BAB III

EXTENDED KALMAN *FILTER* DISKRIT

3.1 Pendahuluan

Extended Kalman *Filter* adalah perluasan dari Kalman *Filter*. *Extended* Kalman *Filter* merupakan algoritma yang digunakan untuk mengestimasi variabel keadaan $x \in R^n$ dari suatu sistem dinamik stokastik non linier.

Extended Kalman *Filter* ini cukup membantu karena pada praktiknya, banyak sekali sistem dinamik yang digunakan untuk menggambarkan perilaku suatu masalah adalah sistem dinamik non linier, yang tentu saja Kalman *Filter* tidak dapat bekerja untuk kasus tersebut.

Extended Kalman *Filter* mengestimasi keadaan dari suatu sistem dinamik stokastik non linier dengan persamaan

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k$$

dan persamaan pengukuran

$$z_k = h(x_k) + v_k$$

di mana f atau h merupakan fungsi non linier.

3.2 *Extended* Kalman *Filter*

Sebagaimana dijelaskan sebelumnya, *Extended* Kalman *Filter* adalah perluasan dari metode Kalman *Filter*, yaitu algoritma untuk mengestimasi variabel $x_k \in R^n$ dari suatu sistem dinamik stokastik non linier. *Extended* Kalman

Filter menggabungkan sistem dan pengukuran dalam mengestimasi variabel keadaan. Misal $x_k \epsilon R^n$ merupakan variabel keadaan dari sistem dinamik stokastik non linier dengan persamaan

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_{k-1}$$

dan persamaan pengukuran

$$z_k = h(x_k) + v_k. \tag{3.1}$$

di mana f atau h merupakan fungsi non linier, w_{k-1} dan v_k merupakan *white noise* yang saling bebas, tidak berkorelasi dengan x dan z, dan berdistribusi normal dengan rata-rata $\mathbf{0}$ dan kovarians $\boldsymbol{Q_{k-1}}$ dan $\boldsymbol{R_k}$ berturut-turut.

Extended Kalman *Filter* mencoba mengestimasi x_k dengan cara melinierkan persamaan tersebut dengan menggunakan deret Taylor sehingga Kalman *Filter* dapat diaplikasikan.

3.3. Proses Pelinieran

Extended Kalman *Filter* bekerja dengan cara melinierkan proses dan (atau) pengukuran dengan menggunakan deret Taylor di sekitar *mean* dan *kovarians*. Pada persamaan (3.1), perhatikan bahwa nilai dari w_{k-1} dan v_k tidak dapat diketahui, namun variabel keadaan x_k dan pengukuran z_k dapat diestimasi tanpa menghiraukan w_{k-1} dan v_k. Hal tersebut dapat dituliskan sebagai

$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1})$$

$$\hat{z}_k^- = h(\hat{x}_k^-)$$

perhatikan bahwa

$$x_k - \hat{x}_k^- = f(x_{k-1}) - f(\hat{x}_{k-1}) + w_{k-1}$$

dan,

$$z_k - \hat{z}_k^- = h(x_{k-1}) - h(\hat{x}_k^-) + v_k. \tag{3.2}$$

Sekarang, dengan menggunakan deret Taylor,

$$f(x_{k-1}) = f(\hat{x}_{k-1}) + f'(\hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + \frac{1}{2}f''(\hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})^2 + \cdots + w_{k-1}$$

$$h(x_k) = h(\hat{x}_k^-) + h'(\hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-) + \frac{1}{2}h''(\hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-)^2 + \cdots + v_k$$

Jika turunan dengan orde ≥ 2 diabaikan, maka persamaan (3.2) menjadi

$$x_k - \hat{x}_k^- \approx f'(\hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1}$$

$$z_k - \hat{z}_k^- \approx h'(\hat{x}_k^-)(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k$$

atau

$$x_k \approx \hat{x}_k^- + A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1}$$

$$z_k \approx \hat{z}_k^- + H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k \tag{3.3}$$

di mana

- x_k dan z_k merupakan nilai variabel keadaan dan pengukuran yang sebenarnya.
- $\hat{x}_k^-$ dan $\hat{z}_k^-$ merupakan nilai estimasi prior untuk x_k dan z_k.
- $\hat{x}_{k-1}$ merupakan nilai estimasi posterior pada saat ke k.
- A_k adalah matriks Jacobian dari turunan parsial f terhadap x saat $\hat{x}_{k-1}$.
- H_k adalah matriks Jacobian dari turunan parsial h terhadap x saat $\hat{x}_k^-$.

