BAB 3

CONDITIONAL HETEROSCEDASTIC AUTOREGRESSIVE MOVING AVERAGE (CHARMA)

3.1 Model *Conditional Heteroscedastic Autoregressive Moving Average* (CHARMA)

Model *Conditional Heteroscedastic Autoregressive Moving Average* (CHARMA) diperkenalkan oleh Ruey S. Tsay pada tahun 1987. Model CHARMA menggambarkan perkembangan dari variansi bersyarat (*conditional variance*) dengan menggunakan koefisien acak autoregresif (*random coefficient autoregressive*) untuk menghasilkan heteroskedastik yang bersyarat (*conditional heteroscedastic*). Model CHARMA tidak sama dengan model ARCH, tetapi kedua model memiliki kemiripan pada variansi bersyarat orde dua (*second-order conditional*).

Misalkan r_t merupakan suatu runtun waktu dengan data observasi $r_1, r_2, \dots, r_t$. Secara umum, model CHARMA didefinisikan sebagai proses a_t yang memenuhi

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$a_t = \delta_{1t} a_{t-1} + \delta_{2t} a_{t-2} + \cdots + \delta_{mt} a_{t-m} + \eta_t \tag{3.1}$$

dimana

$\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$;

$\{\delta_t\} = \{(\delta_{1t}, \delta_{2t}, \dots, \delta_{mt})'\}$ adalah barisan vektor acak dengan mean 0 dan matriks kovarian Ω non negatif atau dapat ditulis $\delta_t \sim iid(0, \Omega)$;

$\{\delta_t\}$ saling bebas dengan $\{\eta_t\}$ (Tsay, 2005).

Untuk $m > 0$, model dapat dituliskan sebagai

$$a_t = a_{t-1}^{'}\delta_t + \eta_t$$

di mana $a_{t-1} = (a_{t-1}, \dots, a_{t-m})'$ adalah vektor dari nilai lag a_t pada waktu $t-1$. Variansi bersyarat a_t dari model CHARMA pada persamaan (3.1) adalah sebagai berikut

$$\begin{aligned}\sigma_t^2 &= \sigma_\eta^2 + a_{t-1}^{'}Cov(\delta_t)a_{t-1} \\ &= \sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, \dots, a_{t-m})\Omega(a_{t-1}, \dots, a_{t-m})' \qquad (3.2)\end{aligned}$$

Matriks kovarian Ω, merupakan matriks simetri dan elemen-elemen dari Ω dinotasikan dengan ω_{ij}. Karena matriks Ω merupakan matriks simetri maka $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ atau dapat ditulis sebagai berikut

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, \dots, a_{t-m})\begin{bmatrix}\omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1m}\\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2m}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \omega_{m1} & \omega_{m2} & \dots & \omega_{mm}\end{bmatrix}(a_{t-1}, \dots, a_{t-m})$$

$$= \sigma_\eta^2 + \sum_{i=1}^{m}\omega_{ii}a_{t-i}^2 + 2\sum_{\substack{i,j=1\\ i\neq j}}^{m}\omega_{ij}\,a_{t-i}a_{t-j} \qquad (3.3)$$

Untuk model CHARMA(m) yang paling sederhana dengan orde 1 ($m = 1$) yaitu CHARMA(1), model pada persamaan (3.3) menjadi

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + \omega_{11}a_{t-1}^2 \qquad (3.4)$$

Jika diperhatikan ternyata persamaan (3.4) merupakan model ARCH(1). Sedangkan untuk $m = 2$ atau CHARMA(2), model pada persamaan (3.3) menjadi

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, a_{t-2})\Omega(a_{t-1}, a_{t-2})'$$

$$= \sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, a_{t-2})\begin{bmatrix}\omega_{11} & \omega_{12}\\ \omega_{21} & \omega_{22}\end{bmatrix}(a_{t-1}, a_{t-2})'$$

$$= \sigma_\eta^2 + \omega_{11} a_{t-1}^2 + \omega_{21} a_{t-1} a_{t-2} + \omega_{12} a_{t-1} a_{t-2} + \omega_{22} a_{t-2}^2$$

