

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang Masalah

Suatu himpunan bersama-sama dengan satu atau lebih operasi yang berlaku pada himpunan itu disebut struktur aljabar (Wahyudin, 2000: 32). Misalnya, himpunan bilangan asli bersama-sama dengan operasi penjumlahan. Berdasarkan definisi tersebut, maka grup dan ring pun merupakan struktur aljabar.

Grup merupakan struktur aljabar yang menyangkut satu operasi biner dan memenuhi sejumlah sifat tertentu. Dalam teori grup, terdapat suatu konsep yang sangat penting yaitu aksi grup pada suatu himpunan. Aksi grup pada suatu himpunan biasanya digunakan untuk menyelidiki sifat-sifat penting pada grup hingga. Terdapat beberapa macam aksi grup, di antaranya aksi regular dan aksi konjugasi. Aksi tersebut dapat bersifat transitif atau trivial.

Struktur aljabar yang menyangkut dua operasi biner yang di dalamnya terdapat hubungan antara kedua operasi biner tersebut dan memenuhi sifat-sifat tertentu disebut ring. Salah satu ring yang penting untuk dipelajari adalah ring regular (ring regular Von-Neumann). Konsep mengenai ring regular Von Neumann semula muncul pada tahun 1936, ketika John Von Neumann mendefinisikan suatu ring regular sebagai suatu ring R yang memenuhi sifat bahwa untuk setiap elemen x di R , terdapat suatu elemen y di R sedemikian sehingga $x = xyx$. Suatu ring regular R adalah abelian jika setiap idempoten di R merupakan central.

Misalkan R suatu ring. Jika untuk sebarang elemen x di R , terdapat elemen unit u di R sedemikian sehingga $x = xux$, maka R disebut ring unit regular. Ring unit regular diperkenalkan pertama kali oleh Gertrude Ehrlich. Melalui jurnal yang berjudul "Unit-Regular Rings", Gertrude Ehrlich memaparkan sifat-sifat penting dari suatu ring unit regular. Dalam jurnal tersebut, telah dibuktikan bahwa jika R adalah ring unit regular dan 2_R adalah unit di R , maka setiap elemen di R merupakan penjumlahan dua unit di R . Ring regular maupun ring unit regular merupakan ring tak-komutatif. Dalam buku yang berjudul "Von Neumann Regular Rings", telah ditunjukkan bahwa setiap ring regular abelian merupakan ring unit regular (Goodearl, 1991: 43).

Atas dasar itulah, penulis tertarik untuk mengkaji lebih dalam mengenai sifat-sifat lainnya dari suatu ring unit regular R jika 2_R merupakan unit di R dan mengangkat kajian itu sebagai bahan penyusunan Tugas Akhir. Sifat-sifat dari ring unit regular R tersebut akan diselidiki dengan menggunakan konsep aksi grup.

Tugas Akhir ini berjudul "**Aksi Grup pada Suatu Ring Unit Regular.**"

Pada Tugas Akhir ini, penulis mencoba untuk menelaah beberapa definisi, memaparkan beberapa teorema, dan memberikan contoh yang berhubungan dengan teorema-teorema tersebut.

B. Rumusan Masalah

Misalkan R suatu ring dengan elemen kesatuan, X menotasikan himpunan semua elemen tak-nol dan bukan unit di R , dan $U(R)$ menotasikan

grup yang beranggotakan semua elemen unit di R . Misalkan $\varphi: U(R) \times X \rightarrow X$ suatu aksi grup $U(R)$ pada suatu himpunan tak-kosong X .

Beberapa sifat dari suatu ring unit regular akan ditentukan dengan menggunakan konsep aksi grup yang diberikan. Pada penyusunan Tugas Akhir ini, penulis merumuskan permasalahan sebagai berikut:

1. Bagaimana hubungan antara ring unit regular dengan ring regular abelian?
2. Kondisi apa yang harus dipenuhi agar suatu ring unit regular merupakan ring komutatif?
3. Misalkan $2_R \in R$ dengan $2_R = 1_R + 1_R$ dan 1_R adalah elemen kesatuan di R . Bagaimanakah jika 2_R adalah unit pada ring unit regular R dan $U(R)$ adalah grup siklis?

C. Batasan Masalah

Untuk mengkaji aksi grup pada suatu ring unit regular secara keseluruhan, diperlukan materi yang cukup luas dan mendalam. Oleh karena itu pada Tugas Akhir ini, kajiannya dibatasi pada aksi regular dan aksi konjugasi. Selain itu, yang akan dibahas pada Tugas Akhir ini yaitu sifat keberhinggaan orbit dari suatu elemen pada ring unit regular di bawah aksi grup $U(R)$ pada X dalam kasus $U(R)$ grup siklis.

D. Tujuan Penulisan

Setiap kegiatan memiliki tujuan tertentu yang ingin dicapai. Tujuan akan memberikan petunjuk mengenai hal-hal yang harus dilakukan dalam penyusunan Tugas Akhir ini. Sehubungan dengan permasalahan di atas, maka tujuan penulisan Tugas Akhir mengenai aksi grup pada suatu ring unit regular ini adalah:

1. Untuk mempelajari hubungan antara ring unit regular dengan ring regular abelian.
2. Untuk mempelajari kondisi yang harus dipenuhi agar suatu ring unit regular merupakan ring komutatif.
3. Untuk menyelidiki sifat ring unit regular R jika $2_R = 1_R + 1_R$ adalah unit di R dan $U(R)$ adalah grup siklis.

E. Manfaat Penulisan

Melalui penyusunan Tugas Akhir ini, diharapkan dapat memperkaya dan memperluas pengetahuan penulis dan para pembaca pada umumnya mengenai ring unit regular.

F. Metode Penelitian

Metode penelitian yang digunakan adalah studi kepustakaan (studi literatur). Studi kepustakaan yaitu mempelajari teori-teori dari sumber-sumber kepustakaan, seperti buku-buku, catatan, jurnal, dan referensi lainnya yang relevan dengan permasalahan yang sedang dibahas dalam Tugas Akhir ini yaitu mengenai aksi grup pada suatu ring unit regular.