BAB III

PEMBAHASAN

Pada bab ini akan dibahas konsep mengenai aksi grup pada suatu ring unit regular. Namun sebelum membahas konsep tersebut, akan diperkenalkan terlebih dahulu ring unit regular dan beberapa sifatnya.

A. Ring Unit Regular

Suatu ring R adalah regular jika untuk setiap $x \in R$, terdapat $y \in R$ sedemikian sehingga $xyx = x$. Pada ring $\mathbb{Z}$, elemen regularnya hanya $0, 1,$ dan -1. Dengan demikian, $\mathbb{Z}$ bukan ring regular.

Contoh 3.1 (Malik *et al*. 1997: 285)

Misalkan $M_2(\mathbb{R})$ adalah himpunan semua matriks berordo 2×2 atas bilangan riil $\mathbb{R}$. $M_2(\mathbb{R})$ dengan operasi penjumlahan dan perkalian matriks biasa merupakan ring tak komutatif dengan elemen kesatuan. Akan ditunjukkan $M_2(\mathbb{R})$ dengan kedua operasi tersebut adalah ring regular, yaitu $\forall A \in M_2(\mathbb{R}), \exists B \in M_2(\mathbb{R})$ sedemikian sehingga $A = ABA$. Misalkan $A = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

Kasus 1: $xw - zy \neq 0$. Maka $B = \begin{pmatrix} \dfrac{w}{xw-zy} & \dfrac{-y}{xw-zy} \\ \dfrac{-z}{xw-zy} & \dfrac{x}{xw-zy} \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ dan $A = ABA$.

Kasus 2: $xw - zy = 0$.

Subkasus 2a: $x, y, z,$ dan w semuanya nol. Dalam kasus ini, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sehingga untuk sebarang $B \in M_2(\mathbb{R})$, $ABA = A$.

Subkasus 2b: $x, y, z,$ dan w tidak semua nol. Misalkan $x \neq 0$ dan misalkan $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Maka

$$ABA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{z}{x} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \\ z & \frac{zy}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

karena $xw - zy = 0$ dan $x \neq 0$ sehingga mengakibatkan $w = \frac{zy}{x}$. Jika $y \neq 0$, maka misalkan $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix}$. Maka

$$ABA = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{1}{y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{w}{y} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x & y \\ \frac{wx}{y} & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix},$$

karena $xw - zy = 0$ dan $y \neq 0$ sehingga $zy = xw$ atau $z = \frac{wx}{y}$.

Dengan cara yang serupa, jika $z \neq 0$ atau $w \neq 0$, maka terdapat matriks B sedemikian sehingga $ABA = A$. Dengan demikian, $M_2(\mathbb{R})$ adalah ring regular.

Definisi 3.2: Ring Regular Abelian (Goodearl, 1991: 25)

Suatu ring regular R adalah abelian jika dan hanya jika setiap idempoten di R adalah central.

Sebagaimana dikemukakan oleh Goodearl (1976: 62) bahwa setiap ring regular komutatif merupakan ring regular abelian, tetapi ring regular abelian tidak harus komutatif. Sebagai contoh, sebarang ring pembagian adalah ring regular abelian.

Pada sub-bab ini akan membahas suatu ring R dengan elemen kesatuan yang memenuhi kondisi bahwa untuk setiap $x \in R$, terdapat unit $u \in R$ sedemikian sehingga $xux = x$.

Definisi 3.3: Ring Unit Regular (Ehrlich, 1968: 209)

Suatu ring R dengan elemen kesatuan adalah unit regular jika untuk setiap $x \in R$, terdapat suatu unit $u \in R$ sedemikian sehingga $x = xux$.

Selain itu, setiap elemen pada ring unit regular R dapat dinyatakan sebagai perkalian antara elemen unit dengan elemen idempoten di R. Pernyataan tersebut dijamin oleh Teorema 3.5. Namun, sebelum membuktikan pernyataan tersebut, diperlukan lemma berikut.

Lemma 3.4

Jika x adalah suatu elemen pada ring R dengan elemen kesatuan, maka pernyataan-pernyataan berikut adalah ekuivalen.

(i) Terdapat suatu unit $u \in R$ sedemikian sehingga $xux = x$.

(ii) Terdapat suatu unit $u \in R$ sedemikian sehingga xu dan ux adalah idempoten.

(iii) Terdapat suatu unit $u \in R$ sedemikian sehingga xu atau ux adalah idempoten.

(iv) Terdapat unit-unit p dan q di R sedemikian sehingga pxq adalah idempoten.

Bukti:

$(\text{i}) \Rightarrow (\text{ii})$ Jika (i) berlaku, maka $(xu)^2 = (xux)u = xu$ dan $(ux)^2 = u(xux) = ux$, jadi (ii) berlaku.

$(\text{ii}) \Rightarrow (\text{iii})$ Secara langsung (ii) mengakibatkan (iii).

$(\text{iii}) \Rightarrow (\text{iv})$ Misal $u = qp$ untuk suatu unit-unit $p, q \in R$. Dengan demikian $x = xux = xqpx$. Karena $(pxq)^2 = p(xqpx)q = pxq$, maka pxq adalah idempoten.

$(\text{iv}) \Rightarrow (\text{i})$ Jika (iv) berlaku, maka $(pxq)(pxq) = pxq$. Sehingga $p^{-1}p(xqpx)qq^{-1} = p^{-1}pxqq^{-1}$. Dengan demikian diperoleh $x(qp)x = x$. Jadi, terdapat suatu unit $u = qp \in R$ sedemikian sehingga $xux = x$. ■

Tidak setiap ring regular dengan elemen kesatuan merupakan ring unit regular. Lemma 3.4 di atas digunakan untuk memperoleh syarat perlu agar suatu ring regular menjadi ring unit regular.

Teorema 3.5

Misalkan R suatu ring dengan elemen kesatuan. Maka R adalah unit regular jika dan hanya jika setiap elemen di R merupakan hasilkali suatu idempoten dengan unit.

Bukti:

$(\Rightarrow)$ Misal R ring unit regular. Maka untuk setiap $x \in R$, terdapat unit $u \in R$ sedemikian sehingga $x = xux$. Dengan demikian, xu dan ux adalah idempoten. Perhatikan bahwa x dapat dinyatakan sebagai $x = xuu^{-1} = (xu)u^{-1}$ atau $x = u^{-1}ux = u^{-1}(ux)$. Jadi, $\forall x \in R,\ x = it$ atau $x = ti$ dengan i adalah suatu idempoten dan t adalah unit di R.

$(\Leftarrow)$ Misalkan R suatu ring dan untuk setiap $x \in R$, terdapat idempoten $i \in R$ dan unit $t \in R$ sedemikian sehingga $x = it$. Dengan mengalikan $t^{-1} \in R$ pada kedua ruas, diperoleh $xt^{-1} = i$. Jadi, terdapat $t^{-1} \in R$ sedemikian sehingga xt^{-1} adalah idempoten. Akibatnya, berdasarkan Lemma 3.4 diperoleh bahwa terdapat suatu unit $t^{-1} \in R$ sedemikian sehingga $xt^{-1}x = x$. Dengan demikian R adalah unit regular. ■

Contoh 3.6

Misalkan R suatu ring pembagian dan $x \in R$. Jika $x = 0_R$, maka terdapat unit $u \in R$ sedemikian sehingga $x = 0_R = xux$. Jika $x \neq 0_R$, maka ada unit $x^{-1} \in R$ sedemikian sehingga $x = xx^{-1}x$. Jadi, ring pembagian R merupakan ring unit regular.

Arens dan Kaplansky mendefinisikan suatu ring R yang disebut ring regular strongly. Berikut adalah definisi ring regular strongly.

Definisi 3.7: Ring Regular Strongly (Ehrlich, 1968: 210)

Suatu ring R disebut regular strongly jika untuk setiap $x \in R$, terdapat $y \in R$ sedemikian sehingga $x^2 y = x$.

Teorema berikut menjelaskan hubungan antara ring regular strongly R dengan ring unit regular.

Teorema 3.8

Setiap ring regular strongly R dengan elemen kesatuan adalah unit regular.