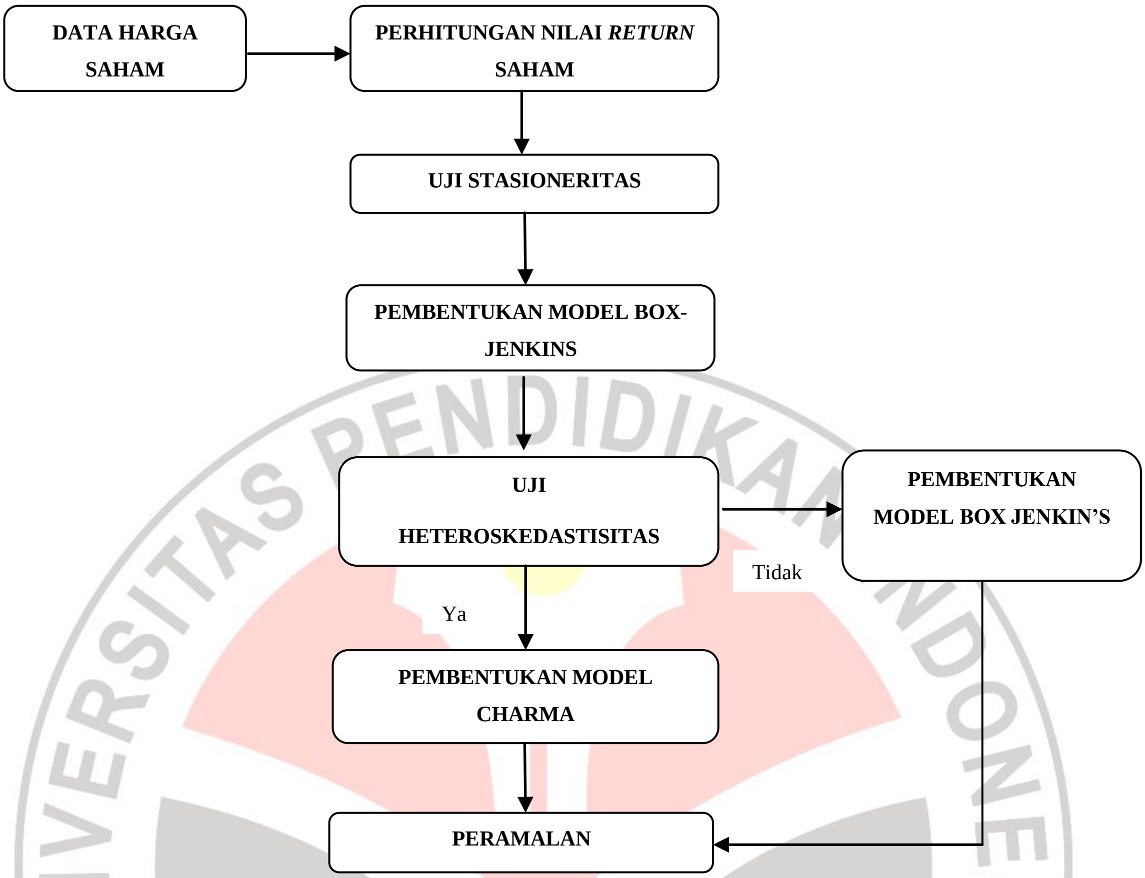
$$= \sigma_\eta^2 + \omega_{11} a_{t-1}^2 + 2\omega_{12} a_{t-1} a_{t-2} + \omega_{22} a_{t-2}^2 \qquad (3.5)$$

Dari persamaan (3.5) dapat terlihat bahwa model CHARMA(2) tidak sama dengan model ARCH(2) yaitu berbeda pada bentuk *cross-product* $a_{t-1}a_{t-2}$. Secara umum, variansi bersyarat dari model CHARMA(m) adalah ekuivalen dengan model ARCH(m) jika matriks kovarian Ω merupakan matriks diagonal. Karena Ω adalah matriks kovarian, yang definit positif (non negatif), dan $\sigma_t^2 \geq \sigma_\eta^2 > 0$ untuk setiap t. Dengan kata lain, kepositifan σ_t^2 secara otomatis terpenuhi dibawah model CHARMA.

