadi ke pasak sementara. Seperti yang yang digambarkan pada gambar berikut:

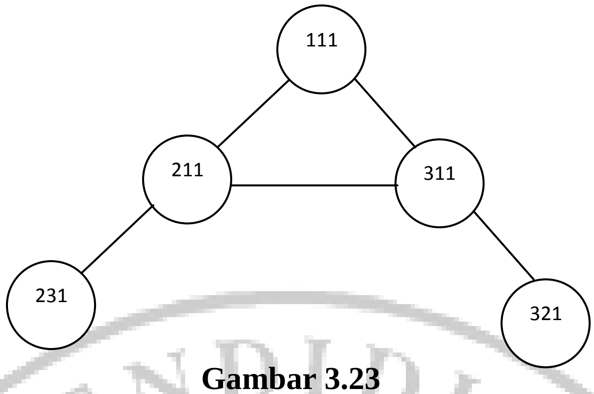


(i) (ii)

Gambar 3.22

Kemungkinan Langkah Ke-2 dari *Tower of Hanoi* untuk *n* = *3*

Maka representasi grafnya adalah sebagai berikut:



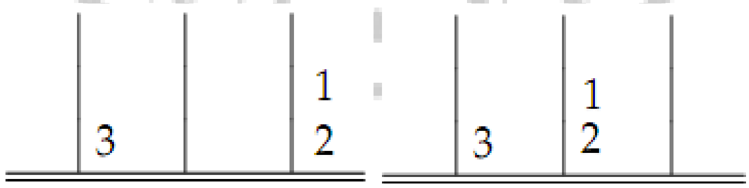
Gambar 3.23

Representasi Graf dari Kemungkinan Langkah Ke-2 *Tower of Hanoi* untuk

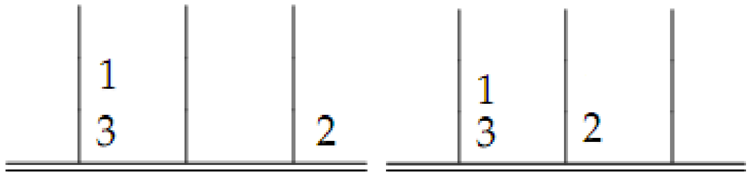
n = 3

Dalam gambar 3.23 di atas, terdapat sisi yang menghubungkan titik 211 dengan titik 231, kemudian titik 311 dengan 321, yang merepresentasikan perpindahan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3 dan pasak nomor 2.

Berdasarkan algoritma rekursif, piringan terbawah *n* belum dapat dipindahkan (dalam hal ini adalah piringan nomor 3), karena belum terdapat pasak yang kosong untuk memindahkan pasak *n*. Maka langkah selanjutnya yaitu masih memindahkan piringan yang lain agar pasak nomor 3 dapat berpindah. Seperti yang ditampilkan pada gambar berikut:



(i) (ii)

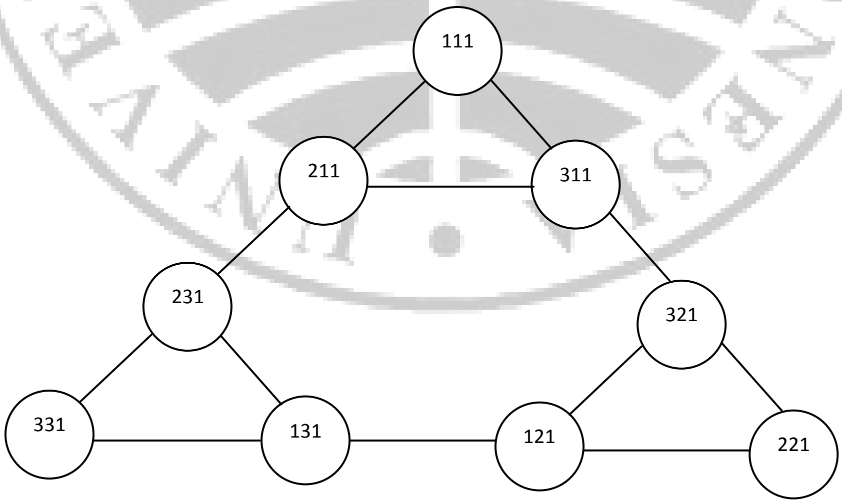


(iii) (iv)

