BAB III

ANALISIS FAKTOR

3.1 ANALISIS FAKTOR EKSPLORATORI (EFA)

Analisis faktor eksploratori merupakan salah satu teknik statistika multivariat yang digunakan untuk mereduksi variabel-variabel indikator penelitian kedalam sejumlah kecil faktor yang disebut faktor umum. Menurut Johnson (1992), hubungan antar variabel ini dapat dianggap sebagai hubungan linier dari parameter yang terdapat dalam analisis faktor. Tujuan utama dari analisis faktor eksploratori adalah menggambarkan variansi-kovariansi antar variabel yang sebenarnya dapat dibagi kedalam beberapa sifat dasar namun tidak terobservasi kuantitasnya. Sifat yang mendasar tersebut yang disebut faktor umum (Johnson, 1992).

Melalui prosedur analisis faktor eksploratori, akan dihasilkan suatu struktur model faktor yang dapat menjelaskan korelasi antar variabel indikator (Sharma, 1996). Kemudian struktur model faktor tersebut akan diajukan sebagai dasar teori dari analisis prosedur analisis faktor konfirmatori.

3.1.1 Model Faktor

Analisis faktor menyatakan setiap variabel random $X_1, X_2, ..., X_p$ sebagai kombinasi linier dari faktor umum (*common factor*) $F_1, F_2, ..., F_m$ dan faktor khusus (*specific factor*) $\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_p$. Dengan model faktornya adalah

$$\begin{aligned}
X_1-\mu_1 &= l_{11}F_1+l_{12}F_2+\ldots+l_{1m}F_m+\varepsilon_1\\
X_2-\mu_2 &= l_{21}F_2+l_{22}F_2+\ldots+l_{2m}F_m+\varepsilon_2\\
\vdots & \qquad\qquad \vdots\\
X_p-\mu_p &= l_{p1}F_1+l_{p2}F_2+\ldots+l_{pm}F_m+\varepsilon_p.
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Misalkan **X** adalah vektor random yang teramati dengan *p* komponen berasal dari populasi homogen, mempunyai vektor rata-rata **μ** dan matriks varians kovarians **Σ**, sehingga model analisis faktor dengan *m* faktor umum ($m < p$) pada persamaan (3.1.1) dapat dinyatakan dalam notasi matriks sebagai berikut (Johnson, 1992):

$$\underset{(px1)}{\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}}\ \underset{(mx1)}{\mathbf{F}} + \underset{(px1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.1.2}$$

dengan

X_i = variabel random ke-*i* yang teramati

μ_i = rata-rata variabel ke-*i*

ε_i = faktor khusus ke-*i*

F_j = faktor umum ke-*j*

l_{ij} = *loading* dari variabel ke-*i* pada faktor ke-*j*.

Untuk vektor random **F** dan **ε** dipenuhi asumsi berikut ini:

1. $E[\mathbf{F}] = \mathbf{0}_{m\times 1}$, $\quad Cov(\mathbf{F}) = E[\mathbf{F}\mathbf{F}^t] = \mathbf{I}_{m\times m}$.

2. $E[\boldsymbol{\varepsilon}] = \mathbf{0}_{p\times 1}$, $Cov(\boldsymbol{\varepsilon}) = E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^t] = \boldsymbol{\Psi}_{p\times p} = \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_p \end{bmatrix}$, $\quad i = 1, 2, \ldots, p$

dengan **Ψ** adalah matriks diagonal dan ψ_i adalah variansi khusus ke-*i*.

3. $\mathbf{F}$ dan $\boldsymbol{\varepsilon}$ saling bebas (independen), sehingga $Cov(\boldsymbol{\varepsilon},\mathbf{F}) = E[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}^t] = \mathbf{0}_{p\times m}$.

Dari model faktor tersebut, dihasilkan struktur kovarians untuk variabel random $\mathbf{X}$, yaitu:

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^t &= (\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})(\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})^t \\ &= \left(\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon}\right)((\mathbf{LF})^t+\boldsymbol{\varepsilon}^t) \\ &= \mathbf{LF}(\mathbf{LF})^t + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})^t + \mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}^t + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^t \qquad (3.1.3)\end{aligned}$$

sehingga

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Sigma} = Cov(\mathbf{X}) &= E(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})^t \\ &= E\left[\mathbf{LF}(\mathbf{LF})^t + \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})^t + \mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}^t + \boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^t\right] \\ &= E\left[\mathbf{LF}(\mathbf{LF})^t\right] + E\left[\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{LF})^t\right] + E\left[\mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}^t\right] + E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^t\right] \\ &= E\left[\mathbf{LFF}^t\mathbf{L}^t\right] + E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{L}^t\mathbf{F}^t\right] + E\left[\mathbf{LF}\boldsymbol{\varepsilon}^t\right] + E\left[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^t\right] \\ &= \mathbf{L}E[\mathbf{FF}^t]\mathbf{L}^t + E[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}^t]\mathbf{L}^t + \mathbf{L}E[\mathbf{F}\boldsymbol{\varepsilon}^t] + E[\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\varepsilon}^t] \\ &= \mathbf{LIL}^t + \mathbf{0} + \mathbf{0} + \boldsymbol{\Psi} \\ &= \mathbf{LL}^t + \boldsymbol{\Psi} \qquad (3.1.4)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}Cov(X_i, X_j) &= E[(X_i-\mu_i)(X_j-\mu_j)^t] \\ &= E[(l_{ij}F_i-\varepsilon_i)(l_{ji}F_j-\varepsilon_j)^t] \\ &= E[l_{ij}l_{ji}{}^tF_iF_j{}^t - \varepsilon_i l_{ji}{}^tF_j{}^t - l_{ij}F_i\varepsilon_j{}^t - \varepsilon_i\varepsilon_j{}^t] \\ &= l_{i1}^2 + l_{i2}^2 + \ldots + l_{im}^2 + \psi_i \qquad , \ i = j \\ &= l_{i1}l_{j1} + l_{i2}l_{j2} + \ldots + l_{im}l_{jm} \qquad , \ i \neq j.\end{aligned}$$

Dengan model (3.1.2), kovarians untuk $\mathbf{X}$ dan $\mathbf{F}$ juga dapat diperoleh, yaitu:

$$\begin{aligned}(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{F}^t &= (\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{F}^t \\ &= \mathbf{LFF}^t + \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}^t\end{aligned}$$

sehingga kovarians dari **X** dan **F** diperoleh dari nilai ekspektasinya:

$$
\begin{aligned}
Cov(\mathbf{X},\mathbf{F}) &= E[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu})\mathbf{F}^t] \\
&= E[(\mathbf{LF}+\boldsymbol{\varepsilon})\mathbf{F}^t] \\
&= \mathbf{L}E[\mathbf{FF}^t]+E[\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{F}^t] \\
&= \mathbf{LI}+\mathbf{0} \\
&= \mathbf{L}
\end{aligned}
$$

atau

$$
\begin{aligned}
Cov(X_i,F_j) &= E(X_i-\mu_i)F_j^t \\
&= E\left(l_{ij}F_iF_j^t\right)+E\left(\varepsilon_i F_j^t\right) \\
&= l_{ij}
\end{aligned}
\tag{3.1.5}
$$

dengan l_{ij} adalah elemen ke-*ij* dari matriks *loading* **L**.

Loading atau bobot l_{ij} menggambarkan bagaimana setiap variabel random X_i berpengaruh terhadap faktor umum F_j. Bagian dari varians variabel ke-*i* yang diberikan oleh faktor umum dinamakan komunalitas ke-*i*. Sedangkan varians X_i yang berasal dari faktor khusus disebut ‘keunikan’ atau ‘variansi khusus’ sehingga dapat dituliskan:

$$
\begin{aligned}
Var(X_i) = \sigma_{ii} &= \text{komunalitas + variansi khusus} \\
&= \left(l_{i\,1}^2+l_{i\,2}^2+\ldots+l_{i\,m}^2\right)+\psi_i.
\end{aligned}
$$

Jika komunalitas ke-*i* dinotasikan dengan h_i^2, maka

$$h_i^2 = l_{i1}^2+l_{i2}^2+\ldots+l_{im}^2. \tag{3.1.6}$$

Jadi, $\sigma_{ii} = h_i^2+\psi_i \quad ,i=1,2,\ldots,p$. Komunalitas ke-*i* merupakan jumlah kuadrat *loading* dari varibel ke-i pada *m* faktor umum.

