

BAB III

ALGORITAMA *SDO*, *LDO*, DAN KOMBINASI KEDUANYA (*SDO-LDO*)

Pada bab ini, akan dibahas tentang algoritma *SDO*, *LDO*, dan kombinasi keduanya (*SDO-LDO*). Pada setiap pembahasan algoritma, disertai dengan contoh kasus sederhana pada graf sederhana yang merupakan graf planar yang memiliki siklus, yaitu untuk menentukan bilangan kromatik pada graf berorder delapan.

3.1 ALGORITMA *SDO*

Algoritma ini berprinsipkan pada jumlah warna yang berlainan yang ada pada tetangga-tetangga dari sebuah titik. Pada setiap langkah algoritma ini, harus dihitung derajat saturasi (*degree of saturation*) setiap titik yang belum diwarnai. Titik yang mempunyai derajat saturasi adalah titik yang belum diwarnai. Derajat saturasi titik x , di tulis $\text{deg}_s(x)$, menyatakan banyaknya warna berbeda dari tetangga-tetangga titik x .

Penjelasan di atas telah memberikan gambaran umum tentang proses pewarnaan titik pada graf menggunakan algoritma *SDO*. Adapun langkah-langkah yang lebih rinci tentang algoritma *SDO* adalah sebagai berikut.

Diketahui graf $G = (V, E)$ dengan $|v| = n$. Misalkan terdapat

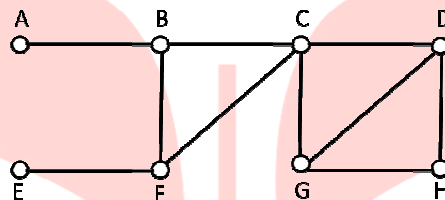
$$S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \text{ dan } T = \{\}$$

1. Pilih sembarang titik di S , sebut u , warnai dengan W_1 .
2. Mutakhirkan himpunan S dan T , $S = S - u$ dan $T = T \cup \{u\}$.
3. Hitung $\text{deg}_s(x)$, $\forall x \in S$ terbaru.

4. Pilih titik dengan $\deg_s(x)$ terbesar, sebut v . Periksa apakah v bertetangga dengan u .
 - a. Jika bertetangga, ambil W_2 , warnai titik v dengan W_2 .
 - b. Jika tidak bertetangga, ambil lagi W_1 , warnai titik v dengan W_1 .
5. Mutakhirkan lagi himpunan S dan T , $S = S - v$ dan $T = T \cup \{v\}$.
6. Ulangi langkah 3 sampai $S = \{\}$.

Untuk memperjelas algoritma di atas, diberikan contoh berikut.

Contoh 3.1 Misalkan terdapat graf sederhana X seperti berikut.



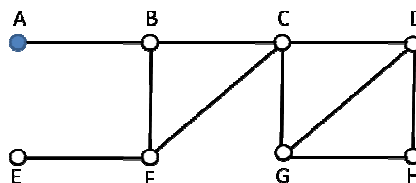
Gambar 3.1 Graf X berorder 8

Graf X berorder 8 pada gambar 3.1 merupakan salah satu contoh graf sederhana, dan juga merupakan salah satu contoh graf planar.

Akan ditentukan bilangan kromatik dari graf X menggunakan algoritma SDO .

Diketahui $S(X) = \{A, B, C, D, E, F, G, H\}$ dan $T(X) = \{\}$

1. Pilih sembarang titik pada graf, misalkan A , warnai A dengan warna 1, biru.



Gambar 3.2 Mewarnai titik A dengan warna 1

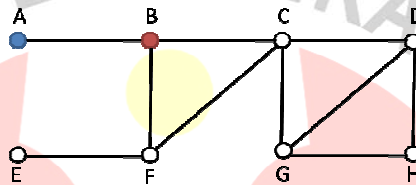
2. $S = S - A$ dan $T = T \cup \{A\}$

3. Hitung derajat saturasi semua titik di S baru.

$$\deg_s(B) = 1$$

$$\deg_s(C) = \deg_s(D) = \deg_s(E) = \deg_s(F) = \deg_s(G) = \deg_s(H) = 0$$

4. Pilih titik B (mempunyai derajat saturasi paling besar di S baru) untuk diwarnai dengan warna 2 (merah), karena B bertetangga dengan A.