Gambar 3.24

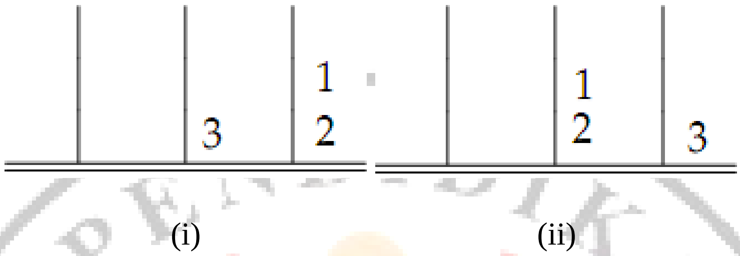
Kemungkinan Langkah Ke-3 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Dari gambar 3.24, terdapat dua kemungkinan, kemungkinan pertama adalah memindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3 (seperti yang terlihat pada gambar 3.24 (i) dan gambar 3.24 (ii)), dan kemungkinan kedua adalah memindahkan kembali piringan nomor 1 pada pasak nomor 1 (seperti yang terlihat pada gambar 3.24 (iii) dan gambar 3.24 (iv)). Hal ini menyebabkan langkah tercepat tidak dapat dilakukan karena pasak nomor 3 tidak dapat dipindahkan. Maka representasi grafnya menjadi seperti yang digambarkan sebagai berikut:



Gambar 3.25
Representasi graf dari Kemungkinan Langkah Ke3 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

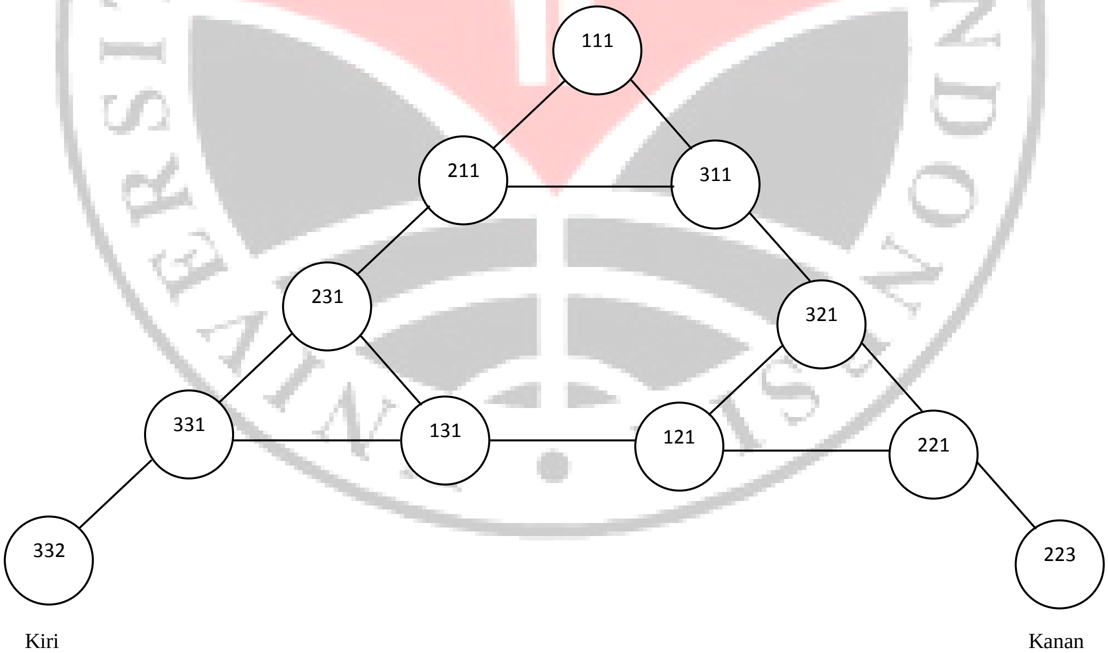
Berdasarkan algoritma rekursif, piringan terbawah *n* sudah dapat dipindahkan (yang direpresentasikan dengan titik 331 dan titik 221), maka langkah selanjutnya adalah memindahkan piringan nomor 3 ke pasak nomor 2, dan ke pasak 3. Seperti yang ditunjukan pada gambar dibawah ini:



Gambar 3.26

Kemungkinan Langkah Ke-4 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Maka representasi grafnya adalah sebagai berikut:

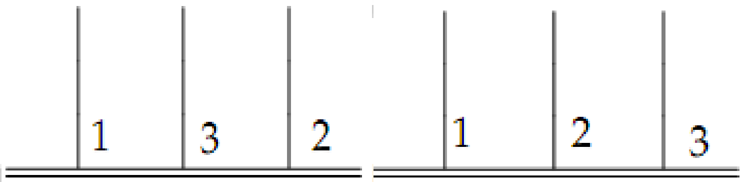


Gambar 3.27

Representasi Graf dari Kemungkinan Langkah Ke-4 *Tower of Hanoi* untuk

n = 3

Berdasarkan algoritma rekursif, setelah piringan *n* dapat dipindahkan langkah selanjutnya adalah memindahkan piringan *n – 1* ke pasak tujuan. Dari gambar 3.24 (i) dan gambar 3.24 (ii), terdapat dua kemungkinan. Kemungkinan pertama yaitu memindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 1. Seperti yang ditunjukan pada gambar 3.28 di bawah ini:

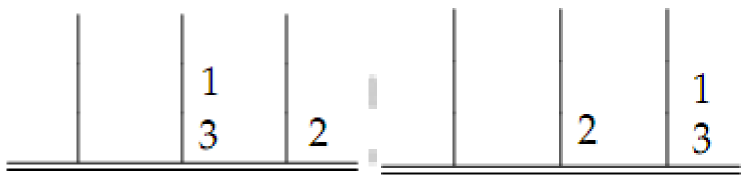


(i) (ii)

Gambar 3.28

Kemungkinan Langkah Ke-5 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Kemungkinan kedua yaitu memindahakan piringan nomor 1 ke atasa piringan nomor 3 (seperti yang digambarkan pada gambar 3.29 di bawah ini). Jika kemungkinan kedua ini dilakukan maka langkah tercepat tidak akan dapat dicari, karena jika ini dilakukan maka akan mengahalangi pergerakan piringan 3 untuk mencapai langkah tercepat.

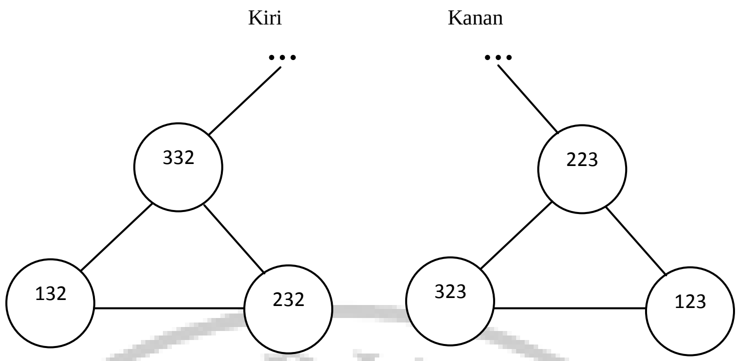


(i) (ii)

Gambar 3.29

Kemungkinan Langkah Ke-5 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

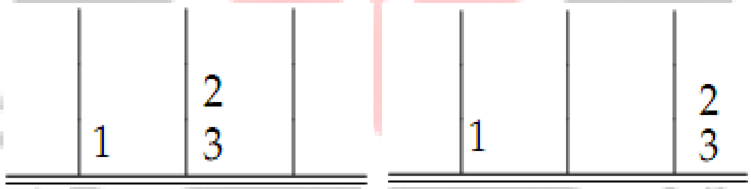
Maka representasi grafnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.30

Representasi Graf dari Kemungkinan Langkah Ke-5 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Berdasarkanari representasi graf pada gambar 3.30 di atas, untuk mencapai langkah tercepat dari solusi adalah dengan memindahkan piringan nomor 2 ke atas piringan nomor 3 Seperti yang digambarkan pada gambar 3.31 di bawah ini:

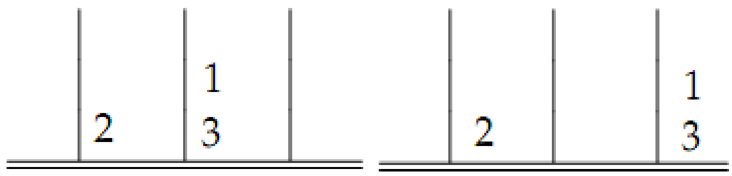


(i) (ii)

Gambar 3.31

Kemungkinan Langkah Ke-6 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Berdasarkanari representasi graf pada gambar 3.30 diatas, terdapat suatu solusi yang bukan merupakan langkah tercepat yaitu titik 232, dan titik 323. Titik ini merupakan representasi dari gambar 3.31. Untuk mencapai solusi yang lain, perpindahan piringan pada langkah ini pun harus direpresentasikan agar nanti terlihat hubungannya dengan perpindahan yang lain. Langkah perpindahannya adalah pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 1. Seperti yang digambarkan seperti gambar 3.34 di bawah ini:

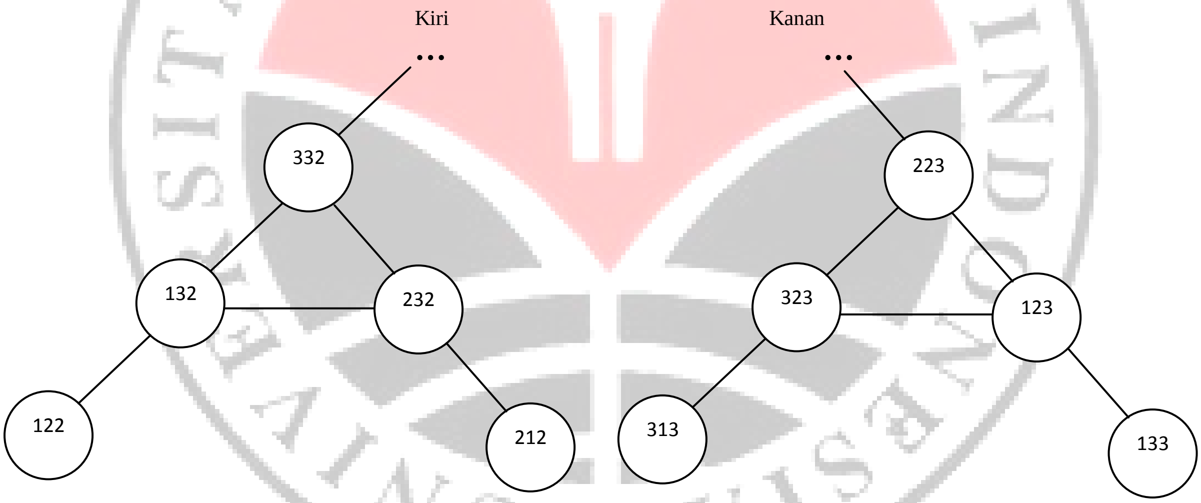


(i) (ii)

Gambar 3.32

Kemungkinan Langkah Ke-6 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

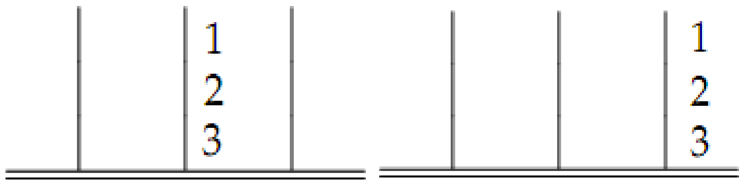
Dari gambar 3.31 dan gambar 3.32 maka representasi grafnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.33

Representasi Graf dari Kemungkinan Langkah Ke-6 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

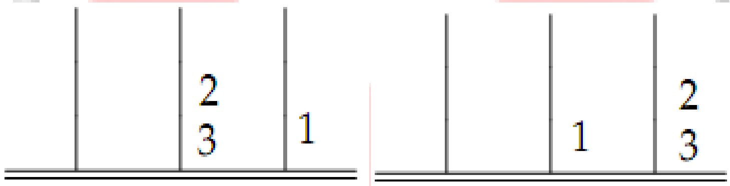
Berdasarkan gambar 3.31, untuk menyelesaikan permainan, langkah selanjutnya adalah memindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3 dan 2. Seperti yang digambarkan pada gambar 3.34 di bawah ini. Sedangkan solusi lain adalah memindahkan pasak nomor 1 kepasak nomor 3 dan 2. Seperti yang digambarkan pada gambar 3.35 dibawah ini.