- w_{k-1} dan v_k merupakan galat.

3.4. Persamaan *Time Update*

Sama halnya seperti Kalman *Filter*, pada *Extended* Kalman *Filter* juga terdapat persamaan *time update*. Persamaan *time update* merupakan persamaan yang berguna untuk memproyeksikan keadaan saat ini dan residu taksiran untuk menghasilkan taksiran prior pada langkah selanjutnya.

Pada persamaan sebelumnya telah disebutkan bahwa nilai estimasi prior dari x_k adalah $\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1})$.

Definisikan

$$x_k - \hat{x}_k^- \approx e_k^- = A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1}$$

maka dapat ditentukan kovarians awal P_k^- yaitu

$$\begin{aligned}
P_k^- &= E[e_k^- e_k^{-T}] \\
&= E[(A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1})(A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1})^T] \\
&= E[(A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}) + w_{k-1})\ ((A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1}))^T + (w_{k-1})^T)] \\
&= E[A_k(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})(x_{k-1} - \hat{x}_{k-1})^T A_k^T + (w_{k-1})(w_{k-1})^T] \\
&= A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1}
\end{aligned} \tag{3.4}$$

3.5. Persamaan *Measurement Update*

Persamaan *measurement update* merupakan persamaan yang digunakan sebagai koreksi atas persamaan *time update* yang menghasilkan estimasi posterior.

Persamaan (3.3) di atas merupakan persamaan yang linier, sehingga metode Kalman *Filter* yang telah dijelaskan sebelumnya dapat digunakan. Perhatikan bahwa bagian ke dua dari persamaan (3.3) dapat diubah menjadi

$$Z_k = H_k x_k + v_k. \tag{3.5}$$

di mana $Z_k = z_k - \hat{z}_k^- + H_k \hat{x}_k^-$.

Nilai estimasi posterior pada persamaan (3.5) dapat ditentukan sebagai kombinasi linier dari nilai estimasi prior $\hat{x}_k^-$ dan pengukuran Z_k yaitu

$$\begin{aligned}
\hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k(Z_k - H_k \hat{x}_k^-) \\
\hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - \hat{z}_k^- + H_k \hat{x}_k^- - H_k \hat{x}_k^-) \\
\hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - \hat{z}_k^-) \\
\hat{x}_k &= \hat{x}_k^- + K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-))
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Definisikan $e_k = x_k - \hat{x}_k$, maka kovarians P_k dapat ditentukan yaitu

$$\begin{aligned}
P_k &= E[e_k {e_k}^T] \\
&= E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \\
&= E[(x_k - \hat{x}_k^- - K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-)))(x_k - \hat{x}_k^- - K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-)))^T] \\
&= E[e_k^- e_k^{-T} - K_k\left(z_k - h(\hat{x}_k^-)\right)e_k^{-T} - e_k^-(K_k\left(z_k - h(\hat{x}_k^-)\right))^T \\
&\qquad + K_k\left(z_k - h(\hat{x}_k^-)\right)(K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-)))^T] \\
&= E[e_k^- e_k^{-T} + K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-))(z_k - h(\hat{x}_k^-))^T {K_k}^T - (K_k\left(z_k - h(\hat{x}_k^-)\right))e_k^{-T} \\
&\qquad - e_k^-(K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-)))^T]
\end{aligned}$$

$$= E[e_k^- e_k^{-T} + K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-))(z_k - h(\hat{x}_k^-))^T K_k{}^T - (K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-))(x_k - \hat{x}_k^-))^T$$
$$- (x_k - \hat{x}_k^-)(K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-)))^T]$$

$$= E\left[e_k^- e_k^{-T}\right] + E[K_k\left(z_k - h(\hat{x}_k^-)\right)\left(z_k - h(\hat{x}_k^-)\right)^T K_k{}^T\big] - E[(K_k\left(z_k - h(\hat{x}_k^-)\right)(x_k -$$
$$\hat{x}_k^-))^T] - \mathrm{E}[(x_k - \hat{x}_k^-)(K_k\left(z_k - h(\hat{x}_k^-)\right))^T]$$

