BAB III

KALMAN FILTER DISKRIT

3.1 Pendahuluan

Kalman Filter adalah rangkaian teknik perhitungan matematika (algoritma) yang memberikan perhitungan efisien dalam mengestimasi *state* proses, yaitu dengan cara meminimalkan rata-rata kuadrat galat (*Mean Squared Error/ MSE*). Kalman filter diskrit digunakan pada suatu sistem dengan waktu diskrit, artinya jarak antar waktu adalah sama (konstan).

Filter sangat berguna dalam beberapa aspek yaitu dapat menaksir *state* masa lalu, masa kini, maupun masa depan. Pada Kalman Filter, Filter diasumsikan sebagai suatu alat yang bagus untuk memisahkan sinyal dari sinyal lain yang tidak dikehendaki. Pada faktanya, hasil pengukuran tidak akurat atau mengandung sinyal yang tidak dikehendaki (*noise*), sehingga dengan menggunakan filter terhadapnya, maka hasil pengukuran akan mendekati hasil sebenarnya.

Indeks waktu (t) pada model *state space* diganti dengan notasi k pada Kalman filter diskrit. Sehingga sistem dinamis linier pada kalman filter diskrit menjadi:

- Persamaan *state*

(3.1)

- Persamaan Observasi/ pengukuran/ *Measurement*

(3.2)

k = 0, 1, 2, . . ., N

3.2 Penaksiran Rekursif

Misalkan adalah observasi yang berhubungan dengan *state* dengan persamaan:

Misalkan adalah taksiran dari dengan k observasi, yang diperoleh dari persamaan berikut:

Beberapa sifat penaksir diantaranya:

- Penaksir merupakan penaksir tak bias jika:
- Penaksir juga merupakan penaksir dengan varians minimum dimana minimum.

Jika diberikan tambahan observasi , sehingga nilai taksiran barunya menjadi:

(3.4)

dan adalah keofisien pembobotan, dimana

Misalkan:

: waktu sebelum observasi

: waktu setelah observasi

: taksiran sebelum observasi

: taksiran setelah observasi

Pada system dinamis, perubahan *state* antara waktu ke-(-1) dan adalah sama, dengan kata lain .

Sehingga persamaan (3.4) pada waktu ke-k, adalah:

(3.5)

3.3 Konsep Dasar Kalman Filter Diskrit

Definisi:

: nilai taksiran *state* prior pada saat k

: nilai taksiran *state* posterior pada saat k

Sedangkan residu untuk taksiran *state* prior dan posteriornya adalah sebagai berikut:

(3.6)

Dan kovarian residu prior dan posteriornya adalah:

(3.7)

Dalam memperoleh persamaan kalman filter, dimulai dengan tujuan menemukan persamaan yang menghitung taksiran *state* posterior sebagai kombinasi linier taksiran prior dan selisih terbobot (*weighted*) antara pengukuran aktual dan pengukuran prediksi . Langkah-langkah tersebut adalah kurangkan dengan persamaan (3.5), sehingga diperoleh:

(3.8)

Kemudian subtitusikan persamaan pengukuran (3.2) pada persamaan (3.8),

(3.9)

Selanjutnya, subtitusikan persamaan (3.6) pada persamaan (3.9), diperoleh:

(3.10)

Setelah itu, ambil ekspektasi dari persamaan (3.10),

Jika merupakan penaksir tak bias, maka

dan

Sehingga hasil dari ekspektasi persamaan (3.10) adalah:

(3.11)

Kemudian subtitusikan persamaan (3.11) pada persamaan (3.5) sehingga diperoleh persamaan filter sebagai berikut:

(3.12)

Selisih pada persamaan di atas disebut sebagai *innovation* pengukuran, atau *residual* yang menggambarkan ketidakcocokan antara pengukuran prediksi dengan pengukuran aktual . Jika residualnya sama dengan nol berarti antar keduanya terdapat kecocokan yang sempurna. Sedangkan matrik **K** yang berukuran n x m dipilih menjadi *gain* atau *blending factor* yang meminimumkan kovarian residu posterior (3.7).

Meminimumkan residu tersebut dimulai dengan mensubtitusikan persamaan (3.11) pada persamaan (3.10),

Sehingga nilai kovarian residunya adalah:

Kemudian ambil ekspektasi dari , diperoleh sebagai berikut:

Karena dan , sehingga:

(3.13)

Perhatikan bahwa persamaan kedua dan ketiga adalah linear terhadap dan persamaan keempat adalah kuadratik dalam . Sedangkan nilai dihitung menggunakan kriteria varians minimum, dimana elemen diagonal dari matrik merupakan varians dari , yaitu merupakan jumlah MSE dalam estimasi dari semua elemen dari vektor *state*.

Sehingga MSE dapat diperoleh sebagai berikut:

dimana adalah jumlah elemen diagonal dari matrik . Jadi dapat diperoleh dari solusi:

Jika merupakan bentuk kuadratik, dimana:

Dimulai dengan mendiferensialkan terhadap , dan perhatikan bahwa jumlah diagonal untuk adalah sama dengan jumlah diagonal transposnya yaitu . Hasilnya adalah

sehingga diperoleh

disebut *Gain* **K** (*Kalman Gain*), yaitu yang meminimumkan MSE.