Bukti:

Jika $a, x \in R$ sedemikian sehingga $a^2 x = a$ maka $ax = xa$ adalah idempoten pada center dari R. Misalkan $i = ax$, maka $i = iaiixi$, dan elemen $t = iai + 1_R - i$ adalah unit di R dengan invers dari t adalah $t^{-1} = ixi + 1_R - i$. Karena $a = ia = iai$, kita peroleh $it = a$ dan $a = ia = at^{-1}a$. Dengan demikian, R adalah unit regular. ■

Corollary 3.9

Setiap ring regular abelian R dengan elemen kesatuan adalah unit regular.

Bukti:

Misalkan R adalah ring regular abelian. Untuk setiap $x \in R$, terdapat $y \in R$ sedemikian sehingga $xyx = x$. Dengan demikian, xy adalah suatu idempoten. Karena xy suatu idempoten dan R adalah regular abelian, maka xy merupakan central di R. Oleh karena itu, $x = (xy)x = x(xy) = x^2 y$. Dengan demikian, R adalah ring regular strongly dan berdasarkan Teorema 3.8, R adalah ring unit regular. ■

Corollary 3.10

Setiap ring regular komutatif dengan elemen kesatuan adalah ring unit regular.

Bukti:

Setiap ring regular komutatif R adalah ring regular abelian sehingga berdasarkan Corollary 3.9 diperoleh R adalah ring unit regular. ■

Teorema berikut sangat bermanfaat untuk memperoleh contoh ring unit regular yang berhingga.

Teorema 3.11

Untuk $m > 1$, ring bilangan bulat modulo m yaitu $\mathbb{Z}_m$ adalah regular jika dan hanya jika m adalah bilangan square-free.

Bukti:

$\mathbb{Z}_m$ di bawah operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat modulo m adalah ring regular jika dan hanya jika untuk setiap bilangan bulat a, terdapat bilangan bulat x sedemikian sehingga $axa \equiv a(\text{mod } m)$. Karena $a, x \in \mathbb{Z}$, maka $axa = a^2x \equiv a(\text{mod } m)$. Kongruensi tersebut memiliki solusi untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ jika dan hanya jika (a^2, m) membagi a untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$. Namun, (a^2, m) membagi a untuk setiap $a \in \mathbb{Z}$ jika dan hanya jika m adalah square-free. ■

Corollary 3.12

Untuk $m > 1$, ring bilangan bulat modulo m yaitu $\mathbb{Z}_m$ adalah ring unit regular jika dan hanya jika m adalah bilangan square-free.

Bukti:

Berdasarkan Teorema 3.11, $\mathbb{Z}_m$ dengan m adalah bilangan square-free dan $m > 1$ merupakan ring regular. Oleh karena itu, $\forall x \in \mathbb{Z}_m$ terdapat suatu $y \in \mathbb{Z}_m$ sedemikian sehingga $x = xyx$. Karena $x, y \in \mathbb{Z}_m$, maka $x = (xy)x = x(xy) = x^2y$.

Akibatnya, $\mathbb{Z}_m$ adalah ring regular strongly. Karena $\mathbb{Z}_m$ adalah ring regular strongly dengan elemen kesatuan, maka berdasarkan Teorema 3.8 diperoleh $\mathbb{Z}_m$ adalah unit regular. ■

Berdasarkan Corollary 3.12, ring bilangan bulat modulo 2 atau $\mathbb{Z}_2$ adalah ring unit regular karena 2 merupakan bilangan bulat square-free.

Teorema 3.13

Setiap ring unit regular R adalah dependent, yakni untuk setiap $a,b \in R$, terdapat $s,t \in R$ yang tidak keduanya nol sedemikian sehingga $sa + tb = 0_R$.

Bukti:

Jika $a,b \in R$, dan keduanya memiliki invers kiri di R, maka $sa + tb = 0_R$, ketika $s \neq 0_R$ adalah invers kiri dari a dan $-t$ adalah invers kiri dari b. Jika salah satu elemen, misalkan a, tidak memiliki invers kiri di R, nyatakan $a = xi$ dengan i adalah idempoten dan x adalah suatu unit di R. Maka $(1_R - i)x^{-1}a = 0_R$. Dengan demikian, terdapat $s = (1_R - i)x^{-1}$, $t = 0_R$ sedemikian sehingga $sa + tb = 0_R$. Karena a bukan unit, maka $i \neq 1_R$ sehingga $s \neq 0_R$.

Begitu juga jika $a,b \in R$ keduanya tidak memiliki invers kiri. Misalkan $b = yj$ dengan j adalah suatu idempoten dan y adalah suatu unit di R, maka $(1_R - j)y^{-1}b = 0_R$. Dengan demikian, terdapat $s = (1_R - i)x^{-1}$ dan $t = (1_R - j)y^{-1}$

sedemikian sehingga $sa + tb = 0_R$. Karena a dan b keduanya bukan unit, maka $i \neq 1_R$ dan $j \neq 1_R$ sehingga baik s maupun t tidak sama dengan nol. ■

Teorema 3.14

Jika R adalah ring unit regular dan 2_R adalah unit di R, maka setiap elemen di R sama dengan penjumlahan dari dua unit di R.

Bukti:

Misalkan $a \in R$ dengan $a = it$, i idempoten dan t suatu unit di R. Dengan menyatakan $i = \frac{(2_R i - 1_R)}{2_R} + \frac{1_R}{2_R}$, diperoleh $a = \left[\frac{(2_R i - 1_R)}{2_R}\right] t + \frac{t}{2_R}$. Perhatikan bahwa $\left[\frac{(2_R i - 1_R)}{2_R}\right] t$ dan $\frac{t}{2_R}$ adalah unit-unit di R dengan inversnya adalah $2_R t^{-1} (2_R i - 1_R)$ dan $2_R t^{-1}$. ■

Berdasarkan Corollary 3.12, $\mathbb{Z}_3$ di bawah operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat modulo 3 merupakan ring unit regular. Karena $2 \cdot 2 \equiv 1 (\text{mod } 3)$, maka $2 \in \mathbb{Z}_3$ adalah suatu unit. Oleh karena itu, berdasarkan Teorema 3.14, setiap elemen di $\mathbb{Z}_3$ dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dua elemen unit di $\mathbb{Z}_3$. Untuk lebih jelasnya, perhatikan bahwa $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ dengan unit-unit di $\mathbb{Z}_3$ adalah 1 dan 2. Setiap elemen di $\mathbb{Z}_3$ dapat dinyatakan sebagai $0 = 1 + 2$, $1 = 2 + 2$, dan $2 = 1 + 1$.

Namun, $\mathbb{Z}_6$ di bawah operasi penjumlahan dan perkalian bilangan bulat modulo 6 merupakan ring unit regular tetapi $2 \in \mathbb{Z}_6$ bukan unit. Elemen unit di $\mathbb{Z}_6$ hanya 1 dan 5. Elemen-elemen di $\mathbb{Z}_6$ yang dapat dinyatakan sebagai penjumlahan dua unit hanya 0, 2, dan 4.

B. Aksi Grup pada Suatu Ring Unit Regular

Pada sub-bab sebelumnya, telah dipaparkan mengenai ring unit regular dengan beberapa sifatnya. Dalam sub-bab ini, akan dibahas mengenai beberapa sifat dari suatu ring unit regular berdasarkan konsep aksi grup.

B.1 Pengantar dan Definisi Dasar

Aksi grup pada suatu himpunan merupakan konsep yang penting dalam teori grup. Aksi grup pada suatu himpunan dapat digunakan untuk membentuk subgrup dan subgrup normal dari suatu grup. Selain itu, dapat juga digunakan sebagai suatu alat untuk membuktikan teorema-teorema yang berkaitan dengan grup.

Definisi 3.15: Aksi Grup (Hungerford, 1971: 88)

Misalkan G suatu grup dan Ω sebarang himpunan tak-kosong. Aksi dari grup G pada Ω adalah suatu fungsi $\varphi : G \times \Omega \to \Omega$ yang didefinisikan oleh $(g, \alpha) \mapsto g \cdot \alpha$ sedemikian sehingga $\forall \alpha \in \Omega,\ g_1, g_2 \in G$, kondisi berikut terpenuhi

i. $(g_1 g_2)\cdot\alpha = g_1\cdot(g_2\cdot\alpha)$ dan

ii. $e\cdot\alpha=\alpha$, dengan e adalah elemen identitas di G.