Perbedaan yang nyata antara model ARCH dan CHARMA adalah dalam penggunaan *cross-product* dari nilai lag a_t dalam persamaan volatilitas (Tsay, 2005). Bentuk-bentuk *cross-product* dapat digunakan dibeberapa aplikasi sebagai contoh, dalam memodelkan barisan *return* saham, bentuk *cross-product* merupakan interaksi antara *return* sebelumnya.

3.2 Tahap Pembentukan Model CHARMA

Sebelum data runtun waktu dimodelkan menjadi model CHARMA, perlu dilakukan langkah-langkah pembentukan model yaitu sebagai berikut :



Gambar 3.1
Bagan Pembentukan Model CHARMA

3.3 Identifikasi Model

Identifikasi model runtun waktu Box Jenkin's yaitu model runtun waktu yang homoskedastisitas dilihat dengan menggunakan plot fak dan fakp. Tetapi pada model volatilitas CHARMA, belum ada alat khusus untuk mengidentifikasi model, sehingga dalam skripsi ini digunakan model CHARMA sederhana, yaitu CHARMA(1), CHARMA(2), dan CHARMA(3).

3.4 Estimasi Parameter

Pada tahap estimasi parameter, akan dihasilkan parameter-parameter yang dapat digunakan dalam perhitungan nilai *return*. Metode yang digunakan untuk mengestimasi model CHARMA ini adalah *Non Linear Maximum Likelihood Estimation*. Setelah diestimasi dengan menggunakan *Maximum Likelihood Estimation* (MLE), selanjutnya diiterasi dengan menggunakan algoritma Newton Rhapson, *Method of Scoring* atau iterasi Berndt, Hall, Hall dan Hausman (IBHHH).

Proses CHARMA didefinisikan sebagai

$$r_t = \mu_t + a_t$$

$$a_t = \delta_{1t} a_{t-1} + \delta_{2t} a_{t-2} + \cdots + \delta_{mt} a_{t-m} + \eta_t$$

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, \dots, a_{t-m})\Omega(a_{t-1}, \dots, a_{t-m})'$$

dimana $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$. Parameter-parameter yang tidak diketahui adalah σ_η^2 dan ω_{ij}. Misalkan parameter yang tidak diketahui dimuat η, dimana $\eta = (\sigma_\eta^2, \omega_{ij})$. Misalkan $R_1, R_2, \dots, R_t$ adalah sebuah sampel acak dari distribusi normal dengan mean μ dan variansi σ_t^2. Fungsi kepadatan peluang dari r_t adalah

$$f(r_t; \mu, \sigma_t^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \qquad (3.5)$$

Fungsi *likelihood* dari $R_1, R_2, \dots, R_t$ dinotasikan dengan $L(\mu_t, \sigma_t^2)$ menyatakan fungsi maksimum *likelihood* untuk observasi ke-t sebanyak ukuran sampel T adalah

$$L(\mu_t, \sigma_t^2) = \prod_{t=1}^{T} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}} \exp\left(-\frac{(r_t - \mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)$$

$$= (2\pi\sigma_t^2)^{-\frac{T}{2}} \exp\left(\sum_{t=1}^{T} - \frac{(r_t-\mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right) \tag{3.6}$$

Maka, fungsi log *likelihood* dari $L(\mu_t, \sigma_t^2)$ adalah

$$\ln L(\mu_t, \sigma_t^2) = \left[\ln(2\pi\sigma_t^2)^{-\frac{T}{2}} + \left(\sum_{t=1}^{T} - \frac{(r_t-\mu_t)^2}{2\sigma_t^2}\right)\right]$$

$$= -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \ln \sigma_t^2 - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \frac{(r_t-\mu_t)^2}{\sigma_t^2}$$

$$= -\frac{1}{2}\left[T \ln 2\pi + \sum_{t=1}^{T} \ln \sigma_t^2 + \sum_{t=1}^{T} \frac{(r_t-\mu_t)^2}{\sigma_t^2}\right] \tag{3.7}$$

