BAB II

LANDASAN TEORI

2.1. *Return*

Return suatu aset finansial didefinisikan sebagai pengembalian dari investasi aset finansial. Harga suatu aset finansial sering tidak menentu, akibatnya para pelaku bisnis finansial selalu berusaha mencari dan menaksir model prediksi dari harga aset finansial yang berfluktuasi tersebut, dimana modelnya memberikan galat yang terkecil. Pencarian ini dapat dimulai dari aset *return* finansial itu sendiri. Karena belum diketahui secara pasti *return* yang diharapkan, maka diramalkan *expected return*. *Expected return* adalah rata-rata tertimbang dari berbagai *return* historis dengan probabilitas masing-masing *return* sebagai faktor penimbangnya

Return dirumuskan sebagai berikut :

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \tag{2.1.1}$$

r_t : *return* saham pada waktu t

P_t : nilai aset pada waktu t

dan

$$\Delta P = P_t \hat{r} \Delta t \tag{2.1.2}$$

dengan

P_t : nilai aset pada waktu t

ΔP : selisih antara P_t dan P_{t-1}

$\hat{r}$: *expected return*

Δt : selisih antara t dan $t-1$

dari persamaan (2.1.2), diperoleh

$$\frac{dP}{P} = \hat{r}dt$$

$$\int_{t-1}^{t} \frac{dP}{P} = \int_{t-1}^{t} \hat{r}dt$$

$$\ln P_t - \ln P_{t-1} = \hat{r}t - \hat{r}(t-1)$$

$$\ln P_t - \ln P_{t-1} = \hat{r}t - \hat{r}t + \hat{r}$$

$$\ln P_t - \ln P_{t-1} = \hat{r}$$

$$\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) = \hat{r} \qquad (2.1.3)$$

dengan kondisi pasar yang kondusif, nilai *return* r_t akan mendekati nilai hampiran $\hat{r}$, sehingga

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \approx \hat{r} = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) \qquad (2.1.4)$$

2.2. Model Runtun Waktu

2.2.1 Analisis Runtun Waktu

Runtun waktu adalah susunan observasi berurut menurut waktu. Runtun waktu tersebut dituliskan sebagai

$$z_t = z_1, z_2, \dots, z_n$$

Jika dari data masa lalu keadaan yang akan datang dari suatu runtun waktu dapat ditentukan dengan pasti, maka runtun waktu tersebut disebut deterministik. Sedangkan jika dari data masa lalu keadaan yang akan datang suatu runtun waktu hanya dapat menentukan struktur probabilistik keadaan yang akan datang, maka runtun waktu tersebut disebut statistik atau stokastik (Soejoeti, 1987).

Secara umum analisis runtun waktu mempunyai tujuan untuk pemodelan dan peramalan. Pemodelan bertujuan mendapatkan suatu model statistik yang cocok dalam merepresentasikan perilaku jangka panjang suatu data runtun waktu. Peramalan berkaitan dengan pembentukan model dan metode yang dapat digunakan untuk menghasilkan suatu hasil ramalan yang akurat.

2.2.2 Stasioneritas Proses Stokastik

Suatu runtun waktu dapat dianggap sebagai realisasi dari suatu proses statistik, yaitu proses di mana seseorang tidak bisa mengulang kembali keadaan untuk memperoleh himpunan observasi serupa seperti yang telah dikumpulkan sebelumnya.

Observasi z_t dapat dianggap sebagai realisasi dari variabel random Z_t dengan fungsi kepadatan peluang $f(z_t)$. Artinya, $z_1, z_2, \ldots, z_n$ dianggap mempunyai fkp gabungan $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. Jika suatu proses stokastik mempunyai fkp gabungan $f(z_{t+n_1}, z_{t+n_2}, \ldots, z_{t+n_m})$ yang independen dengan t , sebarang bilangan bulat m dan sebarang $n_1, n_2, \ldots, n_m$; maka struktur probabilistik tidak akan berubah seiring dengan bertambahnya waktu. Proses seperti ini dinamakan stasioner. Jika definisi ini berlaku tapi dengan m yang dibatasi, yaitu $m < p$, dengan p adalah bilangan bulat positif maka stasioneritas seperti itu dinamakan stasioner tingkat p.