Jika ada aksi dari G pada Ω, maka dikatakan bahwa G beraksi pada Ω atau φ adalah suatu aksi dari G pada Ω, dan Ω adalah suatu G-set.

Pada umumnya, jika G beraksi pada suatu himpunan Ω, maka orbit-orbit dari aksi ini adalah suatu himpunan $\mathrm{O}(\alpha)=\{g\cdot\alpha \mid g\in G\}$, $\forall\alpha\in\Omega$.

Contoh 3.16

Misalkan S_3 adalah himpunan semua permutasi dari himpunan $A=\{1,2,3\}$. Berikut adalah elemen-elemen dari S_3:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}\qquad \alpha=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&3&2\end{pmatrix}\qquad \beta=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&1&2\end{pmatrix}$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&1&3\end{pmatrix}\qquad \delta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}\qquad \kappa=\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix}$$

Permutasi dari elemen-elemen A merupakan suatu fungsi satu-satu dari A ke A. Misalnya,

$$\delta=\begin{pmatrix}1&2&3\\2&3&1\end{pmatrix}$$

merupakan fungsi sedemikian sehingga $\delta(1)=2$, $\delta(2)=3$, dan $\delta(3)=1$. S_3 di bawah operasi komposisi fungsi merupakan grup permutasi tingkat 3. Permutasi identitas di S_3 adalah $\varepsilon=\begin{pmatrix}1&2&3\\1&2&3\end{pmatrix}$.

Misalkan $\varphi: S_3 \times A \to A$ didefinisikan oleh $(\sigma, a) \mapsto \sigma(a)$, untuk setiap $\sigma \in S_3$ dan $a \in A$. Akan ditunjukkan $(\sigma, a) \mapsto \sigma(a)$ adalah suatu aksi dari grup S_3 pada himpunan $A = \{1, 2, 3\}$ sebagai berikut:

(i) Misalkan $\sigma_1,\ \sigma_2 \in S_3$, maka $(\sigma_1\sigma_2)(a) = (\sigma_1 \circ \sigma_2)(a) = \sigma_1(\sigma_2(a))$.

(ii) Terdapat permutasi identitas $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ di S_3 sedemikian sehingga $\varepsilon(a) = a,\ \forall a \in A$.

Dari (i) dan (ii) diperoleh bahwa $\varphi: S_3 \times A \to A$ yang didefinisikan oleh $(\sigma, a) \mapsto \sigma(a)$ merupakan suatu aksi dari S_3 pada A. ■

Lemma 3.17

Misalkan G beraksi pada Ω. Maka orbit-orbit dari $\alpha \in \Omega$ yaitu $\mathrm{O}(\alpha)$, mempartisi Ω. Hal ini berarti

a) Ω adalah gabungan dari orbit-orbit, dan

b) sebarang dua orbit yang berbeda adalah disjoint.

Bukti:

a) Misalkan φ adalah aksi grup G pada Ω. Nyatakan $\mathrm{O}(\alpha) = \{\varphi(g, \alpha) = g \cdot \alpha \mid g \in G\}$. Karena $\varphi(e, \alpha) = \alpha$, maka $\alpha \in \mathrm{O}(\alpha)$ dan dengan demikian $\Omega = \bigcup_{\alpha \in \Omega} \mathrm{O}(\alpha)$.

b) Akan ditunjukkan bahwa jika $\gamma \in \mathrm{O}(\alpha)$ maka $\mathrm{O}(\gamma) = \mathrm{O}(\alpha)$. Karena $\gamma \in \mathrm{O}(\alpha)$, maka $\exists g_1 \in G \ni \varphi(g_1, \alpha) = g_1 \cdot \alpha = \gamma$. Dengan demikian,

$$\varphi(g, \gamma) = g \cdot \gamma = g \cdot (g_1 \cdot \alpha) = gg_1 \cdot \alpha \in \mathrm{O}(\alpha).$$

Diperoleh, $\mathrm{O}(\gamma) \subseteq \mathrm{O}(\alpha)$. Karena $\alpha = g_1^{-1} \cdot \gamma$, maka $\alpha \in \mathrm{O}(\gamma)$ sehingga $\mathrm{O}(\alpha) \subseteq \mathrm{O}(\gamma)$. Jadi, $\mathrm{O}(\alpha) = \mathrm{O}(\gamma)$.

Terakhir, jika $\mathrm{O}(\alpha) \cap \mathrm{O}(\beta) \neq \phi$, ambil $\gamma \in \mathrm{O}(\alpha) \cap \mathrm{O}(\beta)$. Maka

$$\gamma \in \mathrm{O}(\alpha),\ \text{akibatnya } \mathrm{O}(\gamma) = \mathrm{O}(\alpha) \tag{3.1}$$

$$\gamma \in \mathrm{O}(\beta),\ \text{akibatnya } \mathrm{O}(\gamma) = \mathrm{O}(\beta). \tag{3.2}$$

Dari (3.1) dan (3.2), diperoleh $\mathrm{O}(\alpha) = \mathrm{O}(\gamma) = \mathrm{O}(\beta)$ sehingga bagian (b) terbukti. ■

Suatu aksi grup dapat digunakan untuk menghasilkan suatu subgrup. Berdasarkan lemma berikut, jika G beraksi pada Ω dan $\alpha \in \Omega$, maka stabilizer dari α atau $G_\alpha = \{g \in G \mid g \cdot \alpha = \alpha\}$ adalah subgrup dari G.

Lemma 3.18

Jika G sebarang grup dan Ω suatu G-set, dan misalkan $\varphi : G \times \Omega \to \Omega$ yang didefinisikan oleh $(g, \alpha) \mapsto g \cdot \alpha$ suatu aksi grup G pada Ω. Maka $\forall \alpha \in \Omega$, subset $G_\alpha = \{g \in G \mid \varphi(g, \alpha) = g \cdot \alpha = \alpha\}$ adalah subgrup dari G.

Bukti:

Misalkan $\alpha \in \Omega$ dan e adalah elemen identitas di G. Karena φ suatu aksi dari G pada Ω, maka $\varphi(e,\alpha) = e \cdot \alpha = \alpha$. Dengan demikian $e \in G_\alpha$. Jadi $G_\alpha \neq \phi$. Ambil $g, h \in G_\alpha$, berarti $\varphi(g,\alpha) = g \cdot \alpha = \alpha$ dan $\varphi(h,\alpha) = h \cdot \alpha = \alpha$. Sehingga

1) $\varphi((gh),\alpha) = (gh) \cdot \alpha = g \cdot (h \cdot \alpha) = g \cdot \alpha = \alpha$. Oleh karena itu $gh \in G_\alpha$.
2) $\varphi(h^{-1},\alpha) = h^{-1} \cdot \alpha = h^{-1} \cdot (h \cdot \alpha) = (h^{-1}h) \cdot \alpha = e \cdot \alpha = \alpha$. Dengan kata lain, $\forall h \in G_\alpha, \exists h^{-1} \in G_\alpha$.

Karena (1) dan (2) maka G_α subgrup dari G. ■

Selanjutnya, misalkan R suatu ring dengan 1_R. Misalkan X menotasikan himpunan semua elemen tak-nol yang bukan unit di R dan $U(R)$ menotasikan himpunan unit-unit di R. $U(R)$ merupakan subhimpunan tak-kosong dari R karena memuat 1_R. $U(R)$ tertutup terhadap operasi perkalian dan setiap elemen di $U(R)$ memiliki invers, karena jika u dan v adalah unit-unit di R maka $v^{-1}u^{-1}$ adalah invers dari uv, dengan demikian uv adalah unit. Hal tersebut menunjukkan bahwa $U(R)$ adalah suatu grup, yaitu grup unit-unit di R.

Misalkan $\varphi : U(R) \times X \to X$ yang didefinisikan dengan $(g,x) \mapsto g \cdot x = gx$, untuk setiap $g \in U(R)$ dan $x \in X$. Akan ditunjukkan $(g,x) \mapsto g \cdot x = gx$ adalah suatu aksi grup $U(R)$ pada X sebagai berikut.