(i) (ii)

Gambar 3.34

Kemungkinan Langkah Ke-7 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

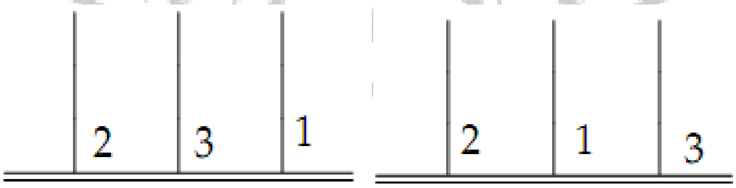


(i) (ii)

Gambar 3.35

Kemungkinan Langkah Ke-7 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Dari gambar 3.34, langkah yang lain adalah pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3 dan nomor 2. Seperti yang digambarkan pada gambar 3.36 dibawah ini.

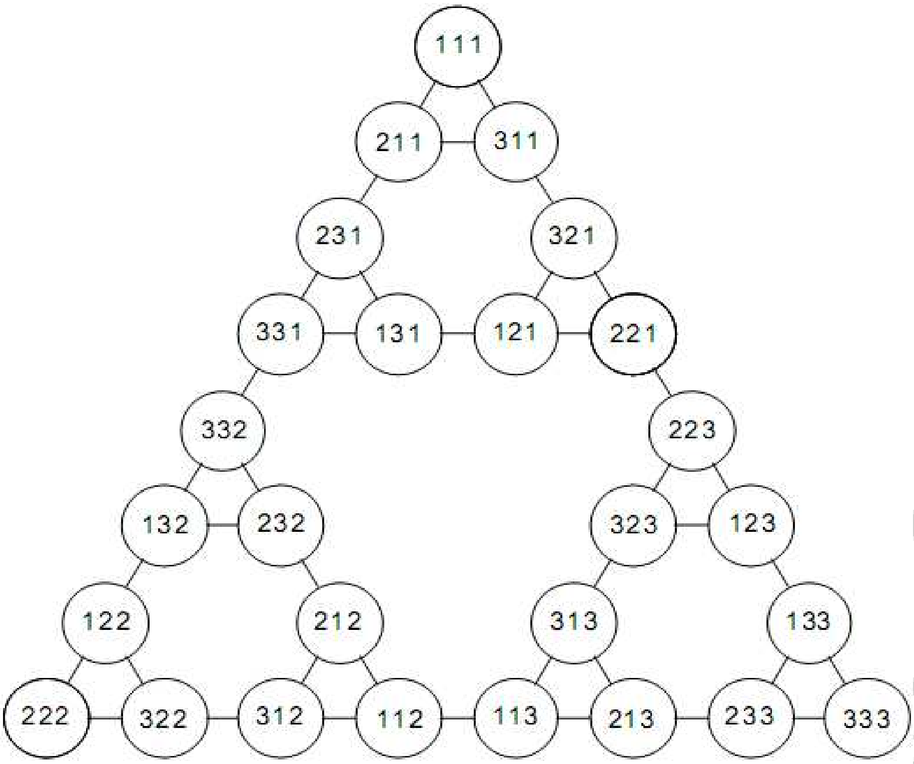


(i) (ii)

Gambar 3.36

Kemungkinan Langkah Ke-7 *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Maka representasi grafnya adalah sebagai berikut:



Gambar 3.37

Representasi Graf *Tower of Hanoi* untuk *n = 3*

Perhatikan titik 332, 312, 112, 113, 213, 233. Jika seluruh titik tersebut dihubungkan, ini merupakan langkah tercepat untuk memindahkan piringan yang berposisi awal pada pasak 3 ke pasak 2, begitu juga sebaliknya.