Jika terdapat variabel dengan varians terlampau besar yang dapat mempengaruhi penentuan faktor *loading* maka untuk menghindari masalah tersebut dapat dilakukan pembakuan. Jika setiap variabel random X_i dibakukan sehingga membentuk variabel

$$z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_i^2}}, \qquad \text{untuk setiap } i = 1, 2, \dots, p$$

Maka diperoleh vektor variabel random yang dibakukan, yaitu:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}.$$

Matriks varians kovarians dari variabel yang dibakukan, yaitu:

$$\mathbf{\Sigma} = E\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)\left(\frac{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}}{\sqrt{\boldsymbol{\sigma}}}\right)^t$$

$$= E\left(\begin{bmatrix} \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \\ \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \\ \vdots \\ \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dfrac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \dfrac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \dfrac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix} \right)$$

$$= E\begin{bmatrix} \frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}\frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}\frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\frac{X_1-\mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\frac{X_2-\mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} & & \frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}\frac{X_p-\mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{11}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{11}}} & \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{12}}\sqrt{\sigma_{12}}} & \cdots & \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{1p}}\sqrt{\sigma_{1p}}} \\ \frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \frac{\sigma_{22}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{22}}} & \cdots & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\sigma_{1p}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \frac{\sigma_{2p}}{\sqrt{\sigma_{22}}\sqrt{\sigma_{pp}}} & \cdots & \frac{\sigma_{pp}}{\sqrt{\sigma_{pp}}\sqrt{\sigma_{pp}}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{12} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{1p} & \rho_{2p} & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

sehingga

$$Cov(\mathbf{z}) = Cor(\mathbf{X}) = \boldsymbol{\rho}. \tag{3.1.7}$$

Jika variabel yang dibakukan digunakan pada model faktor maka persamaan (3.1.4) menjadi

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{LL}^t + \boldsymbol{\Psi} \tag{3.1.8}$$

dan matriks *loading* menjadi korelasi **X** dan **F** adalah

$$Cor(\mathbf{X}, \mathbf{F}) = \mathbf{L}. \tag{3.1.9}$$

Para ilmuwan analisis faktor merasa kesulitan dalam memfaktorkan matriks varians kovarians ke bentuk $\mathbf{LL}^t + \boldsymbol{\Psi}$, pada saat m (banyaknya faktor) kurang dari p (banyaknya variabel). Ketika $m > 1$, akan terdapat hubungan yang membingungkan pada analisis faktor. Untuk melihat hal tersebut, misalkan ada matriks ortogonal $\mathbf{T}$ berukuran $m \times m$ sedemikian sehingga $\mathbf{T}\mathbf{T}^t = \mathbf{T}^t\mathbf{T} = \mathbf{I}$. Selanjutnya, persamaan (3.1.2) dapat ditulis sebagai

$$\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu} = \mathbf{L}\mathbf{F} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{T}\mathbf{T}^t\mathbf{F} + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}^*\mathbf{F}^* + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{3.1.10}$$

dengan

$$\mathbf{L}^* = \mathbf{L}\mathbf{T} \qquad \text{dan} \qquad \mathbf{F}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{F}$$

sehingga

$$E\left(\mathbf{F}^*\right) = \mathbf{T}^t\ E\left(\mathbf{F}\right) = \mathbf{0}$$

dan $\quad Cov\left(\mathbf{F}^*\right) = \mathbf{T}^t\ Cov\left(\mathbf{F}\right)\ \mathbf{T} = \mathbf{T}^t\mathbf{T} = \mathbf{I}$.

Untuk dapat membedakan matriks faktor *loading* $\mathbf{L}$ dengan $\mathbf{L}^*$ adalah hal yang sulit. Faktor $\mathbf{F}$ dan $\mathbf{F}^* = \mathbf{T}^t\mathbf{F}$ memiliki sifat statistik yang sama, walaupun pada dasarnya $\mathbf{L}$ dan $\mathbf{L}^*$ berbeda. Keduanya memiliki matriks varians dan kovarians yang sama, yaitu $\boldsymbol{\Sigma}$. Sehingga dapat ditulis:

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t + \boldsymbol{\Psi} = \mathbf{L}\mathbf{T}\mathbf{T}^t\mathbf{L}^t + \boldsymbol{\Psi} = \left(\mathbf{L}^*\right)\left(\mathbf{L}^*\right)^t + \boldsymbol{\Psi}. \tag{3.1.11}$$

Masalah tersebut menimbulkan suatu usulan untuk melakukan rotasi faktor.

Analisis faktor dilanjutkan dengan kondisi yang memenuhi hasil penaksiran $\mathbf{L}$ dan $\boldsymbol{\Psi}$ yang unik. Matriks *loading* kemudian dirotasikan, agar diperoleh struktur yang lebih sederhana. Untuk penjelasan lebih lanjut mengenai rotasi faktor akan dibahas pada sub bab selanjutnya.

3.1.2 Metode Komponen Utama

Metode komponen utama akan digunakan untuk menaksir parameter-parameter yang digunakan dalam analisis faktor. Parameter-parameter yang akan ditaksir adalah variansi khusus, komunalitas, dan matriks faktor *loading*.

Misalkan **X** adalah vektor random yang teramati dengan *p* komponen yang berasal dari populasi homogen, mempunyai rata-rata **μ** dan matriks varians kovarians **Σ**. Kemudian, diambil sampel random $X_1, X_2, \ldots, X_n$ dengan matriks varians kovarians sampel **S.** Untuk mencari penaksir $\hat{\mathbf{L}}$, substitusikan **Σ** dengan **S** pada persamaan (3.1.4) sehingga diperoleh :

$$\mathbf{S} \cong \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t + \hat{\mathbf{\Psi}}. \tag{3.2.1}$$

Dalam pendekatan analisis komponen utama, $\hat{\mathbf{\Psi}}$ diabaikan dan **S** dapat difaktorkan menjadi $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t$. Untuk memfaktorkan **S** dapat juga digunakan **definisi (2.2.3)**, sehingga

$$\mathbf{S} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^t \tag{3.2.2}$$

dengan **E** adalah matriks ortogonal yang terdiri dari vektor eigen yang telah dibakukan $\left(\mathbf{e}_i{}^t\mathbf{e}_i = 1\right)$ untuk matriks **S** dan

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_p \end{bmatrix} \tag{3.2.3}$$

dengan $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_p$ adalah nilai eigen untuk **S** dan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_p > 0$.

Untuk menyelesaikan pemfaktoran $\mathbf{S} = \mathbf{E\Lambda E}^t$ ke dalam bentuk $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t$, $\mathbf{\Lambda}$ difaktorkan menjadi $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ (3.2.4)

dengan

$$\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\lambda_p} \end{bmatrix} \tag{3.2.5}$$

sehingga persamaan (3.2.2) dapat menjadi

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= \mathbf{E\Lambda E}^t \\ &= \mathbf{E\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{\Lambda}^{\frac{1}{2}}\mathbf{E}^t \\ &= \left(\mathbf{E\Lambda}^{\frac{1}{2}}\right)\left(\mathbf{E\Lambda}^{\frac{1}{2}}\right)^t. \end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Persamaan (3.2.6) merupakan bentuk lain dari $\mathbf{S} = \hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t$, tetapi $\hat{\mathbf{L}}$ tidak dapat didefinisikan sebagai $\mathbf{E\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ karena $\mathbf{E\Lambda}^{\frac{1}{2}}$ adalah matriks berukuran $p \times p$ sedangkan $\hat{\mathbf{L}}$ adalah matriks berukuran $p \times m$ dengan $m < p$. Oleh karena itu, diambil $\mathbf{\Lambda}_1$ yang memuat m nilai eigen terbesar $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_m$ dan $\mathbf{E}_1$ terdiri dari vektor eigen $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_m$ yang bersesuaian dengan $\mathbf{\Lambda}_1$, maka akan diperoleh nilai dari $\hat{\mathbf{L}}$, yaitu:

$$\underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}} = \underset{(p\times m)}{\mathbf{E}_1}\ \underset{(m\times m)}{\mathbf{\Lambda}_1^{\frac{1}{2}}} \tag{3.2.7}$$

atau

$$\begin{aligned} \underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}} &= \underset{(p\times m)}{\left[\mathbf{e}_1\sqrt{\lambda_1} \ \vdots\ \mathbf{e}_2\sqrt{\lambda_2} \ \vdots\ \ldots \ \vdots\ \mathbf{e}_m\sqrt{\lambda_m}\right]} \\ &= \underset{(p\times m)}{\left[\sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1 \ \vdots\ \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \ \vdots\ \ldots \ \vdots\ \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m\right]} \end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & \hat{l}_{12} & \cdots & \hat{l}_{1m} \\ \hat{l}_{21} & \hat{l}_{22} & \cdots & \hat{l}_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{l}_{p1} & \hat{l}_{p2} & \cdots & \hat{l}_{pm} \end{bmatrix} \tag{3.2.8}$$

$$= \left[\hat{l}_{i1}, \hat{l}_{i2}, \ldots, \hat{l}_{im} \right], \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Dengan menggunakan persamaan (3.2.8) maka persamaan (3.1.4) akan menjadi:

$\mathbf{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t + \mathbf{\Psi}$

$$= \left[\sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1 \vdots \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \vdots \ldots \vdots \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m \right] \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \\ \cdots \\ \vdots \\ \cdots \\ \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \psi_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \vdots & \psi_p \end{bmatrix} \tag{3.2.9}$$

Representasi dari persamaan (3.2.9) ketika diterapkan pada matriks varians kovarians sampel **S** atau pada matriks korelasi sampel **R** diketahui sebagai solusi komponen utama.