1. Akan ditunjukkan $g \in U(R)$ dan $x \in X \Rightarrow gx \in X$.

Ambil $x \in X$ dan $g \in U(R)$. Karena $x \in X$, berarti $x \neq 0_R$, x bukan unit dan $g \in U(R)$ adalah suatu unit. Andaikan $gx = 0_R$, maka $x = g^{-1}0_R = 0_R$. Hal ini kontradiksi dengan $x \in X$. Dengan demikian pengandaian salah, haruslah $gx \neq 0_R$.

Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa gx bukan unit. Andaikan gx unit maka $\exists (gx)^{-1} \in R$. Perhatikan bahwa $(gx)^{-1} = x^{-1}g^{-1}$. Dengan demikian, diperoleh bahwa x adalah unit. Hal ini kontradiksi dengan $x \in X$. Jadi pengandaian salah, haruslah gx bukan unit. Karena $gx \neq 0_R$ dan gx bukan unit, maka $gx \in X$.

2. Akan ditunjukkan $(g,x) \mapsto g \cdot x = gx$ terdefinisi dengan baik (well defined).

   Ambil $(g_1,x_1),(g_2,x_2) \in U(R) \times X$ dengan $(g_1,x_1) = (g_2,x_2)$. Karena $(g_1,x_1) = (g_2,x_2)$, maka $g_1 = g_2$ dan $x_1 = x_2$. Dengan demikian $g_1x_1 = g_2x_2$ atau dengan kata lain $\varphi(g_1,x_1) = \varphi(g_2,x_2)$.

3. Akan ditunjukkan $\varphi : U(R) \times X \to X$ yang didefinisikan oleh $(g,x) \mapsto g \cdot x = gx$ suatu aksi grup.

   Karena $\forall g_1, g_2 \in U(R),\ x \in X$ dan $1_R \in U(R)$ merupakan elemen identitas di $U(R)$, fungsi φ memenuhi

   i. $(g_1g_2) \cdot x = g_1g_2x = g_1(g_2x)$ (karena $g_1, g_2, x \in R$)

   $= g_1(g_2 \cdot x)$ (definisi φ yang diberikan)

   $= g_1 \cdot (g_2 \cdot x)$. (definisi φ yang diberikan)

ii. $1_R \cdot x = 1_R x = x$,

maka φ adalah suatu aksi dari grup $U(R)$ pada X atau X adalah G-set. Suatu aksi yang didefinisikan demikian ($\varphi(g,x) = gx$, $\forall g \in U(R), x \in X$), disebut aksi regular.

Aksi penting lainnya dari grup $U(R)$ pada X adalah aksi konjugasi, yaitu suatu fungsi $\varphi : U(R) \times X \to X$ yang didefinisikan sebagai $(g,x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$. Berikut akan diperlihatkan bahwa fungsi φ tersebut memenuhi Definisi 3.15 $\forall g_1, g_2 \in U(R),\ x \in X$.

1. Akan ditunjukkan $gxg^{-1} \in X$.

   Ambil $x \in X$ dan $g \in U(R)$. Andaikan $gxg^{-1} = 0_R$, maka $x = g^{-1} 0_R g = 0_R$. Hal ini kontradiksi dengan $x \in X$. Dengan demikian pengandaian salah, haruslah $gxg^{-1} \neq 0_R$. Selanjutnya akan ditunjukkan dengan kontradiksi bahwa gxg^{-1} bukan unit. Andaikan gxg^{-1} adalah unit, maka ada $\left(gxg^{-1}\right)^{-1} \in R$. Perhatikan bahwa $\left(gxg^{-1}\right)^{-1} = \left(g^{-1}\right)^{-1} x^{-1} g^{-1} = gx^{-1}g^{-1}$. Dengan demikian, x merupakan unit. Hal ini kontradiksi dengan $x \in X$. Jadi pengandaian salah, haruslah gxg^{-1} bukan unit. Karena $gxg^{-1} \neq 0_R$ dan gxg^{-1} bukan unit, maka $gxg^{-1} \in X$.

2. Akan ditunjukkan $\varphi : U(R) \times X \to X$ yang didefinisikan oleh $(g,x) \mapsto g \cdot x = gxg^{-1}$ terdefinisi dengan baik (well defined).

Ambil $(g_1,x_1),(g_2,x_2)\in U(R)\times X$ dengan $(g_1,x_1)=(g_2,x_2)$. Maka $x_1=x_2$ dan $g_1=g_2$. Karena $g_1=g_2$, maka $g_1^{-1}=g_2^{-1}$. Akibatnya, $g_1x_1g_1^{-1}=g_2x_2g_2^{-1}$. Dengan kata lain, $\varphi(g_1,x_1)=\varphi(g_2,x_2)$.

3. Akan ditunjukkan $\varphi:U(R)\times X\to X$ yang didefinisikan oleh $(g,x)\mapsto g\cdot x=gxg^{-1}$ suatu aksi grup.

Karena $\forall g_1,g_2\in U(R),\ x\in X$ dan $1_R\in U(R)$ adalah elemen identitas di $U(R)$, fungsi φ memenuhi

i. $(g_1g_2)\cdot x=(g_1g_2)x(g_1g_2)^{-1}=(g_1g_2)x\left(g_2^{-1}g_1^{-1}\right)=g_1\left(g_2xg_2^{-1}\right)g_1^{-1}$

$$=g_1(g_2\cdot x)g_1^{-1}=g_1\cdot(g_2\cdot x).$$

ii. $\varphi(1_R,x)=1_Rx1_R^{-1}=1_Rx1_R=1_Rx=x$.

Dengan demikian, fungsi φ merupakan suatu aksi $U(R)$ pada X.

Definisi 3.19 (Han, 1999: 3354)

Jika $\varphi:U(R)\times X\to X$ adalah salah satu aksi yang telah disebutkan sebelumnya (aksi regular dan aksi konjugasi), maka

1) $\forall x\in X$, orbit dari x adalah $\mathrm{O}(x)=\{\varphi(g,x)\,|\,g\in U(R)\}$.
2) $U(R)$ disebut transitif pada X (atau $U(R)$ beraksi secara transitif pada X) jika $\exists x\in X$ dengan $\mathrm{O}(x)=X$.
3) Aksi grup $U(R)$ pada X disebut trivial jika $\mathrm{O}(x)=\{x\},\ \forall x\in X$.

4) Stabilizer dari x yang dinotasikan dengan $\left(U(R)\right)_x$ atau $\operatorname{Stab}(x)$ didefinisikan oleh $\left(U(R)\right)_x = \left\{ g \in U(R) \middle| \varphi(g, x) = x \right\}$.

Contoh 3.20

Berdasarkan Tabel 3.1 dan Tabel 3.2, himpunan $\mathbb{Z}_4 = \{0, 1, 2, 3\}$ di bawah operasi penjumlahan dan perkalian modulo 4 adalah suatu ring komutatif dengan elemen kesatuan. Berikut tabel cayley $\mathbb{Z}_4$.

Tabel 3.1
Tabel Cayley $\mathbb{Z}_4$ dengan Operasi Penjumlahan Modulo 4

$\oplus_4$	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

Tabel 3.2
Tabel Cayley $\mathbb{Z}_4$ dengan Operasi Perkalian Modulo 4

$\otimes_4$	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Misal $U(\mathbb{Z}_4)$ adalah himpunan unit-unit di $\mathbb{Z}_4$, maka $U(\mathbb{Z}_4) = \{1, 3\} \subseteq \mathbb{Z}_4$. Karena $U(\mathbb{Z}_4) = \{1, 3\} \subseteq \mathbb{Z}_4$, $U(\mathbb{Z}_4)$ dengan operasi perkalian modulo 4 memenuhi sifat asosiatif dan berdasarkan Tabel 3.3 berikut, $U(\mathbb{Z}_4)$ memenuhi sifat ketertutupan, memiliki elemen identitas, dan setiap elemen di $U(\mathbb{Z}_4)$ memiliki invers.