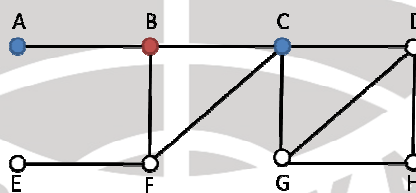
Gambar 3.3 Mewarnai titik B dengan warna 2

5. $S = S - B$ dan $T = T \cup \{B\} = \{A\} \cup \{B\} = \{A, B\}$

6. Hitung derajat saturasi semua titik di S .

$$\deg_s(C) = \deg_s(F) = 1, \deg_s(E) = \deg_s(D) = \deg_s(G) = \deg_s(H) = 0$$

7. Pilih titik C untuk diwarnai dengan warna 1.



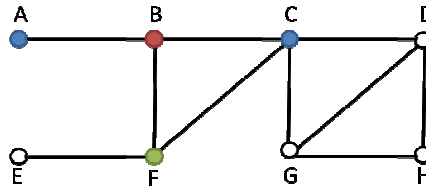
Gambar 3.4 Mewarnai titik C dengan warna 1

8. $S = S - C$ dan $T = T \cup \{C\} = \{A, B\} \cup \{C\} = \{A, B, C\}$

9. Hitung derajat saturasi semua titik di S .

$$\deg_s(F) = 2, \deg_s(D) = \deg_s(G) = 1, \deg_s(E) = \deg_s(H) = 0$$

10. Pilih titik F untuk diwarnai dengan warna 3, hijau.



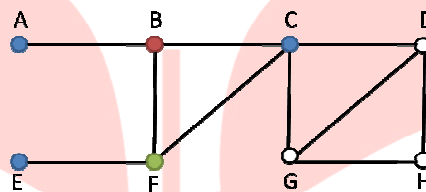
Gambar 3.5 Mewarnai titik F dengan warna 3

11. $S = S - F$ dan $T = T \cup \{F\} = \{A, B, C\} \cup \{F\} = \{A, B, C, F\}$

12. Hitung derajat saturasi semua titik di S .

$$\deg_s(D) = \deg_s(E) = \deg_s(G) = 1, \deg_s(H) = 0$$

13. Pilih titik E untuk diwarnai dengan warna 1.



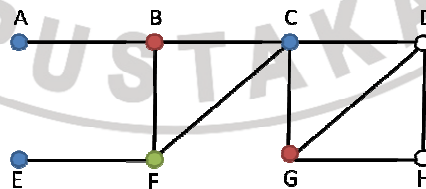
Gambar 3.6 Mewarnai titik E dengan warna 1

14. $S = S - E$ dan $T = T \cup \{E\} = \{A, B, C, F\} \cup \{E\} = \{A, B, C, F, E\}$

15. Hitung derajat saturasi semua titik di S .

$$\deg_s(D) = \deg_s(G) = 1, \deg_s(H) = 0$$

16. Pilih titik G untuk diwarnai dengan warna 2.



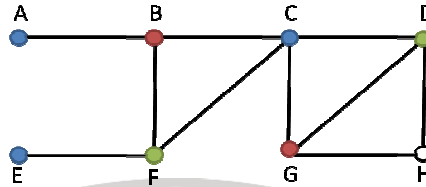
Gambar 3.7 mewarnai titik G dengan warna 2

17. $S = S - G$ dan $T = T \cup \{G\} = \{A, B, C, F, E\} \cup \{G\} = \{A, B, C, F, E, G\}$

18. Hitung derajat saturasi semua titik di S .

$$\deg_s(D) = 2, \deg_s(G) = 1$$

19. Pilih titik D untuk diwarnai dengan warna 3.



Gambar 3.8 Mewarnai titik G dengan warna 3

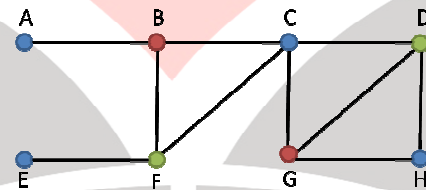
20. $S = S - D$ dan

$$T = T \cup \{D\} = \{A, B, C, F, E, G\} \cup \{D\} = \{A, B, C, F, E, G, D\}$$

21. Hitung derajat saturasi semua titik di S .

$$\deg_s(H) = 2$$

22. Pilih titik H untuk diwarnai dengan warna 1.



Gambar 3.9 Mewarnai titik H dengan warna 1

Dari pewarnaan graf X dengan menggunakan algoritma SDO , diperoleh jumlah warna yang berbeda adalah 3, maka bilangan kromatnya adalah 3, $X(G) = 3$ (Gambar 3.9). Hasil ini juga memberikan penjelasan berikut, bahwa subgraf dari graf X berupa siklus berorder ganjil $B-C-F-B$, $C-D-G-C$, dan $D-G-H-D$, ketiganya memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.2 (i)). Subgraf dari X yang merupakan graf lengkap $B-C-F$, $C-D-G$, dan $D-G-H$ memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.1). Selain itu, subgraf berupa siklus $B-C-F-B$ dan siklus $C-D-G-C$ yang bersinggungan di titik C sehingga

membentuk sebuah subgraf baru berorder 5 (B, C, D, F, G) dari X memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.5).