Jadi representasi graf pada gambar 3.9 menyatakan bahwa:

1. Jika posisi awal piringan nomor 1, 2, dan 3 terletak pada pasak nomor 1, maka agar posisi piringan nomor 1, 2, dan 3 berpindah ke pasak nomor 2, maka terdapat tujuh langkah tercepat. Dengan langkah sebagai berikut:

   a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

   b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3,

   c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3,

d. Pindahkan piringan nomor 3 ke pasak nomor 2,

e. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3,

f. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 2, dan

g. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2

2. Jika posisi awal piringan nomor 1, 2, dan 3 terletak pada pasak nomor 2, maka agar posisi piringan nomor 1, 2, dan 3 berpindah ke pasak nomor 1, maka terdapat tujuh langkah tercepat. Dengan langkah sebagai berikut:

a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 1,

b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3,

c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3,

d. Pindahkan piringan nomor 3 ke pasak nomor 1,

e. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

f. pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 1, dan

g. Pindahkan piringan nomor 1 kepasak nomor 1

3. Jika posisi awal piringan nomor 1, 2, dan 3 terletak pada pasak nomor 1, maka agar posisi piringan nomor 1, 2, dan 3 berpindah ke pasak nomor 3, maka terdapat tujuh langkah tercepat. Dengan langkah sebagai berikut:

a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3,

b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 2,

c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

d. Pindahkan piringan nomor 3 ke pasak nomor 3,

e. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

f. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3, dan

g. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3.

4. Jika posisi awal piringan nomor 1, 2, dan 3 terletak pada pasak nomor 3, maka agar posisi piringan nomor 1, 2, dan 3 berpindah ke pasak nomor 1, maka terdapat tujuh langkah tercepat. Dengan langkah sebagai berikut:

a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 1,

b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 2,

c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

d. Pindahkan piringan nomor 3 ke pasak nomor 1,

e. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3,

f. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 1, dan

g. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 1.

5. Jika posisi awal piringan nomor 1, 2, dan 3 terletak pada pasak nomor 2, maka agar posisi piringan nomor 1, 2, dan 3 berpindah ke pasak nomor 3, maka terdapat tujuh langkah tercepat. Dengan langkah sebagai berikut:

a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 1,

c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 1,

d. Pindahkan piringan nomor 3 ke pasak nomor 2,

e. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3,

f. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 2, dan

g. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2.

6. Jika posisi awal piringan nomor 1, 2, dan 3 terletak pada pasak nomor 3, maka agar posisi piringan nomor 1, 2, dan 3 berpindah ke pasak nomor 2, maka terdapat tujuh langkah tercepat. Dengan langkah sebagai berikut:

a. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3,

b. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 1,

c. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 1,

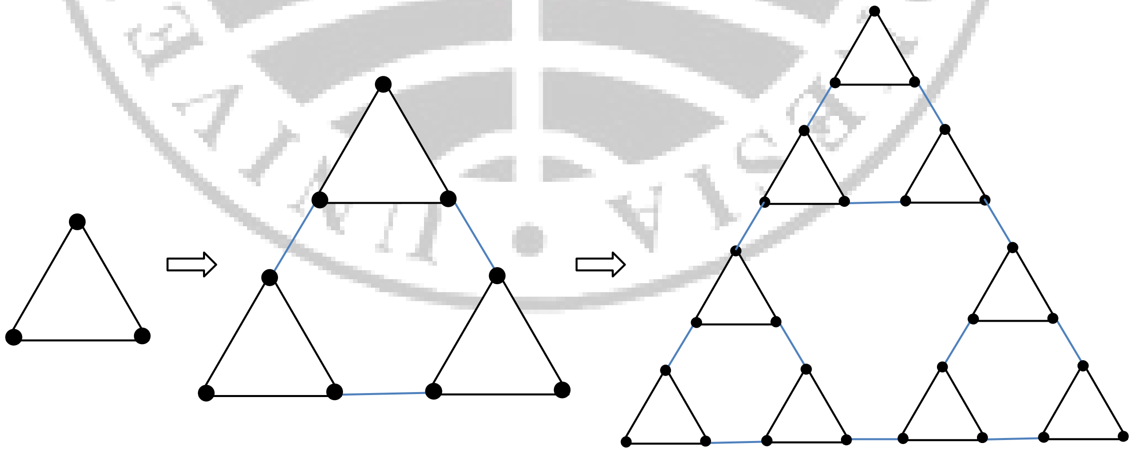
d. Pindahkan piringan nomor 3 ke pasak nomor 3,

e. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 2,

f. Pindahkan piringan nomor 2 ke pasak nomor 3, dan

g. Pindahkan piringan nomor 1 ke pasak nomor 3.