Tabel 3.3
Tabel Cayley $U(\mathbb{Z}_4)$ dengan
Operasi Perkalian Modulo 4

$\otimes_4$	1	3
1	1	3
3	3	1

Maka, $U(\mathbb{Z}_4)$ di bawah operasi perkalian modulo 4 adalah suatu grup. Misalkan X adalah himpunan elemen tak-nol dan bukan unit di $\mathbb{Z}_4$. Elemen tak-nol dan bukan unit di $\mathbb{Z}_4$ hanyalah 2. Dengan demikian, $X=\{2\}$. Diberikan suatu aksi regular dari grup $U(\mathbb{Z}_4)$ pada X yaitu suatu fungsi $\varphi : U(\mathbb{Z}_4)\times X \to X$ yang didefinisikan dengan $(g,x)\mapsto \varphi(g,x)=gx$ (dalam kasus ini, gx menyatakan operasi perkalian modulo 4 antara g dengan x). Dari Tabel 3.2 diperoleh

1) $\mathrm{O}(2)=\{\varphi(g,2)\,|\,g\in U(\mathbb{Z}_4)\}=\{\varphi(1,2),\ \varphi(3,2)\}=\{2\}$.

2) $Stab(2)=U(\mathbb{Z}_4)_2=\{g\in U(\mathbb{Z}_4)\,|\,\varphi(g,2)=2\}=\{1,3\}$.

Karena $\forall x\in X$ berlaku $\mathrm{O}(x)=\mathrm{O}(2)=\{2\}=\{x\}$, maka φ adalah aksi trivial dan karena $\exists x=2\in X$ dengan $\mathrm{O}(x)=\{2\}=X$, maka $U(\mathbb{Z}_4)$ transitif pada X .

B.2 Orbit di Bawah Aksi Grup

Dalam pembahasan selanjutnya, jika tidak ada keterangan lain, R adalah ring dengan 1_R, $U(R)$ adalah grup yang beranggotakan unit-unit di R, X adalah himpunan yang beranggotakan elemen tak-nol dan bukan unit di R. Selain itu, untuk setiap $x \in X$, $\mathrm{O}(x)$ menotasikan orbit dari x di bawah aksi grup yang diberikan.

Lemma 3.21

Misalkan R suatu ring regular dengan elemen kesatuan. Jika R tidak memiliki idempoten tak-trivial, maka R adalah ring pembagian.

Bukti:

Karena R ring regular, maka $\forall x \in R$, $\exists y \in R \ni xyx = x$. Untuk menunjukkan bahwa R adalah ring pembagian, harus ditunjukkan bahwa setiap elemen tak-nol di R adalah unit.

Ambil sebarang elemen tak-nol $x \in R$, berarti $\exists y \in R \ni xyx = x$. Dengan demikian, xy dan yx adalah idempoten di R. Karena R hanya memiliki idempoten trivial, berarti idempoten di R hanyalah 0_R dan 1_R. Jika xy atau $yx = 0_R$, maka $x = xyx = x(0_R) = 0_R$. Hal ini kontradiksi dengan pengandaian $x \neq 0_R$. Berdasarkan asumsi, maka $xy = 1_R = yx$. Diperoleh, x invertible. Dengan kata lain, untuk setiap elemen tak-nol $x \in R$, x adalah unit. Jadi, R adalah ring pembagian. ■

Lemma 3.22

Misalkan R suatu ring dengan elemen kesatuan sedemikian sehingga $U(R)$ beraksi pada X melalui aksi regular. R adalah unit regular jika dan hanya jika setiap orbit di bawah aksi regular adalah $\mathrm{O}(i)$, untuk suatu idempoten $i \in X$.

Bukti:

Berdasarkan asumsi, $U(R)$ adalah grup yang beranggotakan unit-unit di R dan X adalah himpunan semua elemen tak-nol dan bukan unit di R. Misalkan fungsi $\varphi : U(R) \times X \to X$ adalah suatu aksi $U(R)$ pada X yang didefinisikan sebagai $(g, x) \mapsto gx$.

$(\Rightarrow)$ Misalkan R suatu ring unit regular, maka $\forall x \in R$ terdapat unit $u \in U(R) \ni xux = x$. Khususnya, jika $x \in X$, maka ux dan xu adalah idempoten. Akan ditunjukkan $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(ux)$ di bawah aksi regular.

(i) Ambil $a \in \mathrm{O}(x)$ sehingga $\exists g_1 \in U(R)$ sedemikian sehingga $a = g_1 x$. Karena $g_1 \in U(R)$, maka g_1 dapat dinyatakan sebagai $g_1 = g_2 u$, $\exists g_2 \in U(R)$. Dengan demikian, $a = g_1 x = (g_2 u) x = g_2 (ux)$ untuk suatu unit $g_2 \in U(R)$. Oleh karena itu, $a \in \mathrm{O}(ux)$. Karena a sebarang, maka

$$\mathrm{O}(x) \subseteq \mathrm{O}(ux). \tag{3.3}$$

(ii) Karena $u \in U(R)$ dan $x \in X$, maka $ux \in X$. $\mathrm{O}(ux)$ didefinisikan dengan $\{g(ux) | g \in U(R)\}$. Ambil $b \in \mathrm{O}(ux)$, maka terdapat $g_3 \in U(R)$ sedemikian sehingga $b = g_3(ux) = (g_3 u)x$. Karena g_3, $u \in U(R)$ maka terdapat $g_4 \in U(R)$ sedemikian sehingga $g_4 = g_3 u$. Akibatnya, $b = g_4 x,\ \exists g_4 \in U(R)$. Oleh karena itu, $b \in \mathrm{O}(x)$. Karena sebarang, maka

$$\mathrm{O}(ux) \subseteq \mathrm{O}(x). \tag{3.4}$$

Dari (3.3) dan (3.4) diperoleh $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(ux)$. Dengan kata lain, setiap orbit di bawah aksi regular adalah $\mathrm{O}(i)$ untuk suatu idempoten $i \in X$.

$(\Leftarrow)$ Misalkan setiap orbit di bawah aksi regular adalah $\mathrm{O}(i)$, untuk suatu idempoten $i \in X$. Ambil sebarang $x \in R$.

a) Jika $x \in U(R)$, maka $\exists x^{-1} \in U(R) \ni xx^{-1}x = x.$

b) Jika $x \in X$, maka berdasarkan hipotesis $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(i)$, untuk suatu idempoten $i \in X$. Misalkan $\varphi : U(R) \times X \to X$ suatu aksi regular $U(R)$ pada himpunan tak-kosong X. Maka $\mathrm{O}(x) = \{\varphi(g,x) = gx \mid g \in U(R)\}$ dan $\mathrm{O}(i) = \{\varphi(g,i) = gi \mid g \in U(R)\}$. Karena $1_R x = x \in \mathrm{O}(x)$ dan $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(i)$, maka $x \in \mathrm{O}(i)$. Akibatnya, $\exists g \in U(R) \ni x = gi$. Karena $\forall g \in U(R), \exists g^{-1} \in U(R) \ni g^{-1}x = i$. Dengan demikian, $g^{-1}x$ adalah suatu idempoten. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 3.4 terdapat suatu unit $g^{-1} \in U(R)$ sedemikian sehingga $xg^{-1}x = x$.

c) Jika $x = 0_R \in R$, maka $\forall g \in U(R)$ memenuhi $0_R = 0_R g 0_R$.

Jadi, R adalah ring unit regular. ■

Contoh 3.23

Berdasarkan Tabel 3.4 dan Tabel 3.5, himpunan $\mathbb{Z}_6 = \{0,1,2,3,4,5\}$ di bawah operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6 adalah suatu ring komutatif dengan elemen kesatuan. Perhatikan tabel Cayley $\mathbb{Z}_6$ berikut:

Tabel 3.4
Tabel Cayley $\mathbb{Z}_6$ dengan Operasi Penjumlahan Modulo 6

$\oplus_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	1	2	3	4	5
1	1	2	3	4	5	0
2	2	3	4	5	0	1
3	3	4	5	0	1	2
4	4	5	0	1	2	3
5	5	0	1	2	3	4

Tabel 3.5
Tabel Cayley $\mathbb{Z}_6$ dengan Operasi Perkalian Modulo 6

$\otimes_6$	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	0	2	4
3	0	3	0	3	0	3
4	0	4	2	0	4	2
5	0	5	4	3	2	1

Misal $U(\mathbb{Z}_6)$ adalah himpunan dari unit-unit di $\mathbb{Z}_6$, maka $U(\mathbb{Z}_6) = \{1,5\}$. $U(\mathbb{Z}_6)$ dengan operasi perkalian modulo 6 adalah suatu grup. Misalkan X himpunan elemen tak-nol dan bukan unit di $\mathbb{Z}_6$, maka $X = \{2,3,4\}$. Diberikan aksi regular $\varphi : U(\mathbb{Z}_6) \times X \to X$ yang didefinisikan sebagai $(g,x) \mapsto gx$. Berikut adalah tabel perkalian modulo 6 antara $U(\mathbb{Z}_6)$ dan X.