Suatu data runtun waktu $\{Z_t\}$ dikatakan stasioner lemah apabila dua momen pertamanya konstan seiring dengan berjalannya waktu, atau dengan kata lain rata-rata, variansi, dan kovariannya bukan merupakan fungsi dari waktu (*t*).

Adapun momen yang dimiliki oleh suatu data runtun waktu diantaranya :

1. Momen pertama : $E(Z_t) = \mu$, artinya rerata dari suatu data runtun waktu adalah konstan.
2. Momen kedua : $Var(Z_t) = \sigma^2$, artinya varians dari suatu data runtun waktu tidak tergantung terhadap waktu.
3. Momen ketiga : $Cov(Z_t, Z_{t-k}) = \gamma_k$, artinya data runtun waktu bersifat independen atau tidak ada hubungan antara data runtun waktu yang satu dengan yang lainnya. γ_k adalah autokovariansi *lag* ke-k.

2.2.3 Fungsi Autokovariansi

Fungsi autokovariansi adalah himpunan autokovariansi dari berbagai *lag* $\{\gamma_k; k = 0,1,\ldots,n\}$. *Lag* ke-$k$ adalah pergeseran data sebanyak k langkah dari data awalnya, baik maju maupun mundur.

Dalam proses stasioner berlaku $E(Z_t) = \mu$ dan $Cov(z_t, z_{t-k}) = \gamma_k$, dimana μ dan γ_k untuk semua k adalah konstan. μ adalah rata-rata proses itu dan γ_k autokovarian pada *lag* ke-*k*. Proses ini mempunyai variansi konstan, yaitu:

$$Var(Z) = \sigma_z^2 = \gamma_0$$

Juga untuk semua bilangan bulat *k*, berlaku

$$\gamma_{-k} = \gamma_k$$

Karena

$$Cov(Z_t, Z_{t+k}) = Cov(Z_{t+k}, Z_t) = Cov(Z_t, Z_{t-k}) \quad (2.2.3)$$

sehingga yang perlu kita tentukan adalah γ_k saja untuk $k \geq 0$.

2.2.4 Fungsi Autokorelasi (fak) dan Fungsi Autokorelasi Parsial (fakp)

2.2.4.1 Fungsi Autokorelasi (fak)

Autokorelasi pada *lag* ke-*k* didefinisikan sebagai:

$$\rho_k = \frac{Cov(Z_t, Z_{t-k})}{\left[Var(Z_t).Var(Z_{t-k})\right]^{1/2}} = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad (2.2.4)$$

dan independen dengan skala pengukurannya. Fungsi autokorelasi (fak) dibentuk dari himpunan $\{\rho_k : k = 0,1,...\}$ dengan $\rho_0 = 1$.

Pada umumnya, μ dan γ_k ditaksir oleh

1) $\hat{\mu} = \bar{z} = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} z_t$

2) $\hat{\gamma}_k = C_k = \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N}(z_t - \bar{z})(z_{t-k} - \bar{z})$

sedangkan autokorelasi *lag* ke-k ditaksir oleh

$$\hat{\rho}_k = r_k = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_0} = \frac{C_k}{C_0} \quad (2.2.5)$$

Untuk runtun waktu stasioner yang normal, Bartlett menyatakan bahwa variansi dari r_k dirumuskan sebagai

$$var(r_k) \approx \frac{1}{N}(1 + 2\sum_{i=1}^{k} r_i^2),\ N \geq 50 \quad (2.2.6)$$

2.2.4.2 Fungsi Autokorelasi Parsial (Fakp)

Fungsi autokorelasi parsial (fakp) adalah himpunan autokorelasi parsial untuk berbagai *lag* *k*, ditulis $\{\phi_{kk};\ k = 1, 2, ...\}$, didefinisikan sebagai:

$$\phi_{kk} = \frac{|P_k^*|}{|P_k|}$$

dengan P_k adalah matriks autokorelasi $k \times k$, dan P_k^* adalah P_k dengan kolom terakhir diganti dengan $\begin{bmatrix} \rho_1 \\ \rho_2 \\ \vdots \\ \rho_k \end{bmatrix}$, dapat ditulis sebagai :

$$\phi_{kk} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & \rho_k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 & \rho_2 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & \rho_{k-3} & \cdots & \rho_1 & 1 \end{vmatrix}}$$

Sehingga $\phi_{11} = \frac{|P_1^*|}{|P_1|} = \rho_1$, $\phi_{22} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_2 - {\rho_1}^2}{1 - {\rho_1}^2}$ dan seterusnya.