Jika diperhatikan, representasi graf dari *puzzle tower of Hanoi* untuk $1 \leq n \leq 3$, membentuk sebuah pola repetitif yang unik seperti yang digambarkan pada gambar 3.38 di bawah ini.



Gambar 3.38

Pola Repetitif Graf *Tower of Hanoi* untuk $1 \leq n \leq 3$

Dari gambar 3.40 didapat:

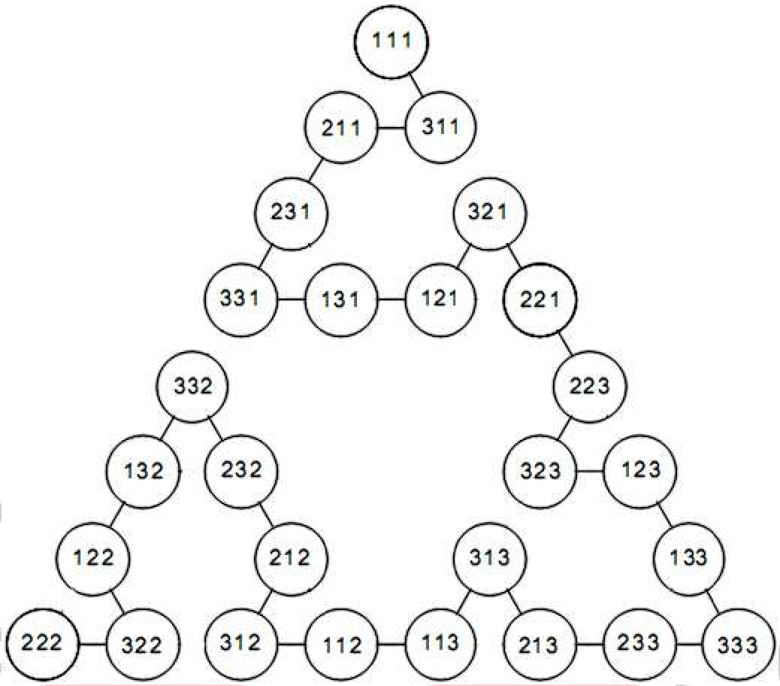
- untuk n = 1, jumlah titik pada grafnya = 3
- untuk n = 2, jumlah titik pada grafnya = 9 = 3^2
- untuk n = 3, jumlah titik pada grafnya = 27 = 3^3
  …
  …
  untuk *n*, jumlah titik pada grafnya = 3^n

Jadi secara umum, banyaknya titik pada representasi graf *tower of Hanoi* dengan *n* piringan = 3^n.

Untuk menentukan solusi tercepat, Perhatikan kembali gambar 3.37. dari representasi graf yang telah dijelaskan di atas, banyaknya sisi terluar segitiga terbesar menyatakan langkah tercepat yang dibutuhkan untuk memindahkan suatu tumpukan piringan dari pasak yang satu ke pasak yang lain. Hal ini isomorfik dengan suatu jalur Hamilton. Jadi pencarian solusi terpendek merupakan suatu hal yang isomorfik dengan pencarian jalur Hamilton dari representasi graf pada *tower of Hanoi*.

Secara umum banyaknya titik segitiga terluar adalah 2^n, ini artinya banyaknya sisi pada segitiga terluar adalah $2^n - 1$. Hal ini menegaskan bahwa pencarian solusi tercepat isomorfik dengan pencarian sisi terluar segitiga graf *tower of Hanoi* yaitu $2^n - 1$.

Perhatikan kembali gambar 3.37. dengan menghapus sisi yang tidak terpakai seperti gambar 3.39 di bawah ini.



Gambar 3.39

Representasi Graf untuk Solusi Terpanjang Tower of Hanoi dengan *n = 3*

Representasi gambar di atas merupakan solusi terpanjang untuk memindahkan tumpukan piringan dari piringan nomor 1 dari pasak nomor 1 ke pasak nomor 2 melalui pasak nomor 3. Jadi, dalam pencarian solusi terpanjang dan pencarian solusi tercepat adalah isomorfik dengan jalur Hamilton.