Misalkan $l = \ln L(\mu_t, \sigma_t^2)$ dan $a_t = r_t - \mu_t$, maka persamaan log *likelihood* dari $L(\mu_t, \sigma_t^2)$ adalah

$$l = -\frac{1}{2}\left(T \ln 2\pi + \sum_{t=1}^{T} \ln \sigma_t^2 + \sum_{t=1}^{T} \frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right) \tag{3.8}$$

Persamaan (3.8) kemudian diturunkan terhadap η yaitu sebagai berikut

$$\frac{\partial l}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left[-\frac{1}{2}\left(T \ln 2\pi + \sum_{t=1}^{T} \ln \sigma_t^2 + \sum_{t=1}^{T} \frac{a_t^2}{\sigma_t^2}\right)\right]$$

di mana $\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, \dots, a_{t-m})\Omega(a_{t-1}, \dots, a_{t-m})'$ dan $\eta = (\sigma_\eta^2, \omega_{ij})$.

$$\frac{\partial l}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_t^2}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} + \frac{\left(2a\,\frac{\partial a_t}{\partial \eta}\sigma_t^2 - a_t^2\,\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}\right)}{\sigma_t^4}\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_t^2}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} - \frac{a}{\sigma_t^2}\frac{\partial a_t}{\partial \eta} + \frac{a_t^2}{2\sigma_t^4}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}$$

$$= -\frac{a}{\sigma_t^2}\frac{\partial a_t}{\partial \eta} - \frac{\sigma_t^2 - a_t^2}{2\sigma_t^4}\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} \tag{3.9}$$

Selanjutnya akan dicari $\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}$ yaitu dengan langkah sebagai berikut :

1. Pertama, σ_t^2 diturunkan terhadap σ_η^2

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \sigma_\eta^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma_\eta^2}(\sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, \dots, a_{t-m})\Omega(a_{t-1}, \dots, a_{t-m})' = 0 \tag{3.10}$$

2. Kedua, σ_t^2 diturunkan terhadap ω_{ij}

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega_{ij}} = \frac{\partial}{\partial \sigma_\eta^2}(\sigma_\eta^2 + (a_{t-1}, \dots, a_{t-m})\Omega(a_{t-1}, \dots, a_{t-m})'. \tag{3.11}$$

misalkan CHARMA(m), dimana $m = 1$ maka

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \sigma_\eta^2 + a_{t-1}\Omega\, a_{t-1}' \\ &= \sigma_\eta^2 + \omega_{11} a_{t-1}^2 \end{aligned} \tag{3.12}$$

σ_t^2 diturunkan terhadap ω_{11}

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega_{11}} = a_{t-1}^2 \tag{3.13}$$

Sedangkan untuk CHARMA(2)

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + \omega_{11} a_{t-1}^2 + 2\omega_{12} a_{t-1} a_{t-2} + \omega_{22} a_{t-2}^2$$

σ_t^2 diturunkan terhadap ω_{ij}

1. diturunkan terhadap ω_{11}

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega_{11}} = a_{t-1}^2 \tag{3.14}$$

2. diturunkan terhadap ω_{12}

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega_{12}} = a_{t-1} a_{t-2} \tag{3.15}$$

3. diturunkan terhadap ω_{22}

$$\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \omega_{22}} = a_{t-2}^2 \tag{3.16}$$

Untuk menemukan pendekatan estimasi parameter maka digunakan metode iteratif. Algoritma optimasi untuk iterasi dimulai dari suatu nilai awal, misalkan η_0. Kemudian η_0 digunakan untuk mencari η_1. Proses iteratif dilakukan sampai diperoleh $\eta_n = \eta_{n+1}$. Ada beberapa macam metode iteratif, diantaranya metode Newton-Rhapson, *Method of Scoring*, dan iterasi Berndt, Hall, Hall, and Hausman (BHHH) (Sanjoyo, 2006).