Untuk *lag* yang cukup besar, Quinouille menyatakan bahwa

$var(\phi_{kk}) \approx \frac{1}{N}$. Jika $|r_k| < 2SE(r_k)$ (2.2.7)

untuk $k > K$, maka fakp tidak berbeda secara signifikan dengan nol (terputus setelah *lag* ke-K).

2.2.5 Model-model Runtun Waktu Dasar dari Box-Jenkins

2.2.5.1 Proses *Autoregressive* (AR)

Model AR mengasumsikan bahwa data periode sekarang dipengaruhi oleh data pada periode sebelumnya. Bentuk umum dari proses AR tingkat p atau AR(p) yaitu:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$z_t = \sum_{i=1}^{p} \phi_i z_{t-i} + \varepsilon_t$$

Dimana p menunjukkan order dari proses AR(p), $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$, dan $t - i$ menunjukan selisih waktu (*lag*) sebanyak suatu periode tertentu.

Bentuk AR dapat ditulis juga sebagai berikut :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + \varepsilon_t$$

$$z_t - \phi_1 z_{t-1} - \phi_2 z_{t-2} - \cdots - \phi_p z_{t-p} = \varepsilon_t$$

$$z_t - \phi_1 B z_t - \phi_2 B^2 z_t - \cdots - \phi_p B^p z_t = \varepsilon_t$$

$$\left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right) z_t = \varepsilon_t$$

$$\phi(B) z_t = \varepsilon_t \qquad (2.2.8)$$

dimana $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$. dengan $\phi(B) = \left(1 - \phi_1 B - \phi_2 B^2 - \cdots - \phi_p B^p\right)$ disebut operator AR(p). Secara umum, ciri teoritik proses AR(p) terdiri dari :

1) Fak turun secara eksponensial menuju nol.
2) Fakp terputus setelah *lag* ke-p.

2.2.5.1.1 AR(1)

AR (1) artinya model tersebut mengandung *lag* sebanyak satu periode. Proses AR(1) berbentuk:

$$z_t = \phi z_{t-1} + \varepsilon_t \tag{2.2.9}$$

Variansi dari z_t adalah $\sigma_z^2 = \frac{\sigma_t^2}{1-\phi_2}$, sehingga daerah stasioneritas untuk proses AR(1) harus memenuhi $-1 < \phi < 1$. Adapun ciri dari proses AR(1), yaitu :

1) Fak untuk AR(1) adalah $\rho_k = \phi^k$. Jika $0 < \phi < 1$, fak turun secara eksponensial menuju nol sedangkan jika $-1 < \phi < 0$, fak turun secara eksponensial menuju nol sambil berganti tanda.
2) Fakp terputus setelah *lag* ke-1 $(\phi_{11} = \rho_1 = \phi, \phi_{kk} = 0, k \geq 2)$.

2.2.5.1.2 AR(2)

AR (2) artinya model tersebut mengandung *lag* sebanyak dua periode. Proses AR(2) berbentuk:

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + \varepsilon_t \tag{2.2.10}$$

Variansi dari z_t adalah $\sigma_z^2 = \frac{(1-\phi_2)\sigma_t^2}{(1+\phi_2)(1-\phi_1-\phi_2)(1+\phi_1-\phi_2)}$, sehingga daerah stasioneritas untuk proses AR(2) harus memenuhi $-1 < \phi_2$, $\phi_1 + \phi_2 < 1$, dan $-\phi_1 + \phi_2 < 1$. Ciri dari proses AR(2), yaitu:

1) Fak untuk proses AR(2) adalah $\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2}$, turun secara eksponensial menuju nol.
2) Fakp terputus setelah *lag* ke-2 $\left(\phi_{11} = \frac{\phi_1}{1-\phi_2}, \phi_{22} = \phi_2, \phi_{kk} = 0, k \geq 3\right)$.