Komponen utama pada analisis faktor untuk matriks varians kovarians sampel **S** memiliki pasangan nilai eigen dan vektor eigen $\left(\hat{\lambda}_1, \hat{\mathbf{e}}_1\right), \left(\hat{\lambda}_2, \hat{\mathbf{e}}_2\right), \ldots, \left(\hat{\lambda}_p, \hat{\mathbf{e}}_p\right)$ dengan $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_p$. Jika $m < p$ merupakan banyaknya faktor umum, maka matriks yang dihasilkan dari taksir faktor *loading* $\left\{\hat{l}_{ij}\right\}$ didefinisikan sebagai:

$$\underset{(p\times m)}{\hat{\mathbf{L}}} = \left[\sqrt{\lambda_1}\mathbf{e}_1 \vdots \sqrt{\lambda_2}\mathbf{e}_2 \vdots \ldots \vdots \sqrt{\lambda_m}\mathbf{e}_m \right]. \tag{3.2.10}$$

Taksiran variansi khusus diberikan oleh elemen diagonal dari matriks $\mathbf{S}-\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t$, yaitu:

$$\hat{\boldsymbol{\Psi}}=\begin{bmatrix}\hat{\psi}_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \hat{\psi}_2 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & \hat{\psi}_p\end{bmatrix} \text{ dengan } \hat{\psi}_i=s_{ii}-\sum_{j=1}^{m}\hat{l}_{ij}^{\,2}\,. \qquad (3.2.11)$$

Sedangkan penaksir variansi khusus oleh elemen diagonal dari matriks $\mathbf{R}-\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t$, yaitu:

$$\hat{\psi}_i=1-\sum_{j=1}^{m}\hat{l}_{ij}^{\,2}. \qquad (3.2.12)$$

Komunalitas ditaksir sebagai:

$$\hat{h}_i^2=\hat{l}_{i1}^{\,2}+\hat{l}_{i2}^{\,2}+\ldots+\hat{l}_{i1}^{\,2}$$

$$=\sum_{j=1}^{m}\hat{l}_{ij}^{\,2}\,. \qquad (3.2.13)$$

Jika banyaknya faktor umum tidak ditentukan atau tidak diketahui, maka dapat dicari berdasarkan taksiran nilai eigen sama seperti pada analisis komponen utama. Misalkan matriks sisa $\mathbf{S}-\left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t+\hat{\boldsymbol{\Psi}}\right)$ atau $\mathbf{R}-\left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t+\hat{\boldsymbol{\Psi}}\right)$ merupakan hasil dari pendekatan matriks **S** atau matriks **R** dengan solusi komponen utama. Elemen diagonal pada matriks sisa adalah nol dan jika elemen yang lainnya bernilai kecil maka banyaknya *m* faktor umum pada model faktor adalah sesuai.

Seharusnya kontribusi beberapa faktor awal pada varians sampel cukup besar. Kontribusi dari varians sampel s_{ii} dari faktor umum pertama adalah $\hat{l}_{i1}$. Varians sampel total didefinisikan sebagai:

$$\text{tr}(\mathbf{S}) = s_{11} + s_{22} + \ldots + s_{pp} \; .$$

Kontribusi dari faktor umum pertama adalah

$$\hat{l}_{11}^{\;2} + \hat{l}_{21}^{\;2} + \ldots + \hat{l}_{p1}^{\;2} = \sum_{i=1}^{p} \hat{l}_{i1}^{\;2} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sqrt{\hat{\lambda}_1} \hat{\mathbf{e}}_{i1} \right)^2 = \hat{\lambda}_1 \sum_{i=1}^{p} \hat{\mathbf{e}}_{i1}^{\;2} = \hat{\lambda}_1$$

dengan $\hat{\mathbf{e}}_1$ adalah vektor eigen satuan, artinya memiliki panjang 1. Sehingga, secara umum dapat juga ditulis kontribusi dari faktor ke-*j* pada varians sampel total adalah

$$\sum_{i=1}^{p} \hat{l}_{i1}^{\;2} = \sum_{i=1}^{p} \left(\sqrt{\hat{\lambda}_1} \hat{\mathbf{e}}_{i1} \right)^2 = \hat{\lambda}_j \sum_{i=1}^{p} \hat{\mathbf{e}}_{ij}^{\;2} = \hat{\lambda}_j \; . \qquad (3.2.14)$$

Secara umum proporsi dari varians sampel total yang berasal dari faktor umum ke-*j* adalah

$$\frac{\hat{\lambda}_j}{s_{11} + s_{22} + \ldots + s_{pp}} \quad \text{untuk analisis faktor dari } \mathbf{S}$$

atau $\dfrac{\hat{\lambda}_j}{p}$ untuk analisis faktor dari **R.** (3.2.15)

Kriteria dari persamaan (3.2.15), seringkali digunakan untuk menentukan banyaknya faktor umum yang sesuai. Banyaknya faktor umum yang ditetapkan pada model akan terus bertambah hingga dicapai proporsi yang sesuai dari varians sampel total yang telah dijelaskan yaitu sebesar 80% (Johnson, 1992).

3.1.3 Metode Maksimum Likelihood

Selain metode komponen utama, dalam tugas akhir ini akan dipergunakan juga metode maksimum likelihood untuk menaksir parameter-parameter dalam analisis faktor. Parameter-parameter yang akan ditaksir adalah variansi khusus dan matriks faktor *loading*.

Misalkan **X** adalah vektor random yang teramati dengan *p* komponen yang berasal dari populasi homogen, mempunyai mean **μ** dan matriks varians kovarians **Σ**. Jika masing-masing variabel random $X_i \ (i = 1, 2, \ldots, p)$ diambil sebanyak *n* buah pengamatan dan diasumsikan **F** dan **ε** masing-masing berdistribusi normal maka model faktornya adalah sebagai berikut:

$$\underset{(px1)}{\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}} = \underset{(pxm)}{\mathbf{L}} \ \underset{(mx1)}{\mathbf{F}} + \underset{(px1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} .$$

Selanjutnya, dapat ditulis

$$\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}_j = \mathbf{L}\mathbf{F}_j + \boldsymbol{\varepsilon}_j \qquad , \ j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3.1}$$

Karena **F** dan **ε** masing-masing berdistribusi normal maka fungsi likelihood untuk $\mathbf{X}_j - \boldsymbol{\mu}_j$ adalah

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{np}{2}} |\boldsymbol{\Sigma}|^{\frac{n}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2} \mathrm{tr}\left[\boldsymbol{\Sigma}^{-1} \left(\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_j - \bar{\mathbf{x}})^t \right) \right] + n(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\bar{\mathbf{x}} - \boldsymbol{\mu})^t \right] \tag{3.3.2}$$

Teorema berikut mengenai penaksir maksimum likelihood untuk komunalitas h_i^2.

Teorema 3.1:

Misalkan $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah sampel random dari $N_p(\mu, \Sigma)$ dengan $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t + \boldsymbol{\Psi}$ adalah matriks kovarians dari faktor umum (*m*), sehingga diperoleh penaksir maksimum likelihood $\hat{\mathbf{L}}$, $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$, $\boldsymbol{\mu} = \bar{\mathbf{X}}$ dengan memaksimumkan persamaan (3.3.2) terhadap matriks diagonal $\mathbf{L}^t\mathbf{\Psi}^{-1}\mathbf{L}=\mathbf{\Delta}$. Dengan demikian, maka diperoleh penaksir maksimum likelihood untuk komunalitas h_i^2 , yaitu:

$$\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + ... + \hat{l}_{im}^2 \quad , \ i = 1, 2, \ldots, p \tag{3.3.4}$$

dan proporsi ke-*j* terhadap variansi sampel total $\xi^{(j)}$, yaitu:

$$\xi^{(j)} = \frac{\hat{l}_{1j}^2 + \hat{l}_{2j}^2 + ... + \hat{l}_{pj}^2}{s_{11} + s_{22} + ... + s_{pp}} . \tag{3.3.5}$$

Bukti:

Dengan menggunakan sifat invarian dari penaksir maksimum likelihood, fungsi $\mathbf{L}$ dan $\mathbf{\Psi}$ mempunyai penaksir dengan fungsi yang sama yaitu $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\mathbf{\Psi}}$. Sama halnya dengan komunalitas $h^2{}_i = l^2{}_{i1} + l^2{}_{i2} + ... + l^2{}_{im}$, yang mempunyai penaksir maksimum likelihoodnya $\hat{h}_i^2 = \hat{l}_{i1}^2 + \hat{l}_{i2}^2 + ... + \hat{l}_{im}^2$.