Tabel 3.6

Perkalian Modulo 6 antara $U(\mathbb{Z}_6)$ dan X

$\otimes_6$	2	3	4
1	2	3	4
5	4	3	2

Dari Tabel 3.6 di atas, diperoleh orbit-orbit dari $x \in X$ di bawah aksi regular adalah $\mathrm{O}(2)=\{2,4\}$; $\mathrm{O}(3)=\{3\}$; dan $\mathrm{O}(4)=\{2,4\}$. Elemen idempoten di X adalah 3 dan 4 karena $3^2=3$ dan $4^2=4$. Orbit-orbit dari elemen idempoten di X adalah $\mathrm{O}(3)=\{3\}$ dan $\mathrm{O}(4)=\{2,4\}$. Karena setiap orbit di bawah aksi regular adalah $\mathrm{O}(i)$ untuk suatu idempoten $i \in X$, maka berdasarkan Lemma 3.22, $\mathbb{Z}_6$ di bawah operasi penjumlahan dan perkalian modulo 6 adalah suatu ring unit regular, artinya $\forall a \in \mathbb{Z}_6$, terdapat elemen unit $b \in \mathbb{Z}_6$ sedemikian sehingga $a = aba$. Untuk lebih jelasnya, setiap elemen di $\mathbb{Z}_6$ dapat dinyatakan sebagai $0=0\cdot 1\cdot 0$; $1=1\cdot 1\cdot 1$; $2=2\cdot 5\cdot 2$; $3=3\cdot 1\cdot 3$; $4=4\cdot 1\cdot 4$; $5=5\cdot 5\cdot 5$ dengan $\{1,5\}$ adalah unit-unit di $\mathbb{Z}_6$.

Corollary 3.24

Misalkan R suatu ring unit regular sedemikian sehingga $U(R)$ beraksi pada X melalui aksi regular. Jika aksi tersebut adalah trivial, maka setiap $x \in X$ adalah idempoten tak-trivial di R.

Bukti:

Misal $\varphi : U(R) \to X$ dengan aturan $(g,x) \mapsto gx$. Berdasarkan asumsi, φ suatu aksi trivial, maka $\mathrm{O}(x) = \{\varphi(g,x) = gx \mid g \in U(R)\} = \{x\}$, $\forall x \in X$. Jadi, $\forall x \in X$ dan $g \in U(R)$ berlaku $gx = x$. (3.5)

Berdasarkan Lemma 3.22, diperoleh $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(i)$, untuk suatu idempoten $i \in R$. Karena aksi regular tersebut trivial, $\mathrm{O}(i) = \mathrm{O}(x) = \{x\}$. Akibatnya, $\forall x \in X$, $g \in U(R)$ berlaku $gi = x$. (3.6)

Dari (3.5) dan (3.6) diperoleh $gx = gi$. Dengan demikian $g^{-1}gx = g^{-1}gi$. Diperoleh $x = i$. Dengan demikian x adalah suatu idempoten di R. Karena $x \in X$, berarti x elemen tak-nol dan bukan unit di R maka $x \neq 0_R$ dan $x \neq 1_R$. Jadi, setiap $x \in X$ adalah elemen idempoten tak-trivial. ■

Misalkan R suatu ring unit regular. Maka tidak ada aksi regular yang transitif dari $U(R)$ pada X. Karena sesungguhnya, jika ada aksi regular yang transitif, maka $\exists x \in X \ni X = \mathrm{O}(x)$. Namun, karena R unit regular, maka berdasarkan Lemma 3.22 $X = \mathrm{O}(i)$ untuk suatu idempoten $i \in X$. Karena $1_R - i \in X$ juga merupakan elemen idempoten, $1_R - i = ui$ untuk suatu unit $u \in U(R)$. Maka $0_R = (1_R - i)i = uii = ui$. Karena $ui = 0_R$ dan $u \in U(R)$, maka $i = u^{-1}0_R = 0_R$. Hal ini kontradiksi dengan $i \in X$. Dengan demikian pengandaian salah, haruslah tidak ada aksi regular yang transitif pada suatu ring unit regular R.

Berdasarkan Lemma 3.22, jika banyak elemen idempoten tak-trivial pada suatu ring unit regular R adalah hingga, maka banyak orbit di bawah aksi regular juga hingga.

Lemma 3.25

Misalkan R suatu ring regular dengan elemen kesatuan. Maka kondisi berikut adalah ekuivalen:

1) R adalah ring regular abelian;

2) Untuk setiap $x \in X$, $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(x^2)$ di bawah aksi regular;

3) R tidak memiliki elemen nilpoten tak-nol.

Bukti:

$(1) \Rightarrow (2)$ Misalkan R suatu ring regular abelian. Karena R adalah ring unit regular, maka untuk setiap $x \in X$, terdapat $u \in U(R)$ sedemikian sehingga $x = xux$. Karena ux adalah idempoten dan R regular abelian, maka $x = xux = (ux)x = ux^2$. Selanjutnya, akan ditunjukkan $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(x^2)$ di bawah aksi regular.

a) Ambil $a \in \mathrm{O}(x)$ sehingga $\exists g_1 \in U(R) \ni a = g_1 x$. Karena $x = ux^2$, maka $a = g_1 u x^2$. Karena $g_1, u \in U(R)$, maka $\exists g_2 \in U(R) \ni g_2 = g_1 u$. Akibatnya, $a = g_2 x^2$. Dengan demikian, $a \in \mathrm{O}(x^2)$. Karena a sebarang, maka $\mathrm{O}(x) \subseteq \mathrm{O}(x^2)$.

b) Selanjutnya, ambil $b \in \mathrm{O}\left(x^2\right)$ sehingga $\exists g_3 \in U\left(R\right) \ni b = g_3 x^2$. Karena $g_3 \in U\left(R\right)$, maka terdapat $g_4 \in U\left(R\right)$ sehingga $g_3 = g_4 u$ untuk suatu unit $u \in U\left(R\right)$. Dengan demikian, b dapat dinyatakan sebagai $b = g_4 u x^2$ untuk suatu $g_4 \in U\left(R\right)$. Karena $x = ux^2$, maka $b = g_4 x$. Dengan demikian, $b \in \mathrm{O}\left(x\right)$. Karena b sebarang, maka $\mathrm{O}\left(x^2\right) \subseteq \mathrm{O}\left(x\right)$.

Dari (a) dan (b) diperoleh $\mathrm{O}\left(x\right) \subseteq \mathrm{O}\left(x^2\right)$ dan $\mathrm{O}\left(x^2\right) \subseteq \mathrm{O}\left(x\right)$ sehingga dapat disimpulkan bahwa $\mathrm{O}\left(x\right) = \mathrm{O}\left(x^2\right)$ di bawah aksi regular.

$\left(2\right) \Rightarrow \left(3\right)$ Misalkan $a \in R$ dan $a \neq 0_R$.

a) Jika a suatu unit di R, maka $a \in U\left(R\right)$. Oleh karena itu, $a^n \in U\left(R\right)$ sehingga $a^n \neq 0_R$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

b) Jika a bukan unit di R, maka $a \in X$. Berdasarkan (2), terdapat suatu unit $t \in U\left(R\right)$ sedemikian sehingga $a = ta^2$. Dengan menggunakan induksi matematika, akan ditunjukkan

$$t^n a^{n+1} = a, \ \forall n \in \mathbb{N}. \qquad (3.7)$$

Misalkan S adalah himpunan bilangan asli yang memenuhi (3.7).