3.2 ALGORITMA LDO

Algoritma ini merupakan algoritma yang prinsipnya berdasarkan pada nilai derajat dari setiap titik. Titik yang memiliki derajat yang lebih tinggi diwarani terlebih dahulu.

Pada penjelasan di atas telah diberikan gambaran umum tentang proses pewarnaan titik pada graf untuk mendapatkan minimum titik. Adapun langkah-langkah yang lebih rinci tentang algoritma LDO adalah sebagai berikut:

1. Urutkan titik-titik dari graf berdasar derajatnya dari yang tertinggi ke yang terendah.
2. Warnai titik berderajat tertinggi dengan warna 1, sebut W_1 . Gunakan W_1 ini untuk mewarnai semua titik lainnya yang mungkin sesuai dengan urutan derajatnya sehingga tidak ada dua titik bertetangga yang mempunyai warna yang sama. Jika semua simpul sudah diberi warna, langkah selesai. Jika tidak ambil warna 2, sebut W_2 .
3. Warnai titik berderajat tertinggi yang belum diberi warna dengan W_2 . Gunakan warna kedua ini untuk mewarnai titik lain yang mungkin dan belum diberi warna sesuai dengan urutan derajatnya dengan syarat dua titik bertetangga tidak boleh berwarna sama. Jika semua titik sudah diberi warna, langkah selesai. Jika tidak, ambil warna 3. Demikian seterusnya sampai semua simpul diberi warna.

Untuk memperjelas algoritma di atas, diberikan contoh berikut.

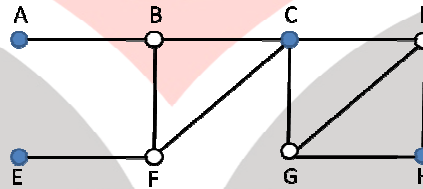
Contoh 3.2 Perhatikan kembali gambar 3.1. Akan ditentukan bilangan kromatiknya menggunakan algoritma *LDO*.

1. Urutkan titik-titik dari graf berdasar derajatnya dari yang tertinggi ke yang terendah.

$$d(C) = 4, d(B) = d(D) = d(F) = d(G) = 3, d(H) = 2,$$

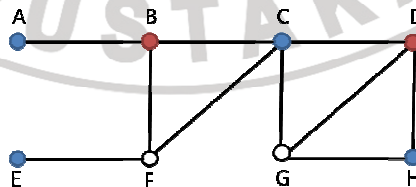
$$d(A) = d(H) = 1.$$

2. Warnai titik berderajat paling besar C dengan warna 1, misalnya biru. Dan beri juga warna 1 pada titik-titik yang tak bertetangga dengan C sedemikian sehingga tidak terdapat 2 titik yang berwarna sama yang bertetangga.



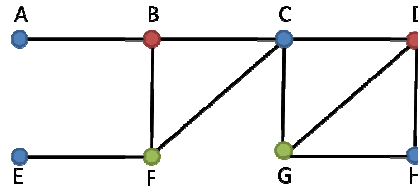
Gambar 3.10 Mewarnai A, C, E, dan H dengan warna 1

3. Warnai titik lainnya berdasarkan urutan derajat titik dari besar ke kecil pada titik yang belum diberi warna.



Gambar 3.11 Mewarnai titik B dan D dengan warna 2

4. Ulangi langkah 3.



Gambar 3.12 Mewarnai titik F dan G dengan warna 3

Karena semua titik telah diwarnai, maka proses selesai.

Dari pewarnaan graf X dengan menggunakan algoritma LDO , diperoleh jumlah warna yang berbeda adalah 3, maka bilangan kromatinya adalah 3, $X(G) = 3$ (Gambar 3.12). Hasil ini juga memberikan penjelasan berikut, bahwa subgraf dari graf X berupa siklus berorder ganjil $B-C-F-B$, $C-D-G-C$, dan $D-G-H-D$, ketiganya memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.2 (i)). Subgraf dari X yang merupakan graf lengkap $B-C-F$, $C-D-G$, dan $D-G-H$ memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.1). Selain itu, subgraf berupa siklus $B-C-F-B$ dan siklus $C-D-G-C$ yang bersinggungan di titik C sehingga membentuk sebuah subgraf baru berorder 5 (B, C, D, F, G) dari X memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.5).