- Jika varians residu pengukuran **R** mendekati nol, maka *gain* **K** lebih memboboti residual, atau

- Sedangkan jika kovarian error prior mendekati nol, maka *gain* **K** kurang memboboti residual, atau

Untuk memperoleh , substitusikan persamaan (3.14) pada persamaan (3.13), diperoleh matriks kovarian sebagai berikut:

(3.15)

Persamaan (3.15) hanya valid dalam kondisi *gain* optimal (Brown dan Hwang).

Langkah selanjutnya dalam menentukan kondisi awal yaitu dengan mengambil ekspektasi persamaan (3.1),

karena sehingga

(3.16)

Sedangkan untuk mencari kovariannya, diperoleh dengan cara mengurangkan pada persamaan (3.16),

sehingga

kemudian ambil ekspektasi dari diperoleh sebagai berikut:

karena residu, , tidak berkorelasi dengan *noise*, , maka

(3.17)

3.4 Algoritma Kalman Filter Diskrit

Kalman filter menaksir proses dengan menggunakan bentuk kontrol umpan balik (*feedback control*), yaitu filter menaksir *state* proses pada suatu waktu dan kemudian menghasilkan umpan balik dalam bentuk (*noise*) pengukuran. Sehingga, persamaan untuk Kalman Filter terbagi menjadi dua kelompok, yaitu persamaan *time update* dan persamaan *measurement update*.

Persamaan *time update* berguna untuk memproyeksikan ke depan (dalam waktu) *state* saat ini dan kovarians residu taksiran untuk menghasilkan prior taksiran pada tahap selanjutnya. Sedangkan persamaan *measurement update* berguna sebagai umpan balik, yaitu untuk menggabungkan pengukuran baru kepada prior taksiran untuk menghasilkan peningkatan posterior taksiran.

Persamaan *time update* disebut juga sebagai persamaan *predictor*, sedangkan persamaan *measurement* disebut juga sebagai persamaan *corrector*. Sehingga algoritma Kalman Filter juga disebut juga algoritma *predictor-corrector* yang ditunjukkan pada gambar di bawah ini

Measurement update ("Correct")

- Menghitung Kalman gain
- Taksiran *state* posterior
- Kovarian residu *state* posterior

Time Update ("Predict")

- Taksiran *state* prior
- Kovarian *state* prior

Taksiran awal,

<u>Gambar 3.1</u>

Algoritma Kalman Filter Diskrit

Setelah masing-masing waktu dan *measurement update* sesuai, proses tersebut diulang dengan posterior taksiran sebelumnya digunakan untuk memproyeksikan atau memprediksi prior taksiran yang baru.

3.5 Penaksiran Parameter dengan Metode Maksimum *Likelihood*

Pada persamaan (3.12), peluang taksiran prior diperoleh dari semua prior pengukuran yang mengikuti aturan bayes. Sehingga kalman filter terdiri dari momen pertama dan kedua dari distribusi *state*, atau

Apabila *state* awal dan inovasi adalah *Gaussian* (distribusi normal), maka peluang bersyarat yang diberikan informasi adalah berdistribusi *Gaussian* dengan rata-rata pada persamaan (3.12) dan varians diberikan pada persamaan (3.15). Dengan kata lain:

dimana rata-ratanya yaitu dan variansnya yaitu sehingga diperoleh fungsi *likelihood* adalah sebagai berikut:

selanjutnya untuk mempermudah diambil bentuk log dari fungsi di atas, menjadi:

dimana nilai , , dan dihitung melalui proses persamaan (3.16), (3.17), dan (3.14) berturut-turut. Kemudian untuk mencari taksiran parameternya, yaitu diperoleh dengan cara mengambil turunan fungsi *Likelihood* di atas terhadap masing-masing parameter yang kemudian hasilnya disamadenganakan dengan nol. yaitu:

Untuk selanjutnya hasil dan dapat diperoleh dengan menggunakan *software* Eviews 5.

3.6 Langkah-langkah Penaksiran Variabel *State* dengan Kalman Filter Diskrit

Langkah-langkahnya adalah sebagai berikut:

- Menentukan nilai *state* awal, kemudian dihitung nilai matrik kovarian awalnya, dimana
- Menghitung nilai taksiran *state* prior
- Menghitung kovarian residu *state* prior
- Menghitung Kalman Gain
- Menghitung taksiran *state* posterior
- Menghitung kovarian residu *state* posterior

Perhitungan berhenti sedemikian sehingga nilai dari Dimana 0.0001 merupakan nilai toleransi untuk error yang minimum (Eviews 5.0).

3.7 Peramalan

Diberikan estimasi dari **H**, **A**, **Q**, dan **R,** nilai ramalan untuk dihitung berdasarkan ekspektasi bersyarat dari . Dalam peramalan, parameter-parameter tersebut diganti dengan nilai estimasi yang telah diuji signifikansinya (biasanya dengan uji t).

Peramalan satu langkah kedepan (*one-step ahead forecast*) diberikan untuk variabel *state* dengan diberikan ={ dimana . Peramalan satu langkah kedepan disebut juga dengan *Filtering* yang berguna menghilangkan *measurement error* (kesalahan pengukuran) dari data. Sedangkan untuk variabel *state* serta observasi dengan , peramalan *s* langkah kedepan (*s-step ahead forecast*) diberikan untuk $s = k - n$.