3.4.1 Metode Newton-Rhapson

Pada iterasi ini fungsi objektif L diaproksimasi dengan deret Taylor orde kedua di sekitar nilai awal η_0, yaitu

$$L = L|_{\eta_0} + \frac{\partial L}{\partial \eta'}|_{\eta_0}(\eta - \eta_0) + \frac{1}{2}(\eta - \eta_0)' \frac{\partial^2 L}{\partial_\eta \partial_{\eta'}}|_{\eta_0}(\eta - \eta_0) \qquad (3.17)$$

Untuk memperoleh kondisi optimum, persamaan (3.17) diturunkan terhadap parameter η dengan operasi sebagai berikut :

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial L}{\partial \eta'}|_{\eta_0}\right]' + \frac{\partial^2 L}{\partial \eta \partial \eta'}|_{\eta_0}(\eta - \eta_0) = 0 \qquad (3.18)$$

Dari persamaan (3.17) dan (3.18) maka dapat ditaksir nilai η_1

$$\frac{\partial L}{\partial \eta} = \left[\frac{\partial L}{\partial \eta'}|_{\eta_0}\right]' + \frac{\partial^2 L}{\partial \eta \partial \eta'}|_{\eta_0}(\eta_1 - \eta_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \eta_1 = \eta_0 - \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \eta \partial \eta'}|_{\eta_0}\right)^{-1}\left[\frac{\partial L}{\partial \eta}|_{\eta_0}\right]$$

Sehingga bentuk umumnya adalah

$$\eta_{n+1} = \eta_n - \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \eta \partial \eta'}|_{\eta_0}\right]^{-1} \frac{\partial L}{\partial \eta}\ |_{\eta_0}$$

di mana, $t_n = 1, P_n = \left[\frac{\partial^2 L}{\partial \eta \partial \eta'}|_{\eta_0}\right]^{-1}$ dan $\gamma_n = \frac{\partial L}{\partial \eta}\ |_{\eta_0}$

Iterasi ini dikatakan konvergen, apabila $\eta_{n+1} = \eta_n$.

3.4.2 *Method of Scoring*

Pada *Method of Scoring*, algoritma iterasi yang digunakan adalah nilai ekspektasi dari fungsi *likelihood*. Algoritma dari *method of scoring* dinyatakan sebagai :

$$\eta_{n+1} = \eta_n + 1\left[E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\eta\partial\,\eta'}|_{\eta_0}\right)\right]^{-1}\frac{\partial L}{\partial\eta}\;|_{\eta_0} \qquad (3.19)$$

Dimana $t_n = 1$, $P_n = -E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial\eta\partial\,\eta'}|_{\eta_0}\right)$ dan $\gamma_n = \frac{\partial L}{\partial\eta}\;|_{\eta_0}$.

3.4.3 Metode Iterasi Berndt, Hall, Hall, and Hausman (IBHHH)

Algoritma iterasi BHHH dieksploitasi dari algoritma iterasi *method of scoring*. Namun dalam iterasi BHHH ini ditambahkan aturan bilangan banyak (*law of large number*). Bagian yang dieksploitasi adalah P_n dari *method of scoring* menjadi bentuk

$$P_n = -\left[E\left(\frac{\partial^2(L_1 + L_2 + \cdots + L_N)}{\partial\eta\partial\eta'}\right)|_{\eta_n}\right]^{-1}$$

Diketahui

$L_1 + L_2 + \cdots + L_N = \sum_{t=1}^{N} L_t$ dan $E(X_t) = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} X_t$

sehingga diperoleh,

$$P_n = \left[-\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial^2 L_t}{\partial\eta\partial\eta'}|_{\eta_n}\right]^{-1} = \left[-\sum_{t=1}^{N}\frac{\partial L_t}{\partial\eta}\frac{\partial L_t}{\partial\eta'}\;|_{\eta_n}\right]^{-1}$$

bentuk umum dari iterasi BHHH dinyatakan dengan menggunakan algoritma iterasi sebagai berikut :

$$\eta_{n+1} = \eta_n + 1.\left[\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 L_t}{\partial\eta\partial\eta'}|_{\eta_n}\right]^{-1} \frac{\partial L}{\partial\eta}|_{\eta_n}$$

Metode yang digunakan untuk menemukan estimasi parameter dalam skripsi ini adalah metode iterasi BHHH. Untuk selanjutnya estimasi parameter akan dilakukan dengan bantuan *software* Eviews.