Untuk memperjelas langkah kerja algoritma LDO , hasil pewarnaan dengan algoritma LDO disajikan dalam tabel berikut.

Tabel 3.1 Pewarnaan graf berorder 8

Urutan titik berdasarkan derajat titik	C	B	D	F	G	H	A	E
Warna	1	2	2	3	3	1	1	1

3.3 ALGORITMA $SDO-LDO$

Pada kombinasi algoritma *SDO-LDO* ini, awalnya algoritma ini bekerja menggunakan prinsip algoritma *SDO*, tetapi ketika kita mendapatkan dua titik yang memiliki derajat yang sama, maka kita gunakan algoritma *LDO* untuk menentukan titik mana yang harus diwarnai berikutnya.

Pada penjelasan di atas telah diberikan gambaran umum tentang proses pewarnaan titik pada graf untuk mendapatkan minimum titik menggunakan kombinasi algoritma *SDO-LDO*. Adapun langkah-langkah yang lebih rinci tentang kombinasi algoritma *SDO-LDO* adalah sebagai berikut.

Misalkan terdapat $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ dan $T = \{ \}$

1. Pilih sembarang titik di S , sebut u , warnai dengan W_1 .
2. Mutakhirkan S dan T , $S = S - u$ dan $T = \{u\}$.
3. Hitung $deg_s(x), \forall x \in S$ terbaru.
4. Pilih titik dengan $deg_s(x)$ terbesar, sebut v . Jika titik terbesar lebih dari satu, maka pilih derajat titik yang paling besar di antar titik tersebut. Periksa apakah v bertetangga dengan u .
 - a. Jika bertetangga, ambil W_2 , warnai titik v dengan W_2 .
 - b. Jika tidak bertetangga, ambil W_1 , warnai titik v dengan W_1 .
5. $S = S - v$ dan $T = T \cup \{v\}$.
6. Ulangi langkah 3 sampai $S = \{ \}$.

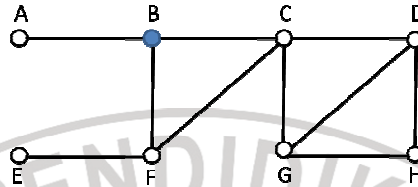
Untuk memperjelas algoritma di atas, diberikan contoh berikut.

Contoh 3.3 Perhatikan kembali Gambar 3.1. Tentukan bilangan kromatiknya menggunakan kombinasi algoritma *SDO-LDO*.

1. Definisikan himpunan titik pada graf X .

$$S(X) = \{A, B, C, D, E, F, G, H\} \text{ dan } T(X) = \{\}$$

- Pilih sembarang titik di X untuk diwarnai, misalnya titik B. Warnai titik B dengan warna 1, misalkan warna biru.



Gambar 3.13 Mewarnai sembarang titik di awal pewarnaan

- $S = \{A, C, D, E, F, G, H\}$ dan $T = \{B\}$.
- Hitung $deg_s(x), \forall x \in S$.

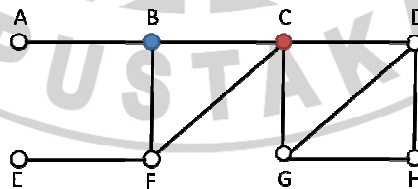
$$deg_s(A) = deg_s(C) = deg_s(F) = 1,$$

$$deg_s(E) = deg_s(D) = deg_s(G) = deg_s(H) = 0$$

Karena terdapat 3 titik yang mempunyai $deg_s(x) = 1$, maka gunakan kriteria LDO untuk memilih titik mana yang akan diwarnai terlebih dahulu.

$$d(A) = 1, d(C) = 4, d(F) = 3.$$

- Warnai titik yang memiliki derajat titik terbesar yaitu C dengan warna 2, misalnya merah.



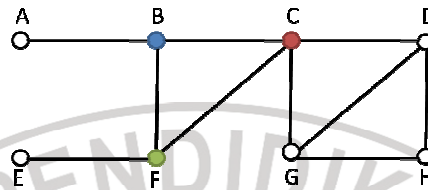
Gambar 3.14 Mewarnai titik C dengan warna 2

- $S = \{A, D, E, F, G, H\}$ dan $T = \{B, C\}$.