Penaksir maksimum likelihood dari $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\mathbf{\Psi}}$ diperoleh dengan memaksimumkan persamaan (3.3.2). $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\mathbf{\Psi}}$ juga dapat dengan mudah diperoleh menggunakan bantuan *software* komputer. Adapun skema perhitungannya, sebagai berikut (Ningrum, 2004):

1. Masukkan seluruh data sampel dengan *p* variabel dan *n* pengamatan.
2. Hitung matriks varians kovarians sampel **S,**

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_{2p} & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_{pp} \end{bmatrix}$$

3. Hitung nilai eigen dan vektor eigen dari matriks varians kovarians sampel, buat *scree plot* nilai eigen dan tentukan m faktor umum berdasarkan hasil *scree plot* tersebut.
4. Bentuk matriks invers varians kovarians sampel $\mathbf{S}^{-1}$ dengan konstrain $\mathbf{SS}^{-1} = \mathbf{I}$.
5. Hitung nilai awal dari variansi khusus,

$$\hat{\psi}_i = \left(1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{p}\right)\left(\frac{1}{s_{ii}}\right)$$

   dengan s_{ii} adalah nilai diagonal dari $\mathbf{S}^{-1}$.
6. Bentuk matriks akar kuadrat dari variansi khusus $\hat{\mathbf{\Psi}}^{1/2}$,

$$\text{diag}\left(\hat{\mathbf{\Psi}}^{1/2}\right) = \left(\psi_1^{1/2}, \psi_2^{1/2}, \ldots, \psi_p^{1/2}\right).$$

7. Bentuk matriks invers akar kuadrat variansi khusus $\hat{\mathbf{\Psi}}^{-1/2}$,

$$\text{diag}\left(\hat{\mathbf{\Psi}}^{1/2}\right) = \left(\psi_1^{-1/2}, \psi_2^{-1/2}, \ldots, \psi_p^{-1/2}\right).$$

8. Bentuk $\mathbf{S}^*$ (matriks varians kovarians *uniqueness-rescaled*),

$$\mathbf{S}^* = \Psi^{-1/2}\mathbf{S}_n\Psi^{-1/2}$$

   dengan $\mathbf{S}_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}\right)\left(\mathbf{X}_j - \bar{\mathbf{X}}\right)^t.$
9. Hitung nilai $\hat{\mathbf{\Delta}} = \hat{\mathbf{\Lambda}} - \mathbf{I}$, dimana $\hat{\mathbf{\Lambda}} = \text{diag}\left[\boldsymbol{\lambda}_1^*, \boldsymbol{\lambda}_2^*, \ldots, \boldsymbol{\lambda}_m^*\right]$ adalah nilai eigen dari $\mathbf{S}^*$.
10. Bentuk matriks akar kuadrat dari $\hat{\mathbf{\Delta}}$, yaitu

$$\hat{\mathbf{\Delta}}^{1/2} = \text{diag}\left(\sqrt{\boldsymbol{\lambda}_1^* - 1}, \sqrt{\boldsymbol{\lambda}_2^* - 1}, \ldots, \sqrt{\boldsymbol{\lambda}_m^* - 1}\right)$$

11. Hitung nilai penaksir loading $\hat{\mathbf{L}} = \mathbf{\Psi}^{1/2}\hat{\mathbf{E}}^{*}\hat{\mathbf{\Delta}}^{1/2}$, dimana $\hat{\mathbf{E}}^{*} = \left[\hat{\mathbf{e}}_1^{*}, \hat{\mathbf{e}}_2^{*}, \ldots, \hat{\mathbf{e}}_m^{*}\right]$ adalah vektor eigen dari $\mathbf{S}^{*}$.
12. Masukkan $\hat{\mathbf{L}}$ ke dalam fungsi likelihood pada persamaan (3.3.2), iterasikan nilai-nilai $\hat{\psi}_i$ sehingga diperoleh $\hat{\psi}_1, \hat{\psi}_2, \ldots, \hat{\psi}_p$ yang meminimumkan fungsi likelihood.
13. Kembali ke langkah 6 sampai 12, lakukan pengulangan langkah ini sampai didpat nilai $\hat{\mathbf{L}}$ yang konvergen.

Pembakuan vektor random X

Variabel random X_i yang dibakukan didefinisikan oleh:

$$z_i = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_{ii}}} = \frac{X_i - \mu_i}{\sqrt{\sigma_i^2}}, \qquad \text{untuk setiap } i = 1, 2, \ldots, p$$

atau dalam notasi matriks dapat ditulis sebagai:

$$\mathbf{Z} = (\mathbf{V}^{1/2})^{-1}(\mathbf{X} - \boldsymbol{\mu}) \tag{3.3.6}$$

dengan $\mathbf{V}^{1/2}$ adalah matriks standar deviasi berukuran $(p \times p)$. Matriks standar deviasi $\mathbf{V}^{1/2}$ didefinisikan sebagai:

$$\mathbf{V}^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix}.$$

Representasi dari persamaan (3.3.6) ketika diterapkan pada matriks varians kovarians $\mathbf{\Sigma}$ dan matriks korelasi $\boldsymbol{\rho}$ terdapat pada teorema berikut.

Teorema 3.2:

Jika $\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$ maka $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$

Bukti:

$$\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2} = \boldsymbol{\Sigma}$$

$$\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2}\mathbf{V}^{-1/2} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$$

$$\mathbf{I}\ \boldsymbol{\rho}\ \mathbf{I} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$$

Jadi, $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{V}^{1/2}\boldsymbol{\rho}\mathbf{V}^{1/2}$ dengan $\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_{pp} \end{bmatrix}$. ∎

Jadi $\boldsymbol{\Sigma}$ dapat dihitung dari $\mathbf{V}^{1/2}$ dan $\boldsymbol{\rho}$, sedangkan $\boldsymbol{\rho}$ dapat dihitung dari $\boldsymbol{\Sigma}$.

Berdasarkan **teorema (3.2)** maka diperoleh :

Akibat:

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})(\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})^t + \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}. \quad (3.3.7)$$

Bukti:

$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2}$ dan $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^t + \boldsymbol{\Psi}$

maka

$$\mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Sigma}\mathbf{V}^{-1/2} = \mathbf{V}^{-1/2}(\mathbf{L}\mathbf{L}^t + \boldsymbol{\Psi})\mathbf{V}^{-1/2}$$

$$\boldsymbol{\rho} = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L}\mathbf{L}^t\mathbf{V}^{-1/2} + \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}$$

$$\boldsymbol{\rho} = (\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})(\mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L})^t + \mathbf{V}^{-1/2}\boldsymbol{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}.$$ ∎

Dari proses pembakuan **X** dan akibat (3.3.7), maka dapat disimpulkan:

i). Matriks *loading* $\mathbf{L}_z = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{L}$, $\mathbf{L}_z = (l_{ij}^*)$.

ii). Matriks variansi khusus $\mathbf{\Psi}_z = \mathbf{V}^{-1/2}\mathbf{\Psi}\mathbf{V}^{-1/2}$.

Sedangkan penaksir likelihood $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ adalah

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = (\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{L}})(\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{L}})^t + \hat{\mathbf{V}}^{-1/2}\hat{\mathbf{\Psi}}\hat{\mathbf{V}}^{-1/2}$$

atau

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} = \hat{\mathbf{L}}_z\hat{\mathbf{L}}_z{}^t + \hat{\mathbf{\Psi}}_z.$$

iii) Proporsi faktor ke-j terhadap varians sampel total yang dibakukan adalah

$$\hat{\xi}_z^{(j)} = \frac{\hat{l}_{1j}^{*2} + \hat{l}_{2j}^{*2} + \ldots + \hat{l}_{pj}^{*2}}{p}.$$

Biasanya, hasil-hasil penelitian yang dilakukan datanya telah dibakukan dan matriks korelasi sampel **R** dianalisis. Matriks sisa (*residual*) merupakan selisih dari korelasi sampel **R** atau dari matriks **S** dengan nilai-nilai taksiran yang diperoleh. $\text{Matriks sisa} = \mathbf{R} - \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t + \hat{\mathbf{\Psi}}\right)$ atau $\mathbf{S} - \left(\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t + \hat{\mathbf{\Psi}}\right)$. (3.3.8)

Pengujian jumlah faktor umum

Melakukan uji hipotesis bahwa *m* yang dipilih adalah jumlah faktor umum yang tepat dengan model analisis faktor. Hipotesis yang diuji adalah $\mathrm{H}_0 : \mathbf{\Sigma} = \mathbf{LL} + \mathbf{\Psi}$ dengan **L** adalah matriks berukuran $p \times m$. Kriteria ini khusus digunakan pada analisis faktor dengan metode maksimum likelihood.