$$= P_k^- + K_k E[(H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k)(H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k)^T]K_k{}^T$$
$$- K_k E[(H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k)(x_k - \hat{x}_k^-))^T] - E[(x_k$$
$$- \hat{x}_k^-)(H_k(x_k - \hat{x}_k^-) + v_k)^T]K_k{}^T$$

$$= P_k^- + K_k(HP_k^- H^T + R_k)K_k^T - K_k HP_k^- - (K_k HP_k^-)^T$$

Seperti yang telah dijelaskan pada bab sebelumnya, maka P_k akan minimum jika

$$\frac{\partial(trace P_k)}{\partial K_k} = -2(H_k P_k^-)^T + 2K_k\left(H_k P_k^- H_k{}^T + R_k\right) = 0$$

$$K_k = P_k^- H_k{}^T (H_k P_k^- H_k{}^T + R_k)^{-1} \tag{3.7}$$

sehingga

$$P_k = (I - K_k H_k)P_k^- \tag{3.8}$$

3.6. Algoritma *Extended* Kalman *Filter*

Berdasakan uraian di atas, dapat dibuat suatu algoritma untuk mengestimasi variabel keadaan dengan metode *Extended* Kalman *Filter* yaitu:

1. Menentukan nilai keadaan awal yaitu $\hat{x}_{k-1} = x_0$ kemudian dihitung nilai matriks kovarian awal $P_{k-1} = P_0$ yang didapatkan dari data yang berdistribusi normal yaitu $X \sim N(x_0, P_0)$.
2. Menghitung nilai taksiran keadaan prior
$$\hat{x}_k^- = f(\hat{x}_{k-1}).$$
3. Menghitung kovarians residu prior
$$P_k^- = A_k P_{k-1} A_k^T + Q_{k-1}$$
4. Menghitung Kalman Gain
$$K_k = P_k^- H_k{}^T (H_k P_k^- H_k{}^T + R_k)^{-1}$$
5. Menghitung taksiran posterior
$$\hat{x}_k = \hat{x}_k^- + K_k(z_k - h(\hat{x}_k^-))$$
6. Menghitung kovarians posterior
$$P_k = (I - K_k H_k) P_k^-.$$

Perhitungan di atas dilakukan sampai semua observasi digunakan.

3.7 Estimasi Parameter dengan Metode Maksimum *Likelihood*

Sebagaimana dijelaskan di atas, *Extended* Kalman *Filter* merupakan metode yang diterapkan pada suatu model yang tidak linier. Namun sebelum dapat menggunakan *Extended* Kalman *Filter*, terlebih dahulu perlu dicari nilai-nilai parameter yang terdapat dalam model tersebut. Salah satu metode yang dapat digunakan untuk estimasi parameter adalah dengan menggunakan metode maksimum *likelihood*.

Perhatikan model non linier

$$x_k = f(x_{k-1}) + w_k$$

di mana $w_k \sim N(\mathbf{0}, \boldsymbol{Q})$ dan θ merupakan parameter yang tidak diketahui nilainya. dapat ditentukan fungsi *likelihood* yaitu fungsi kepadatan gabungan dari w_k yaitu

$$L(\theta) = \prod \left(\frac{1}{2\pi \boldsymbol{Q}}\right)^{1/2} \exp(-\frac{1}{2\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{2}})$$

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi \boldsymbol{Q}}\right)^{n/2} \exp(-\frac{1}{2\boldsymbol{Q}} \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{w_k}^{\boldsymbol{2}})$$

$$L(\theta) = \left(\frac{1}{2\pi \boldsymbol{Q}}\right)^{n/2} \exp(-\frac{1}{2\boldsymbol{Q}} \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} (x_k - f(x_{k-1}))^{\boldsymbol{2}})$$

Logaritma natural dari persamaan di atas adalah

$$\ln L(\theta) = -\frac{n}{2} \ln 2\pi \boldsymbol{Q} - \frac{1}{2\boldsymbol{Q}} \sum_{\boldsymbol{k=1}}^{\boldsymbol{n}} (x_k - f(x_{k-1}))^{\boldsymbol{2}}.$$

Untuk menentukan nilai θ maka hal yang diperlukan adalah menurunkan persamaan di atas terhadap θ yang kemudian hasilnya dibuat sama dengan nol. Yaitu

$$\theta = \frac{\partial \ln L(\theta)}{\partial \theta} = 0$$

Untuk selanjutnya, estimasi parameter dapat dilakukan dengan menggunakan bantuan *software* Eviews.