(i) Untuk $n = 1$, $a = ta^2$ merupakan pernyataan yang benar karena $a \in X$, maka berdasarkan (2) terdapat $t \in U\left(R\right) \ni a = ta^2$. Dengan demikian, $1 \in S$.

(ii) Asumsikan benar untuk $n = k$ sehingga $a = t^k a^{k+1}$ dan akan ditunjukkan benar untuk $n = k + 1$.

$$t^{k+1} a^{(k+1)+1} = t^{k+1} a^{k+2}$$

$$= tt^k a^{k+1} a$$

$$= taa \qquad \text{(Berdasarkan asumsi, } a = t^k a^{k+1}\text{)}$$

$$= ta^2$$

$$= a. \qquad \text{(Berdasarkan (i), } a = ta^2\text{)}$$

Oleh karena itu, $k + 1 \in S$.

Berdasarkan induksi matematika, $a = t^n a^{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Karena $t^n \in U(R)$, maka $\exists (t^n)^{-1} = t^{-n} \in U(R)$ sehingga persamaan (3.7) menjadi

$$a^{n+1} = t^{-n} a. \tag{3.8}$$

Karena $t^{-n} \in U(R)$ dan $a \in X$, maka $t^{-n} a \in \mathrm{O}(a) \subseteq X$ di bawah aksi regular. Dengan demikian, $a^{n+1} = t^{-n} a \neq 0_R$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Dari (a) dan (b) diperoleh bahwa untuk setiap elemen tak-nol $a \in R$, maka $a^n \neq 0_R$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Dengan kata lain, R tidak memiliki elemen nilpoten tak-nol.

$(3) \Rightarrow (1)$ Karena nol adalah satu-satunya elemen nilpoten di R, maka berdasarkan Corollary 2.20 diperoleh bahwa setiap idempoten $i \in R$ adalah central. Berdasarkan definisi, maka R adalah ring regular abelian. ■

Berdasarkan Corollary 3.9, diperoleh bahwa setiap ring regular abelian dengan elemen kesatuan adalah unit regular. Namun, pernyataan konvers dari Corollary 3.9 tersebut belum tentu berlaku. Corollary 3.26 dan Corollary 3.27 berikut menjelaskan suatu kondisi yang harus dipenuhi agar suatu ring unit regular merupakan ring regular abelian.

Corollary 3.26

Misalkan R adalah suatu ring unit regular. Jika setiap $x \in X$ adalah idempoten, maka R adalah regular abelian.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.22, diperoleh $\forall x \in X$, $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(i)$ untuk suatu idempoten $i \in X$. Berdasarkan asumsi, setiap $x \in X$ adalah idempoten sehingga $\mathrm{O}(x) = \mathrm{O}(x^2)$. Oleh karena itu, berdasarkan Lemma 3.25, R adalah ring regular abelian. ■

Corollary 3.27

Misalkan R adalah suatu ring unit regular sedemikian sehingga $X \neq \phi$. Jika aksi konjugasi dari $U(R)$ pada X adalah transitif, maka R adalah ring regular abelian.

Bukti:

Karena $X \neq \phi$, maka terdapat elemen tak-nol dan bukan unit di R. Oleh karena itu, R bukan ring pembagian sehingga berdasarkan Lemma 3.21, terdapat suatu idempoten tak-trivial $i \in X$. Karena aksi konjugasi dari $U(R)$ pada X adalah transitif, maka $X = \mathrm{O}(i) = \{gig^{-1} \mid g \in U(R)\}$.

Karena $(gig^{-1})^2 = gi(g^{-1}g)ig^{-1} = gi^2g^{-1} = gig^{-1}$, maka gig^{-1} adalah elemen idempoten. Dengan demikian, setiap elemen di X adalah idempoten, sehingga berdasarkan Corollary 3.26, R adalah regular abelian. ■

Selanjutnya akan dibahas sifat-sifat ring unit regular dengan $U(R)$ adalah grup abelian atau grup siklis.

B.3 Ring Unit Regular dengan $U(R)$ adalah Grup Abelian atau Grup siklis

Pada bagian ini, misalkan $2_R = 1_R + 1_R$ dengan 1_R adalah elemen kesatuan pada suatu ring R.

Teorema 3.29 menjelaskan suatu kondisi yang harus dipenuhi agar suatu ring unit regular merupakan ring komutatif. Namun, untuk membuktikan teorema tersebut, diperlukan lemma berikut.

Lemma 3.28

Misalkan R suatu ring unit regular dan I suatu himpunan semua idempoten tak-trivial di R. Jika $U(R)$ adalah grup abelian dan $2_R \in R$ merupakan unit di R, maka $gi = ig$ untuk setiap $g \in U(R)$ dan $i \in I$.

Bukti:

Akan ditunjukkan $gi = ig$ untuk setiap $g \in U(R)$ dan $i \in I$. Perhatikan bahwa

$$(2_R i - 1_R)(2_R i - 1_R) = 2_R i 2_R i - 2_R i - 2_R i + 1_R$$

$$= 2_R i(1_R + 1_R)i - 2_R i - 2_R i + 1_R \quad \text{(karena } 2_R = 1_R + 1_R\text{)}$$

$$= 2_R i(i + i) - 2_R i - 2_R i + 1_R \quad \text{(sifat distributif } \cdot \text{ terhadap } +\text{)}$$

$$= 2_R i^2 + 2_R i^2 - 2_R i - 2_R i + 1_R \quad \text{(sifat distributif } \cdot \text{ terhadap } +\text{)}$$

$$= 2_R i + 2_R i - 2_R i - 2_R i + 1_R \quad (i \text{ suatu idempoten di } R)$$

$$= 1_R.$$

Oleh karena itu, $(2_R i - 1_R)$ adalah suatu unit di R atau dengan kata lain $(2_R i - 1_R) \in U(R)$ untuk setiap idempoten $i \in R$, khususnya untuk setiap $i \in I$. Sehingga diperoleh,

$$g(2_R i - 1_R) = (2_R i - 1_R)g \quad \text{(karena } U(R) \text{ abelian)}$$

$$\Leftrightarrow g2_R i - g = 2_R ig - g \quad \text{(distributif } \cdot \text{ terhadap } +\text{)}$$

$$\Leftrightarrow g2_R i = 2_R ig \quad \text{(kedua ruas ditambah } g\text{)}$$

$$\Leftrightarrow 2_R gi = 2_R ig \quad \text{(karena } U(R) \text{ abelian)}$$

$$\Leftrightarrow gi = ig. \quad \text{(kedua ruas dikalikan dengan } 2_R^{-1}\text{)}$$

Jadi, $gi = ig$, $\forall i \in I$. ■

Teorema 3.29

Misalkan R suatu ring unit regular. Jika $U(R)$ adalah suatu grup abelian dan 2_R adalah unit di R, maka R adalah suatu ring komutatif.

Bukti:

Akan ditunjukkan R suatu ring komutatif, artinya $\forall a, b \in R$ berlaku $ab = ba$. Karena untuk elemen $0_R \in R$ berlaku $0_R a = 0_R = a0_R$, $\forall a \in R$ dan $U(R) Ø R$ merupakan grup abelian, maka untuk membuktikan R komutatif harus ditunjukkan

1. $gx = xg,\ \forall g \in U(R)$ dan $\forall x \in X$,
2. $xy = yx,\ \forall x, y \in X$.