Dengan asumsi populasi berdistribusi normal, maka dapat dilakukan uji model yang sesuai. Metode yang digunakan untuk pengujian jumlah faktor umum dalam model analisis faktor ortogonal adalah Metode uji rasio likelihood. Misalkan terdapat *m* faktor umum dalam hipotesis, akan dilakukan pengujian:

$$\mathrm{H}_0 : \underset{(p\times m)}{\boldsymbol{\Sigma}} = \underset{(p\times m)}{\mathbf{L}}\underset{(m\times p)}{\mathbf{L}^t} + \underset{(p\times p)}{\boldsymbol{\Psi}}$$

$$\mathrm{H}_1 : \underset{(p\times m)}{\boldsymbol{\Sigma}} \neq \underset{(p\times m)}{\mathbf{L}}\underset{(m\times p)}{\mathbf{L}^t} + \underset{(p\times p)}{\boldsymbol{\Psi}}$$

Di bawah H_0, dengan fungsi likelihood yang dimaksimumkan diperoleh $\hat{\boldsymbol{\mu}} = \overline{\mathbf{X}}$ dan $\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t + \hat{\boldsymbol{\Psi}}$ dengan $\hat{\mathbf{L}}$ dan $\hat{\boldsymbol{\Psi}}$ adalah penaksir maksimum likelihood dari $\mathbf{L}$ dan $\boldsymbol{\Psi}$. Statistik uji untuk uji rasio likelihood adalah:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \frac{\underset{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}}{maks}\,\mathbf{L}_{\mathrm{H}_0}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})}{\underset{\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma}}{maks}\,\mathbf{L}(\boldsymbol{\mu},\boldsymbol{\Sigma})}$$

$$= \frac{\dfrac{1}{(2\pi)^{np/2}}e^{-np/2}\dfrac{1}{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|^{n/2}}}{\dfrac{1}{(2\pi)^{np/2}}e^{-np/2}\dfrac{1}{|\mathbf{S}_n|^{n/2}}}$$

$$= \frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|^{-n/2}}{|\mathbf{S}_n|^{-n/2}}$$

$$\boldsymbol{\Lambda}^{-2} = \frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|^{n}}{|\mathbf{S}_n|^{n}}$$

$$-2\ln\boldsymbol{\Lambda} = n\ln\frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|}{|\mathbf{S}_n|} \qquad (3.4.1)$$

dengan derajat kebebasannya adalah:

$$v - v_0 = \frac{1}{2}p(p+1) - \left\{p(m+1) - \frac{1}{2}m(m-1)\right\}$$

$$= \frac{1}{2}\left\{(p-m)^2 - p - m\right\}.$$

Bartlett menunjukkan bahwa dapat dilakukan aproksimasi chi-kuadrat terhadap distribusi sampel pada persamaan (3.4.1) dengan menggantikan nilai *n* dengan faktor koreksi:

$$n-1-(2p+4m+5)/6\,.$$

Dengan menggunakan faktor koreksi Bartlett, tolak H_0 dengan taraf signifikansi α jika

$$\{n-1-(2p+4m+5)/6\}\ln\frac{|\hat{\boldsymbol{\Sigma}}|}{|\mathbf{S}_n|} > \chi^2_{(v-v_0);\alpha}$$

$$\{n-1-(2p+4m+5)/6\}\ln\frac{|\hat{\mathbf{L}}\hat{\mathbf{L}}^t+\hat{\boldsymbol{\Psi}}|}{|\mathbf{S}_n|} > \chi^2_{(v-v_0);\alpha} \qquad (3.4.2)$$

dengan $v-v_0 \quad =\frac{1}{2}\{(p-m)^2-p-m\}.$

Dalam mengimplementasikan pengujian dengan persamaan (3.4.2), untuk menguji faktor umum (*m*) diperoleh dengan cara membandingkan varians yang diperumum $|\mathbf{L}\mathbf{L}^t+\boldsymbol{\Psi}|$ dan $|\mathbf{S}_n|$. Jika *n* besar dan *m* relatif kecil daripada *p*, biasanya hipotesis H_0 akan ditolak. Maka harus digunakan pertimbangan lain dalam memilih jumlah faktor *m*.

3.1.4 Pengujian Kelayakan untuk Dilakukan Analisis Faktor pada Data

Sebelum melakukan pengolahan data dengan analisis faktor, perlu di uji apakah data layak menggunakan metode analisis faktor atau tidak. Salah satu metode tersebut adalah dengan melihat korelasi parsial atau korelasi *anti-image* antar variabel indikator. Korelasi parsial harus kecil mendekati nol, maka suatu data layak untuk dilakukan analisis faktor (Sharma, 1996). Korelasi parsial memiliki rumus sebagai berikut:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D},\ \text{dengan } \mathbf{D} = \left[\text{diag}\left(\mathbf{R}^{-1}\right)^{1/2}\right]^{-1}.$$

Dalam SPSS 15, korelasi parsial merupakan korelasi *anti-image*.

Metode lain yang paling banyak digunakan adalah uji Kaiser-Mayer-Olkin (KMO). KMO merupakan suatu indeks yang dipergunakan untuk membandingkan koefisien korelasi pengamatan dengan koefisien korelasi parsial. KMO dihitung sebagai berikut :

$$KMO = \frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p} r^2_{ij}}{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p} r^2_{ij} + \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p} q^2_{ij}} \tag{3.5.1}$$

r_{ij} : koefisien korelasi antara variabel ke-*i* dan variabel ke-*j*

q_{ij} : koefisien korelasi parsial antara variabel ke-*i* dan variabel ke-*j*

Tidak ada uji statistik dalam mengukur KMO, tetapi Kaiser dalam Rencher (1984) menganjurkan besarnya nilai KMO paling tidak harus mencapai 0,80 untuk mendapatkan hasil yang diharapkan.

3.1.5 Memilih Jumlah Faktor Umum (*m*)

Untuk menghasilkan suatu struktur model faktor, kita harus memilih berapa jumlah faktor umum (*m*) yang sesuai dengan model tersebut. Dalam analisis faktor terdapat beberapa kriteria untuk menentukan nilai *m*, yaitu (Rencher, 1984):

1. Banyaknya faktor umum (*m*) sama dengan banyaknya faktor yang dibutuhkan pada perhitungan varians untuk memperoleh persentase minimal 80% dari varians total tr(**S**) atau tr(**R**).
2. Banyaknya faktor umum (*m*) sama dengan banyaknya nilai eigen yang lebih besar dari rata-rata nilai eigen. Rata-rata untuk **R** adalah 1 sedangkan rata-rata untuk matriks **S** adalah $\sum_{i=1}^{p} \boldsymbol{\lambda}_i / \mathbf{p}$.
3. Dengan menggunakan *scree test* berdasarkan pada plot nilai eigen dari **R** atau **S**. Jika grafik turun secara curam diikuti oleh garis lurus dengan beberapa lereng kecil maka pemilihan faktor umum (*m*) ditentukan oleh banyaknya nilai eigen sebelum garis lurus.
4. Melakukan pengujian faktor umum dari data yang diperoleh dari metode maksimum likelihood yang telah dijelaskan pada subbab 3.1.3 halaman 46-48.

3.1.6 Rotasi Faktor

Rotasi faktor bertujuan untuk memperoleh struktur yang sederhana agar dapat memudahkan interpretasi faktor (Sharma, 1996). Perotasian dapat digunakan pada model faktor ortogonal maupun model faktor *oblique*. Untuk tujuan analisis faktor konfirmatori, akan digunakan rotasi *oblique* agar diperoleh besarnya koefisien korelasi antara faktor umum atau variabel laten.

Jika **L** adalah penaksir faktor *loading* yang diperoleh dari metode komponen utama ataupun metode maksimum likelihood maka $\hat{\mathbf{L}}^* = \hat{\mathbf{L}}\mathbf{T}$ dengan **T** adalah matriks transformasi rotasi *oblique* merupakan *pattern matriks* koefisien *loading* yang telah dirotasi sebelum dikalikan dengan matriks korelasi antar variabel laten. Besarnya koefisien korelasi antar variabel laten merupakan produk skalar dari pasangan vektor-vektor **T.** Jika ditulis dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut : $\mathbf{\Phi} = \mathbf{T}^t\mathbf{T}$.

Dari *pattern matriks* yang dikalikan dengan korelasi antar variabel laten, akan diperoleh struktur matriks *loading* atau dalam bentuk matematis struktur matriks dapat dijelaskan dengan $\hat{\mathbf{L}}^{**} = \hat{\mathbf{L}}^{*}\mathbf{\Phi}$ (Harman, 1967).

3.1.7 Pemilihan Metode

Menurut Sharma (1996), ketepatan suatu model faktor dapat dilihat dari nilai RMSR (*Root Mean Square Residual*) dari matriks sisa. RMSR didefinisikan:

$$RMSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p} res^2_{ij}}{p(p+1)/2}}$$

dengan,

res^2_{ij} = matriks sisa pada matriks korelasi **R** atau matriks kovariansi **S**

p = banyaknya variabel.

Semakin kecil nilai RMSR yang diperoleh maka semakin baik model faktor tersebut.

3.1 ANALISIS FAKTOR KONFIRMATORI (CFA)

Seperti yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa analisis faktor konfirmatori merupakan suatu teknik pada analisis faktor yang bertujuan untuk menguji atau mengkonfirmasi struktur model faktor yang telah diasumsikan sebelumnya, berdasarkan prosedur analisis faktor eksploratori. Pada penjelasan selanjutnya, akan di jelaskan tentang prosedur analisis faktor konfirmatori dalam menjelaskan seberapa baik data sampel dalam mengkonfirmasi struktur model faktor.