2.2.5.2 Proses *Moving Average* (MA)

Model MA mengasumsikan data periode sekarang dipengaruhi oleh nilai residual data periode sebelumnya. Model ini digunakan untuk meramalkan model ditingkat *error* menggunakan nilai *lag*. Bentuk umum dari model MA orde q atau MA(q) adalah:

$$z_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q}$$

$$z_t = \varepsilon_t + \theta_1 B \varepsilon_t + \theta_2 B^2 \varepsilon_t + \cdots + \theta_q B^q \varepsilon_t$$

$$z_t = \left(1 + \theta_1 B + \theta_2 B^2 + \cdots + \theta_q B^q\right) \varepsilon_t$$

$$z_t = \theta(B) \varepsilon_t \tag{2.1.11}$$

di mana $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma_t^2)$. Jika q berhingga, maka runtun waktu tersebut selalu stasioner. Bentuk $z_t = \theta(B)\varepsilon_t$ dapat ditulis sebagai

$$\theta(B)^{-1} z_t = \varepsilon_t \text{ atau } \left(1 - \pi_1 B - \pi_2 B^2 - \cdots - \pi_q B^q\right) z_t = \varepsilon_t.$$

Secara umum, ciri teoritik proses MA(q) terdiri dari :

1) Fakp turun secara eksponensial menuju nol.
2) Fak teputus setelah *lag* ke-q.

2.1.5.2.1 MA(1)

MA(1) artinya untuk meramalkan error digunakan nilai residual satu periode sebelumnya. Proses MA(1) berbentuk:

$$z_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} \tag{2.2.12}$$

adapun ciri dari proses MA(1), yaitu :

1) Fak terputus setelah *lag* ke-1 $\left(\rho_1 = \frac{\theta}{1+\theta^2}, \rho_k = 0, k \geq 2\right)$.

2) Fakp untuk proses MA (1) adalah $\phi_{kk} = \frac{(-1)^{k-1}\theta^k(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(k+1)}}$, turun secara geometris menuju nol.

3) Daerah invertibel memenuhi $-1 < \theta < 1$.

2.1.5.2.2 MA(2)

MA(2) artinya untuk meramalkan error digunakan nilai residual dua periode sebelumnya.Proses MA(2) berbentuk:

$$z_t = \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \theta_2 \varepsilon_{t-2} \tag{2.2.13}$$

adapun ciri dari proses MA(2), yaitu :

1) Fak terputus setelah *lag* ke-2 $\left(\rho_1 = \frac{\theta_1+\theta_1\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2}, \rho_2 = \frac{\theta_2}{1+\theta_1^2\theta_2^2}, \rho_k = 0, k \geq 3\right)$.

2) Fakp turun secara geometris menuju nol.

3) Daerah invertibel memenuhi $-1 < -\theta_2$, $-\theta_1 - \theta_2 < 1$, dan $\theta_1 - \theta_2 < 1$.

2.2.5.3 Proses *Autoregressive Moving Average* (ARMA)

Model ARMA merupakan suatu model campuran dari model AR dan MA yang berbentuk :

$$\begin{aligned} z_t &= \phi_1 z_{t-1} + \cdots + \phi_p z_{t-p} + \varepsilon_t + \theta_1 \varepsilon_{t-1} + \cdots + \theta_q \varepsilon_{t-q} \\ &= \textstyle\sum_{i=1}^{p} \phi_i z_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^{q} \theta_j \varepsilon_{t-j} \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

atau

$$\phi(B) z_t = \theta(B) \varepsilon_t \tag{2.2.15}$$

model ARMA dapat ditulis sebagai model MA, yaitu $z_t = \psi(B)\varepsilon_t$ atau model AR, yaitu $\pi(B)z_t = \varepsilon_t$, di mana

$$\psi(B) = \phi^{-1}(B)\theta(B) \text{ dan } \pi(B) = \theta^{-1}(B)\phi(B).$$

Adapun ciri teoretik dari proses ARMA(p,q) adalah grafik dari fak dan fakpnya turun secara eksponensial menuju nol.