7. Hitung $deg_s(x), \forall x \in S$.

$$deg_s(F) = 2, deg_s(A) = deg_s(D) = deg_s(G) = 1, deg_s(E) = deg_s(H) = 0$$

8. Warnai titik F dengan warna 3, misalnya hijau.



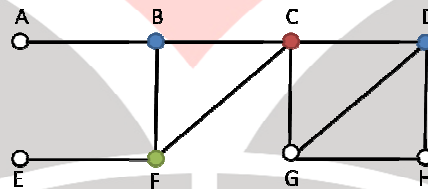
Gambar 3.15 Mewarnai titik C dengan warna 3

9. $S = \{A, D, E, G, H\}$ dan $T = \{B, C, F\}$.

10. Hitung $deg_s(x), \forall x \in S$.

$$deg_s(A) = deg_s(D) = deg_s(E) = deg_s(G) = 1, deg_s(H) = 0$$

11. Warnai titik D dengan warna 1.



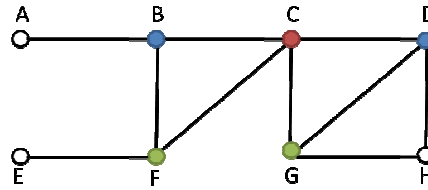
Gambar 3.16 Mewarnai titik D dengan warna 1

12. $T = \{A, E, G, H\}$ dan $T = \{B, C, F, D\}$.

13. Hitung $deg_s(x), \forall x \in S$.

$$deg_s(G) = 2, deg_s(A) = deg_s(E) = deg_s(H) = 1$$

15. Warnai titik G dengan warna 3.



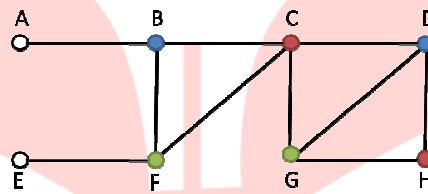
Gambar 3.17 Mewarnai titik G dengan warna 3

16. $S = \{A, E, H\}$ dan $T = \{B, C, F, D, G\}$.

17. Hitung $deg_s(x), \forall x \in S$.

$$deg_s(H) = 2, deg_s(A) = deg_s(E) = 1$$

18. Warnai titik H dengan warna 2.



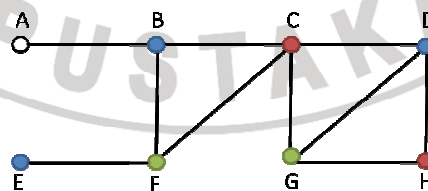
Gambar 3.18 Mewarnai titik H dengan warna 2

19. $S = \{A, E\}$ dan $T = \{B, C, F, D, G, H\}$.

20. Hitung $deg_s(x), \forall x \in S$.

$$deg_s(A) = deg_s(E) = 1$$

21. Warnai titik E dengan warna 1.



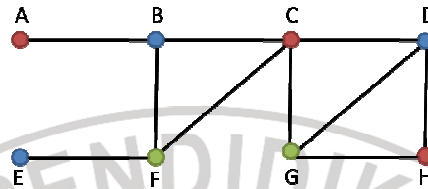
Gambar 3.19 Merawnai titik E dengan warna 1

22. $S = \{A\}$ dan $T = \{B, C, F, D, G, H, E\}$.

23. Hitung $deg_s(x), \forall x \in S$.

$$deg_s(A) = 1$$

24. Warnai titik A dengan warna 2.



Gambar 3.20 Mewarnai titik A dengan warna 2

Dari pewarnaan graf X dengan menggunakan algoritma SDO , diperoleh jumlah warna yang berbeda adalah 3, maka bilangan kromatiknya adalah 3, $X(G) = 3$ (Gambar 3.20). Hasil ini juga memberikan penjelasan berikut, bahwa subgraf dari graf X berupa siklus berorder ganjil $B-C-F-B$, $C-D-G-C$, dan $D-G-H-D$, ketiganya memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.2 (i)). Subgraf dari X yang merupakan graf lengkap $B-C-F$, $C-D-G$, dan $D-G-H$ memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.1). Selain itu, subgraf berupa siklus $B-C-F-B$ dan siklus $C-D-G-C$ yang bersinggungan di titik C sehingga membentuk sebuah subgraf baru berorder 5 (B, C, D, F, G) dari X memiliki bilangan kromatik 3 (sesuai dengan teorema 2.5).