3.2.1 Analisis faktor konfirmatori sebagai bagian dari SEM

Model persamaan struktural adalah kumpulan persamaan yang digunakan untuk menentukan fenomena hubungan sebab akibat dari variabel-variabel yang telah diasumsikan sebelumnya (Johnson, 1992). Model persamaan struktural dikelompokkan menjadi dua submodel yaitu: model pengukuran dan model struktural. Analisis faktor konfirmatori mewakili model pengukuran dalam SEM. Model pengukuran adalah submodel dalam model persamaan struktural yang menspesifikasi variabel-variabel indikator untuk setiap variabel laten, serta menentukan realibilitas dari setiap variabel laten tersebut untuk penaksiran hubungan sebab akibat dalam SEM. SEM digunakan dalam peralihan dari analisis faktor eksploratori menjadi analisis faktor konfirmatori karena kemampuannya dalam mengupayakan pengembangan sudut pandang suatu masalah menjadi lebih sistematis dan menyeluruh dalam semua bidang.

3.2.2 Model Persamaan Struktural (SEM)

A. Asumsi dalam SEM menggunakan LISREL (*Linier Stuctural relations*)

Ferdinand (dalam Kusnendi, 2008) mengemukakan asumsi-asumsi yang melandasi penggunaan SEM sebagai berikut:

1. Data mengikuti distribusi normal, asumsi ini telah dijelaskan pada halaman 18-19.
2. Asumsi pencilan (*outliers*), pencilan menunjukkan kombinasi nilai semua variabel yang memiliki karakteristik tidak lazim yang muncul dalam bentuk nilai sangat ekstrim. Kasus pencilan telah dijelaskan pada halaman 18 dan 19.
3. Tidak ada multikolinieritas sempurna di antara variabel laten. Multikolinieritas merupakan kondisi dimana antar variabel terdapat hubungan linier yang sempurna. Maruyama (dalam Kusnendi, 2008) mengatakan bahwa salah satu cara untuk mengidentifikasi adanya masalah multikolinieritas adalah melalui pengamatan koefisien korelasi yang sederhana. Jika koefisien korelasi yang sederhana lebih besar dari 0,90, maka terdapat masalah multikolinieritas pada data tersebut.

B. Model Umum dan Notasi SEM

Model umum dari model persamaan struktural atau SEM terdiri atas model struktural dan model pengukuran**.** Hubungan antar variabel laten disebut sebagai persamaan struktural, sedangkan hubungan antara variabel indikator dengan variabel latennya merupakan persamaan pengukuran.

$$\underset{(n\times1)}{\boldsymbol{\eta}} = \underset{(n\times n)}{\mathbf{B}}\ \underset{(n\times1)}{\boldsymbol{\eta}} + \underset{(n\times m)}{\boldsymbol{\Gamma}}\ \underset{(m\times1)}{\boldsymbol{\xi}} + \underset{(n\times1)}{\boldsymbol{\zeta}} \qquad (3.6.1)$$

dengan,

$\boldsymbol{\eta}$= matriks vektor random berukuran $(n\times1)$dari variabel-variabel laten

$\boldsymbol{\xi}$ = matriks vektor random berukuran $(m\times1)$dari variabel laten eksogen

B = matriks koefisien berukuran $(n\times n)$ untuk variabel laten endogen

$\mathbf{\Gamma}$ = matriks koefisien berukuran ($n \times m$) untuk variabel laten endogen

$\boldsymbol{\zeta}$ = matriks koefisien kesalahan variabel laten berukuran ($n \times 1$) dalam persamaan struktural.

$$\underset{(q\times 1)}{\mathbf{Y}} = \underset{(q\times n)}{\mathbf{\Lambda_y}}\ \underset{(n\times 1)}{\boldsymbol{\eta}} + \underset{(q\times 1)}{\boldsymbol{\varepsilon}} \tag{3.6.2}$$

dengan,

$\mathbf{Y}$ = matriks variabel indikator dari η berukuran ($q \times 1$)

$\mathbf{\Lambda_y}$ = matriks nilai loading pada variabel indikator Y berukuran ($q \times n$)

$\boldsymbol{\varepsilon}$ = matriks kesalahan pengukuran variabel indikator Y berukuran ($q \times 1$)

$\boldsymbol{\zeta}$ = matriks koefisien kesalahan variabel laten berukuran ($n \times 1$) dalam persamaan struktural.

$$\underset{(p\times 1)}{\mathbf{X}} = \underset{(p\times m)}{\mathbf{\Lambda_x}}\ \underset{(m\times 1)}{\boldsymbol{\xi}} + \underset{(p\times 1)}{\boldsymbol{\delta}} \tag{3.6.3}$$

dengan,

$\mathbf{X}$ = matriks variabel indikator dari ξ berukuran ($p \times 1$)

$\mathbf{\Lambda_x}$ = matriks nilai loading pada variabel indikator X berukuran ($p \times m$)

$\boldsymbol{\xi}$ = matriks vektor random berukuran ($m \times 1$) dari variabel laten eksogen

$\boldsymbol{\delta}$ = matriks kesalahan pengukuran variabel indikator X berukuran ($p \times 1$).

Serta asumsi sebagai berikut:

$$\begin{aligned} E(\zeta) = \mathbf{0}; &\quad Cov(\zeta) = \mathbf{\Psi} \\ E(\varepsilon) = \mathbf{0}; &\quad Cov(\varepsilon) = \mathbf{\Theta_\varepsilon} \\ E(\delta) = \mathbf{0}; &\quad Cov(\delta) = \mathbf{\Theta_\delta} \end{aligned} \tag{3.6.4}$$

$\zeta, \varepsilon,$ dan δ tidak saling berkorelasi; $Cov(\xi)$=$\mathbf{\Phi}$; ζ tidak saling berkorelasi dengan η; δ tidak berkorelasi dengan ξ; B mempunyai angka nol pada diagonal utama; dan $\mathbf{I}$ - $\mathbf{B}$ adalah nonsingular. Dari asumsi (3.6.4) dapat dikatakan bahwa $E(\xi) = \mathbf{0}$ dan $E(\eta) = \mathbf{0}$.

Persamaan (3.6.1) merupakan persamaan struktural dalan SEM, sedangkan persamaan (3.6.2) dan (3.6.3) merupakan persamaan pengukuran.

3.2.3 Prosedur Aplikasi Analisis Faktor Konfirmatori (CFA)

A. Perumusan Model

Setelah masalah penelitian berhasil dirumuskan, kemudian dengan basis kerangka teoritis tertentu, dan kajian hasil penelitian yang relevan dikemukakan kerangka pemikiran dan selanjutnya diajukan hipotesis penelitian. Hipotesis penelitian inilah sebagai model yang diusulkan untuk mengkonfirmasikan model faktor yang berhasil dirumuskan berdasarkan kajian teoritis tertentu dan kajian hasil-hasil penelitian yang relevan.

Berdasarkan uraian yang telah dijelaskan sebelumnya, bahwa EFA digunakan untuk menentukan struktur model faktor yang dibentuk dari sejumlah variabel yang diteliti. Dengan mengaplikasikan EFA maka struktur model faktor dapat diidentifikasi sebagai dasar dari prosedur CFA. CFA merupakan teknik statistika yang digunakan untuk mengkonfirmasi struktur model faktor dari sejumlah variabel yang diteliti. Berdasarkan penjelasan tersebut, maka perumusan model dari CFA akan diperoleh dengan mengaplikasikan hasil dari EFA.

B. Diagram Jalur dan Notasi Persamaan

Setelah perumusan model, maka langkah selanjutnya adalah menyatakan stuktur model faktor dalam bentuk diagram jalur dan mengkonversi diagram jalur ke dalam notasi persamaan.