3.5 Verifikasi Model

Verifikasi model dilakukan untuk memeriksa kecocokan suatu model dengan data yang diteliti. Jika tidak terdapat kecocokan pada model yang telah dipilih, maka harus dirumuskan kembali dengan model yang baru. Sedangkan apabila terdapat beberapa model yang cocok, maka model yang dipilih adalah model dengan parameter yang lebih sederhana. Verifikasi pada model dengan variansi yang heteroskedastisitas, berbeda dengan verifikasi pada model dengan variansi yang homoskedastisitas. Berikut ini merupakan langkah-langkah verifikasi model heteroskedastisitas :

1. Uji Keberartian Koefisien

   Hipotesis yang harus diuji untuk mengetahui keberartian koefisien adalah

   H_0 : koefisien tidak berbeda secara signifikan dengan nol.

   H_1 : koefisien berbeda secara signifikan dengan nol.

   Adapun kriteria untuk uji keberartian koefisien adalah tolak H_0 jika $|\text{Koefisien}| > 2SE(\text{Koefisien})$. Dapat pula digunakan kriteria pengujian tolak H_0 jika nilai-p $< \alpha = 5\%$, artinya koefisien tidak berbeda secara signifikan dengan 0.

2. Perbandingan nilai AIC dan SC

   Untuk mendapatkan model terbaik, dipilih model dengan nilai *Information Criteria* yang terkecil. *Information Criteria* telah digunakan secara luas dalam analisis data runtun waktu untuk menentukan panjang lag yang paling cocok untuk diaplikasikan dalam suatu model. Adapun jenis-jenis *Information Criteria* antara lain :

   Akaike Information Criterion (AIC) $= -2\left(\frac{l}{N}\right) + \frac{2k}{N}$

   Schwarz Criterion (SC) $= -2\left(\frac{l}{N}\right) + \frac{k \ln N}{N}$

   dengan,

   $l = -\frac{1}{2}(N \ln 2\pi + \sum_{t=1}^{N} \ln \sigma_t^2 - \sum_{t=1}^{N} \left(\frac{a_t}{\sigma_t}\right)^2$

   k : banyaknya parameter

   N : banyaknya observasi

3.6 Peramalan

Tahap akhir dari permodelan adalah tahap peramalan. Model yang telah dipilih pada langkah sebelumnya bukan merupakan model sebenarnya, akan tetapi pendekatannya saja. Model yang telah dipilih tersebut adalah model terbaik yaitu peramalan yang memiliki residual kuadrat terkecil.

Pada model volatilitas CHARMA(2) yaitu

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + \omega_{11} a_{t-1}^2 + 2\omega_{12} a_{t-1} a_{t-2} + \omega_{22} a_{t-2}^2.$$

Peramalan untuk h periodenya yaitu

$$\hat{\sigma}_{t+h|t}^2 = E[\sigma_\eta^2 + \omega_{11} a_{t+h-1}^2 + 2\omega_{12} a_{t+h-1} a_{t+h-2} + \omega_{22} a_{t-2}^2 | \Omega_t]$$

$$= \hat{\sigma}_\eta^2 + \hat{\omega}_{11} a_{t+h-1|t}^2 + 2\hat{\omega}_{12} a_{t+h-1|t} a_{t+h-2|t} + \hat{\omega}_{22} a_{t-2|t}^2$$

dimana Ω_t adalah himpunan semua observasi dari waktu lampau sampai dengan t.

Pada model volatilitas CHARMA(m) yaitu

$$\sigma_t^2 = \sigma_\eta^2 + \sum_{i=1}^{m} \omega_{ii} a_{t-i}^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} \omega_{ij} a_{t-i} a_{t-j}$$

peramalan asal h dengan h periodenya yaitu

$$\hat{\sigma}_{t+h|t}^2 = E\left[\sigma_\eta^2 + \textstyle\sum_{i=1}^{m} \omega_{ii} a_{t+h-i}^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} \omega_{ij} a_{t+h-i} a_{t+h-j} \,\middle|\, \Omega_t \right]$$

$$= \hat{\sigma}_\eta^2 + \sum_{i=1}^{m} \hat{\omega}_{ii} \hat{a}_{t-i|t}^2 + 2 \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} \hat{\omega}_{ij} \hat{a}_{t-i|t} \hat{a}_{t-j|t}$$