Berikut adalah bukti selengkapnya:

1. Akan ditunjukkan $gx = xg,\ \forall g \in U(R)$ dan $\forall x \in X$.

Misalkan I suatu himpunan dari elemen-elemen idempoten tak-trivial di R. Ambil sebarang $x \in X$ dan $g \in U(R)$. Karena R adalah ring unit regular, maka terdapat $u \in U(R)$ sedemikian sehingga $x = xux$, dengan demikian ux dan $xu \in I$. Berdasarkan Lemma 3.28, $g(ux) = (ux)g$ dan $g(xu) = (xu)g$. Sehingga diperoleh,

$$
\begin{aligned}
(gx)u &= g(xu) && \text{(hukum asosiatif pada } R\text{)}\\
&= (xu)g && \text{(berdasarkan Lemma 3.28)}\\
&= x(ug) && \text{(hukum asosiatif pada } R\text{)}\\
&= x(gu) && \text{(karena } u, g \in U(R) \text{ dan } U(R) \text{ grup abelian)}
\end{aligned}
$$

$= (xg)u$. (hukum asosiatif pada R)

Dengan demikian $gx = xg$. (3.9)

2. Akan ditunjukkan $xy = yx,\ \forall x, y \in X$. Ambil x dan $y \in X$.

a. Jika $x \in I$, maka $(2_R x - 1_R) \in U(R)$ sehingga diperoleh

$(2_R x - 1_R)y = y(2_R x - 1_R)$ (berdasarkan persamaan (3.9))

$\Leftrightarrow 2_R xy - y = y2_R x - y$ (distributif $\cdot$ terhadap $+$)

$\Leftrightarrow 2_R xy = y2_R x$ (kedua ruas ditambah y)

$\Leftrightarrow 2_R xy = 2_R yx$ (karena 2_R adalah unit dan berdasarkan (3.9))

$\Leftrightarrow xy = yx$. (kedua ruas dikali dengan 2_R^{-1})

Jadi, untuk $x \in I$ dan $y \in X$ diperoleh $xy = yx$. (3.10)

b. Jika $x \notin I$, maka ux dan $xu \in I$ untuk suatu $u \in U(R)$ sehingga diperoleh

$u(xy) = (ux)y$ (hukum asosiatif pada R)

$= y(ux)$ (berdasarkan (3.10))

$= (yu)x$ (hukum asosiatif pada R)

$= (uy)x$ (berdasarkan (3.9))

$= u(yx)$. (hukum asosiatif pada R)

Jadi, $\forall x \in X - I$ dan $y \in X$ diperoleh $xy = yx$. (3.11)

Berdasarkan (3.9), (3.10), dan (3.11) diperoleh bahwa R adalah suatu ring komutatif. ■

Selanjutnya, teorema-teorema di bawah ini menjelaskan kondisi yang harus dipenuhi agar suatu orbit di bawah aksi yang diberikan merupakan himpunan hingga. Suatu himpunan disebut hingga jika banyak elemen pada himpunan tersebut terbatas atau hingga.

Teorema 3.30

Misalkan R suatu ring unit regular. Jika $U(R)$ suatu grup siklis dan 2_R adalah unit di R, maka setiap orbit di bawah aksi regular adalah himpunan hingga.

Bukti:

Berdasarkan Lemma 3.22, sebarang orbit di bawah aksi regular adalah $\mathrm{O}(i)$, untuk suatu idempoten $i \in X$. Jika $\mathrm{O}(i) = \{i\}$ atau $U(R) = \{\text{identitas}\}$, maka $|\mathrm{O}(i)| = 1$ sehingga $\mathrm{O}(i)$ adalah himpunan hingga.

Selanjutnya, misalkan $\mathrm{O}(i) \neq \{i\}$ dan $U(R) \neq \{\text{identitas}\}$. Oleh karena itu, $|\mathrm{O}(x)| > 1$ dan $\mathrm{Stab}(i) = (U(R))_i = \{g \in U(R) | \varphi(g,i) = gi = i\}$ adalah proper subgrup dari $U(R)$. Misalkan $H = \mathrm{Stab}(i)$ dan a suatu generator dari $U(R)$. Karena $i \in X$ adalah suatu idempoten dan 2_R adalah unit di R, $2_R i - 1_R \neq 1_R$ dan $2_R i - 1_R \in U(R)$. Karena $(2_R i - 1_R) i = 2_R i^2 - i = 2_R i - i = i$, maka $(2_R i - 1_R) \in H$. Oleh karena itu $H \neq \{\text{identitas}\}$. Jadi, H dibangun oleh a^t untuk suatu bilangan bulat positif t dengan $t \geq 2$. Karena $a^t \in H$, maka $a^t i = i$. Untuk setiap $g \in U(R)$, terdapat $m \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $g = a^m$. Berdasarkan algoritma pembagian bilangan bulat, $m = r + qt$ untuk suatu $q, r \in \mathbb{Z}$

dengan $0 \le r \le t-1$. Sehingga, untuk setiap $g \in U(R)$, $gi = a^m i = a^{r+qt} i = a^r a^{qt} i = a^r \left(a^t\right)^q i = a^r i$ (karena $a^{tq} = \left(a^t\right)^q \in H$). Oleh karena itu, $\mathrm{O}(i) = \left\{a^r i \middle| r = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ t-1\right\}$ adalah himpunan hingga. ■

Teorema 3.31

Misalkan R suatu ring regular dengan elemen kesatuan. Jika $U(R)$ adalah grup siklis dan 2_R merupakan unit di R, maka $\mathrm{O}(i)$ yaitu orbit dari suatu idempoten $i \in X$ di bawah aksi konjugasi adalah himpunan hingga.

Bukti:

Bukti dari teorema ini serupa dengan salah satu bukti pada Teorema 3.30. Jika $\mathrm{O}(i) = \{i\}$ atau $U(R) = \{\text{identitas}\}$, maka $|\mathrm{O}(i)| = 1$ sehingga $\mathrm{O}(i)$ berhingga. Selanjutnya, misalkan $\mathrm{O}(i) \ne \{i\}$ dan $U(R) \ne \{\text{identitas}\}$ maka $|\mathrm{O}(i)| > 1$ dan $\mathrm{Stab}(i) = \left\{g \in U(R) \middle| \varphi(g,i) = gig^{-1} = i\right\}$ adalah proper subgrup dari $U(R)$. Misalkan $H = \mathrm{Stab}(i)$ dan a adalah generator dari $U(R)$. Karena $i \in X$ adalah suatu idempoten dan 2_R merupakan unit di R, $1_R \ne 2_R i - 1_R$ dan $(2_R i - 1_R) \in U(R)$. Karena

$$\begin{aligned}(2_R i - 1_R) i (2_R i - 1_R)^{-1} &= (2_R i - 1_R) i (2_R i - 1_R) && \text{(karena } (2_R i - 1_R)^{-1} = 2_R i - 1_R\text{)}\\ &= (2_R i - 1_R)(2_R i - 1_R) i && \text{(Lemma 3.28)}\\ &= (2_R i - 1_R)(2_R i^2 - i) && \text{(distributif } \cdot \text{ terhadap } +\text{)}\end{aligned}$$

$$= (2_R i - 1_R)(i) \qquad \text{(karena } i \text{ suatu idempoten)}$$

$$= 2_R i^2 - i \qquad \text{(distributif } \cdot \text{ terhadap } + \text{)}$$

$$= 2_R i - i \qquad \text{(karena } i \text{ suatu idempoten)}$$

$$= i\,,$$

maka $(2_R i - 1_R) \in H$. Oleh karena itu, $H \neq \{\text{identitas}\}$. Jadi, H dibangun oleh a^t untuk suatu bilangan bulat t dengan $t \geq 2$. Karena $a^t \in H$, maka $a^t i a^{-t} = i$. Untuk setiap $g \in U(R)$, terdapat $m \in \mathbb{Z}$ sedemikian sehingga $g = a^m$. Berdasarkan algoritma pembagian bilangan bulat, $m = r + qt$ untuk suatu $r, q \in \mathbb{Z}$ dengan $0 \leq r \leq t-1$. Oleh karena itu, untuk setiap $g \in U(R)$ memenuhi $gig^{-1} = a^m i a^{-m} = a^{r+qt} i a^{-(r+qt)} = a^r \left(a^{qt} i a^{-qt}\right) a^{-r} = a^r i a^{-r}$.

Dengan demikian, $\mathrm{O}(i) = \{a^r i a^{-r} \mid r = 0, 1, 2, \cdots, t-1\}$ adalah suatu himpunan hingga. ■

Misalkan R suatu ring regular dengan elemen kesatuan dan 2_R adalah unit di R. Jika $U(R)$ adalah suatu grup siklis, maka berdasarkan Teorema 3.31, $\mathrm{O}(i)$ yaitu orbit dari suatu idempoten $i \in X$ di bawah aksi konjugasi adalah himpunan hingga. Jika aksi konjugasi dari $U(R)$ pada X tersebut transitif, maka $X = \mathrm{O}(i)$. Dengan demikian, diperoleh X adalah himpunan hingga.