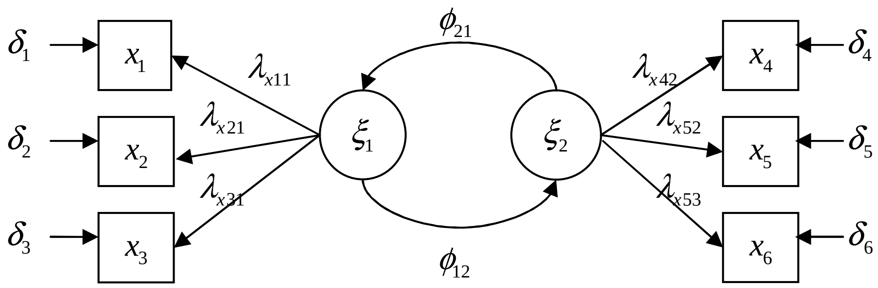
CFA mewakili model pengukuran dalam SEM, dan dalam batasan masalah pada bab I, telah dijelaskan bahwa model faktor yang akan digunakan pada penulisan ini adalah *first-order model factor*. Pada jenis model faktor tersebut, hanya terdapat satu macam variabel laten, maka tidak akan ada hubungan antara variabel laten penyebab (eksogen) dan variabel laten akibat (endogen). Dari penjelasan tersebut, maka konversi yang akan digunakan hanya untuk variabel laten eksogen saja, yang dinyatakan dengan rumus (3.6.3), atau :

$$\underset{(p\times1)}{\mathbf{X}} = \underset{(p\times m)}{\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{x}}} \ \underset{(m\times1)}{\boldsymbol{\xi}} + \underset{(p\times1)}{\boldsymbol{\delta}}$$

Persamaan tersebut bersesuaian dengan persamaan (3.1.2), dimana **L** pada persamaan (3.1.2) sama dengan $\mathbf{\Lambda}$ pada persamaan (3.6.3) begitu pula **F** pada persamaan (3.1.2) sama dengan $\boldsymbol{\xi}$ pada persamaan (3.6.3), juga $\boldsymbol{\varepsilon}$ pada persamaan (3.1.2) sama dengan $\boldsymbol{\delta}$ pada persamaan (3.6.3).

Contoh 1:

Diagram jalur *first-order* model faktor serta notasi persamaannya dapat dilihat pada gambar 3.1 yang terdapat pada halaman berikutnya.



Gambar 3.1 diagram jalur *first-order model factor*

$X_1 = \lambda_{x11}\xi_1 + \delta_1$ $\qquad$ $X_4 = \lambda_{x41}\xi_2 + \delta_4$

$X_2 = \lambda_{x21}\xi_1 + \delta_2$ $\qquad$ $X_5 = \lambda_{x52}\xi_2 + \delta_5$

$X_3 = \lambda_{x31}\xi_3 + \delta_3$ $\qquad$ $X_6 = \lambda_{x63}\xi_2 + \delta_6$

$\phi_{21} = \phi_{12} =$ korelasi antar variabel laten eksogen

Atau apabila ditulis dalam bentuk matriks adalah sebagai berikut:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \\ X_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{x11} & 0 \\ \lambda_{x21} & 0 \\ \lambda_{x31} & 0 \\ 0 & \lambda_{x42} \\ 0 & \lambda_{x52} \\ 0 & \lambda_{x62} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \\ \delta_5 \\ \delta_6 \end{bmatrix}$$

C. Memilih Data Input dan Penaksiran Model

SEM dalam format LISREL mengakomodasi baik matriks korelasi atau matriks kovariansi. Pada tugas akhir ini, matriks yang digunakan sebagai basis data adalah matriks kovariansi. Hipotesis dasar dari model persamaan struktural umum adalah matriks kovariansi populasi $\mathbf{\Sigma}$ sama dengan matriks kovariansi yang ditulis sebagai fungsi dari parameter bebas atau disimbolkan dengan $\hat{\mathbf{\Sigma}}$. $\mathbf{S}$

merupakan matriks kovariansi sampel dimana informasi statistiknya digunakan untuk menaksir parameter-parameter pada $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$. Atau dapat disimbolkan dengan:

$$\hat{\boldsymbol{\Sigma}} = \mathbf{S}.$$

Karena dalam tugas akhir ini model faktor yang digunakan merupakan *first-order model factor* atau dalam format LISREL merupakan *X-model*, maka untuk menentukan $\hat{\boldsymbol{\Sigma}}$ akan ditentukan kovariansi antar variabel X saja (variabel-variabel indikator). Matriks kovariansi sampel antar variabel X akan ditentukan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{\mathbf{xx}} &= \mathbf{E}\left(\mathbf{xx}^{\mathbf{t}}\right) \\
&= \mathbf{E}\left[\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\delta}\right)\left(\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\delta}^{\mathbf{t}}\right)\right] \\
&= \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{t}}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{t}}\right) \\
&= \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{t}}\right)\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\mathbf{E}\left(\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{t}}\right) + \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\xi}^{\mathbf{t}}\right)\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} + \mathbf{E}\left(\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{\delta}^{\mathbf{t}}\right)
\end{aligned}$$

Karena δ tidak berkorelasi dengan ξ dan $E\left(\xi\xi^t\right) = \boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \cdots & \phi_{1m} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \cdots & \phi_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_{1m} & \phi_{2m} & \cdots & \phi_{mm} \end{bmatrix}$ serta

$$E\left(\delta\delta^t\right) = \boldsymbol{\Theta}_\delta = \begin{bmatrix} \theta_{\delta_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \theta_{\delta_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \theta_{\delta_p} \end{bmatrix}$$

dengan , $\theta_{\delta_i} = 1 - R_i^2$ (3.6.5)

R_i^2 : koefisien determinasi yang didapat dengan mengkuadratkan nilai *loading* ke-*i* (bersesuaian dengan komunalitas pada analisis faktor eksploratori).

Maka, $\mathbf{S}_{\mathbf{xx}} = \boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Lambda}_{\mathbf{x}}^{\mathbf{t}} + \boldsymbol{\Theta}_{\mathbf{x}}$.

Matriks korelasi merupakan matriks kovariansi yang dibakukan, yaitu jika data diasumsikan mempunyai nilai rata-rata sama dengan nol dan simpangan baku sama dengan satu. Matriks korelasi yang diperoleh dari hasil pembakuan matriks kovarians, telah diuraikan pada persamaan (3.1.7). Koefisien variansi kesalahan pengukuran atau θ_δ bersesuaian dengan variansi unik (ψ) pada persamaan (3.1.8).

D. Identifikasi Model

Identifikasi model berhubungan dengan pertanyaan " Apakah model yang diusulkan mampu menghasilkan taksir parameter yang unik?" Unik disini artinya parameter yang terdapat dalam model dapat ditaksir dengan data sampel, hasil penaksiran dapat diuji dengan berbagai statistik uji yang ada, serta hasil penaksiran dapat dibandingkan dengan model lain yang dianggap relevan (Kusnendi, 2008).

Dilihat dari jumlah parameter yang akan ditaksir, suatu model dapat diidentifikasi berdasarkan derajat kebebasan suatu model. Dalam notasi matematis, derajat kebebasan untuk SEM dapat dirumuskan sebagai berikut:

$$df = \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)-t \qquad \text{(Johnson, 1992)}$$

p = jumlah variabel *manifest* penyebab variabel laten eksogen

q = jumlah variabel *manifest* penyebab variabel laten endogen (pada *first-order* model faktor statistik q dalah nol)

t = jumlah parameter yang akan ditaksir.

Dalam format LISREL untuk *X-model*, jumlah parameter yang akan ditaksir meliputi:

- Semua koefisien *loading* (λ)
- Semua koefisien kesalahan pengukuran (δ)
- Semua koefisien korelasi antar variabel eksogen (ϕ).

Berdasarkan derajat kebebasan, selanjutnya dapat dilakukan identifikasi model sebagai berikut (Hair et all, 1998):

- *df* = 0 model disebut *just-identified*.

Menurut Ferdinand dalam Kusnendi (2008), pada model *just-identified* semua parameter dalam model nilainya cenderung sama dengan statistik data sampel. Oleh karena itu model tidak dapat dibandingkan dengan model manapun yang dipandang relevan.

- *df* > 0 model disebut *over-identified*.

Pada model ini jumlah seluruh parameter yang terdapat dalam model lebih besar dari jumlah parameter yang ditaksir.

- *df* < 0 model disebut *under-identified*.

Pada model *under-identified*, parameter dalam terdapat dalam model tidak dapat ditaksir. Hal tersebut terjadi karena jumlah seluruh parameter yang terdapat dalam model lebih kecil dari jumlah parameter yang ditaksir. (Kusnendi, 2008)

Untuk tujuan CFA, maka diharapkan didapat model yang *over-identified* karena model tersebut memungkinkan untuk dievaluasi oleh berbagai statistik uji (Hair et all, 1998).

Contoh 2:

Akan ditentukan derajat kebebasan dari gambar 3.1

p = 6, q = 0, λ =6, δ =6, $\phi = 1$, maka t = 6 + 6 + 1 = 13

$$\begin{aligned} df &= \frac{1}{2}(p+q)(p+q+1)-t \\ &= \frac{1}{2}(6)(6+0+1)-13 \\ &= 8 > 0. \end{aligned}$$

Berdasarkan contoh diatas, model untuk gambar (3.1) merupakan model yang *over-identified*, maka penelitian dapat dilanjutkan dengan menguji model tersebut dengan berbagai statistik uji.

E. Pengujian Model

Pengujian model dilakukan untuk mengkonfirmasi struktur model faktor yang telah ditentukan. Dalam buku Kusnendi (2008) dijelaskan bahwa suatu variabel laten dikatakan tepat dan konsisten diukur oleh variabel-variabel indikator pembentuknya jika struktur model faktor memenuhi kriteria sebagai berikut:

- Model cocok (*fit*) dengan data;
- Setiap variabel indikator hanya mengukur sebuah variabel laten;
- Nilai *loading* yang dibakukan tidak kurang dari 0,50;
- Nilai reliabilitas variabel laten lebih besar dar 0,70.

1. Uji Kecocokan Seluruh Model (*Overall Model Fit*)

Penilaian pertama dari syarat model cocok, harus dilakukan untuk seluruh model. Dalam CFA uji kecocokan seluruh model dilakukan untuk menunjukkan apakah model yang diusulkan, mampu menghasilkan taksir matriks kovariansi atau matriks korelasi populasi yang berbeda atau tidak dengan matriks kovariansi atau mariks korelasi data sampel. Karena pada prosedur analisis faktor konfirmatori pada tugas akhir ini matriks yang digunakan adalah matriks kovariansi, maka hipotesis statistik uji kecocokan seluruh model dirumuskan sebagai berikut:

$H_0 : \mathbf{S} = \mathbf{\Sigma}$: Tidak ada perbedaan antara matriks kovariansi sampel dengan matriks kovariansi populasi.

$H_1 : \mathbf{S} \neq \mathbf{\Sigma}$: Terdapat perbedaan antara matriks kovariansi sampel dengan matriks kovariansi populasi.

Konsisten dengan penjelasan tersebut, maka hasil uji diharapkan dapat menerima H_0, dan dikatakan model cocok dengan data. Terdapat 3 jenis uji kecocokan seluruh model yang berguna dalam CFA, yaitu uji pengukuran absolut, parsimoni, dan komparatif (*incremental*).

1.1 Uji Pengukuran Absolut (AFM)

Uji ini menginformasikan kemampuan model untuk menaksir matriks kovariansi populasi berdasarkan matriks kovariansi sampel. Dalam format LISREL, terdapat beberapa jenis uji yang dipakai dalam AFM yaitu: statistik maksimum likelihood chi-kuadrat, RMSEA, the non centrality parameter (NCP) dan the scaled non centrality parameter (NCP), the root mean square error (RMSR), goodness of fit index (GFI), serta the cross-validation indeks. Dalam tugas akhir ini, uji yang akan dibahas adalah uji chi-kuadrat, *Root Mean Square of Error Approximation* (RMSEA), dan *Goodness of fit index* (GFI).

- Uji Chi-kuadrat (χ^2)

Rumus maksimum likelihood chi-kuadrat adalah sebagai berikut:

$$\chi^2 = (N-1)F_{ML}$$

dengan, $F_{ML} = tr(\mathbf{S\Sigma^{-1}}) - (p+q) + \ln|\mathbf{\Sigma}| - |\mathbf{S}|.$

Nilai aproksimasi chi-kuadrat diharapkan mampu menghasilkan p-*value* yang lebih besar dari 0,05 (Hair et all, 1998). Dari hasil tersebut, dapat dikatakan bahwa model cocok.

- *Root Mean Square of Error Approximation*

$$RMSEA = \sqrt{\frac{\chi^2/df - 1}{N-1}}\ .$$

Model dikatakan cocok jika nilai RMSEA < 0,08. RMSEA merupakan ukuran yang mencoba memperbaiki karakteristik sattistik χ^2 yang cenderung menolak model jika ukuran sampel relatif besar (Kusnendi, 2008). RMSEA perlu diapikasikan ketika nilai aproksimasi maksimum likelihood chi-kuadrat sangat besar dan menghasilkan p-*value* sangat kecil yang cenderung menolak hipotesis nol. Dengan kata lain, RMSEA digunakan untuk meningkatkan keakuratan hasil uji kecocokan seluruh model.

- *Goodness of fit index* (GFI)

$$GFI = 1 - \tfrac{1}{2}tr(\mathbf{S} - \mathbf{\Sigma}).$$

Model yang diusulkan dikatakan cocok jika besarnya nilai GFI $\geq$ 0,90.

- *Root Mean Square Residual* (RMSR)

  Rumus RMSR sama dengan yang telah dijelaskan pada (3.1.5) yaitu

$$RMSR = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=i}^{p} res^2_{ij}}{p(p+1)/2}} \; .$$

Dengan

res_{ij} = elemen-elemen matriks sisa selain elemen diagonal utama pada variabel ke-*i* dan variable ke-*j*

p = banyaknya variable indikator.

Semakin kecil nilai RMSR yang diperoleh maka semakin baik model faktor tersebut.

1.2 Uji Pengukuran Komparatif *(Incremental)*

Uji ini menginformasikan perbandingan antara model faktor yang diusulkan dengan model *null*. Terdapat beberapa jenis uji yang masuk ke dalam kategori ini. Tetapi uji yang akan dijelaskan dalam tugas akhir ini hanya *Comparatif Fit Index* (CFI), *normed fit index* (NFI) dan *Non Normed Fit Index* (NNFI). Model *null* merupakan model yang diprogram untuk menghasilkan model yang cocok (*fit*) sempurna.

- Uji *Comparatif Fit Index* CFI

$$CFI = 1 - \frac{\chi^2_{null} - df_{proposed}}{\chi^2_{null} - df_{null}}$$

Model yang diusulkan dikatakan lebih baik dari model *null*, jika besarnya nilai CFI ≥ 0,90.

- Uji *Normed FitIindex* (NFI)

$$NFI = \frac{\left(\chi^2_{null} - \chi^2_{proposed}\right)}{\chi^2_{null}}$$

Model yang diusulkan dikatakan lebih baik dari model *null*, jika besarnya nilai NFI ≥ 0,90.

- Uji *Non Normed Fit Index* (NNFI)

$$NNFI = \frac{\left(\chi^2_{null}/df_{null}\right) - \left(\chi^2_{proposed}/df_{proposed}\right)}{\left(\chi^2_{null}/df_{null}\right) - 1}$$

Model yang diusulkan dikatakan lebih baik dari model *null*, jika besarnya nilai NNFI ≥ 0,90.

1.3 Uji Pengukuran Parsimoni

Uji ini berhubungan dengan uji kecocokan terhadap jumlah koefisien yang ditaksir dari model yang diusulkan. Uji parsimoni menginformasikan bahwa model yang diusulkan lebih sederhana dibandingkan model lain. Beberapa uji parsimoni yang akan dijelaskan dalam tugas akhir ini adalahsebagai berikut:

- *Parsimonious Normed Fit Index* (PNFI)

$$PNFI = \frac{df_{proposed}}{df_{null}} \times NFI$$

- *Parsimonious goodness-of-Fit Index* (PGFI)

$$PGFI = \frac{df_{proposed}}{\frac{1}{2}(jumlah\ \mathrm{var}iabel\ manifest)(jumlah\ \mathrm{var}iabel\ manifest + 1)} \times GFI$$

PNFI dan PGFI berkisar antar 0 sampai 1. Semakin tinggi nilai PNFI dan PGFI, semakin cocok model tersebut. Artinya model yang diusulkan lebih sederhana dibandingkan dengan model lain.

2. Uji Kecocokan Model Pengukuran

Setelah Model keseluruhan diterima, setiap variabel indikator pembentuk variabel laten dapat dievaluasi secara terpisah dengan melakukan uji sebagai berikut:

a. Periksa *statistical significance* nilai *loading* dari setiap variabel indikator sebagai uji validitas dan reliabilitas variabel indikator.

   Salah satu *significance test* yang digunakan dalam CFA adalah dengan cara melihat koefisien *loading* yang dibakukan. Suatu variabel indikator akan bermakna jika besarnya koefisien *loading* yang telah dibakukan lebih besar dari 0,50 (Hair et all, 1998).

b. Menentukan Reliabilitas dan Validitas Variabel Laten

   Reliabilitas adalah ukuran konsistensi internal dari variabel indikator sebuah variabel laten yang menunjukkan derajat sampai dimana masing-masing indikator itu mengidentifikasi sebuah variabel bentukannya atau variabel laten. Ukuran reliabilitas variabel laten dapat dilakukan dengan menghitung koefisien *construct reliability* (CR). Berdasarkan buku yang ditulis Hair dkk (1998), suatu model faktor dikatakan *reliabel* jika koefisien CR $\geq$ 0,70. CR didefinisikan sebagai berikut:

$$CR = \frac{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^2}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^{m} \theta_{\delta_i}\right)} \quad . \qquad (3.6.6)$$

Sedangkan *variance* extracted (VE) didefinisikan sebagai berikut:

$$VE = \frac{\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i^2\right) + \left(\sum_{i=1}^{m} \theta_{\delta_i}\right)} \quad . \qquad (3.6.7)$$

VE merupakan ukuran untuk menentukan validitas variabel laten. Suatu variabel laten dikatakan valid jika nilai VE lebih besar dari nilai korelasi antar variabel laten (Hair et all, 2006). Persamaan (3.6.7) bersesuaian dengan proporsi pada analisis faktor eksploratori.

Jika uji kecocokan seluruh model dan uji model pengukuran semua memenuhi syarat dari model cocok, maka dapat disimpulkan bahwa struktur model faktor yang telah didapat konsisten dengan data aktual.