2.2.6 Pembentukan Model

2.2.6.1 Identifikasi Model

Identifikasi model bertujuan untuk menentukan model yang merupakan representasi data runtun waktu $z_1, z_2, \ldots, z_n$.

Langkah-langkah yang harus dilakukan adalah sebagai berikut.

1) Menentukan mean dan variansi data runtun waktu.
2) Menentukan fak beserta $2SE(\rho_k)$ dari data runtun waktu.
3) Menentukan fakp beserta $2SE(\phi_{kk})$ dari data runtun waktu.
4) Membandingkan fak dan fakp data runtun waktu dengan fak dan fakp teoritik.

Sebelum pemodelan dilakukan, diperlukan hal berikut :

1) Plot data untuk melihat kestasioneran data
2) Grafik dari distribusi frekuensi untuk melihat asumsi normalitas
3) Informasi lain (kemiringan, keruncingan, dll)

jika $E(\bar{z}_t) = \bar{z} \neq 0$, maka model dituliskan sebagai $\hat{z}_t = z_t - \bar{z}$ sehingga perlu diuji apakah $\bar{z} = 0$. Hipotesis yang harus diuji adalah

$H_0 :\ \bar{z} = 0$

$H_0 :\ \bar{z} \neq 0$

jika $|\bar{z}| < 2SE(\bar{z})$, maka H_0 diterima ($\bar{z}$ tidak berbeda secara signifikan dengan nol).

2.2.6.2 Estimasi Parameter

Setelah beberapa model diidentifikasi, langkah selanjutnya adalah mengestimasi parameter yang ada pada model. Estimasi yang efisien yaitu estimasi yang meminimumkan kuadrat selisih antara nilai estimasi dengan nilai parameter sebenarnya. Untuk data yang cukup banyak, estimasi yang efisien adalah estimasi yang memaksimumkan fungsi Likelihood.

Diperlukan suatu uji apakah $\hat{\theta}$ atau $\hat{\phi}$ berbeda secara signifikan dengan nol atau tidak. Jika $\hat{\theta} < 2SE(\hat{\theta})$, maka $\hat{\theta}$ tidak berbeda secara signifikan dengan nol. Begitu pula jika $\hat{\phi} < 2SE(\hat{\phi})$, maka $\hat{\phi}$ tidak berbeda secara signifikan dengan nol.

2.2.6.3 Verifikasi Model

Verifikasi adalah pemeriksaan kecocokan antara model yang diestimasi dengan data yang menurunkannya. Langkah-langkah yang harus dilakukan pada tahap verifikasi ini adalah sebagai berikut :

1) Uji Keberartian Koefisien (θ atau ϕ)

   Hipotesis yang harus diuji adalah :

   H_0 : koefisien tidak berbeda secara signifikan dengan nol.

   H_1 : koefisien berbeda secara signifikan dengan nol.

   Adapun kriteria untuk uji keberartian koefisien adalah sebagai berikut.

   Tolak H_0 jika $|\hat{\phi}| \geq 2SE(\phi)$ atau $|\hat{\theta}| \geq 2SE(\theta)$

2) Uji Kecocokan (*lack of fit*)

   Hipotesis yang harus diuji adalah :

   H_0 : model sesuai

H_1 : model tidak sesuai

Statistik uji

$$\chi^2_{hit} = R = N \sum_{k=1}^{K} r_k^2 \hat{a}$$

adapun kriteria untuk uji kecocokan adalah sebagai berikut :

Tolak H_0 jika $\chi^2_{hit} \geq \chi^2_{tabel} = \chi^2_{k-p-q}$

atau dengan menggunakan *software* Minitab 15, kriteria untuk uji kecocokan adalah sebagai berikut:

Tolak H_0 jika $P.Value < \alpha = 5\%$.

3) Nilai Variansi Sesatan

Pilih model yang mempunyai variansi sesatan terkecil. Nilai variansi sesatan bisa ditentukan dengan menggunakan rumus

$$\sigma^2 = \frac{SS-MS}{DF} \tag{2.2.16}$$

SS : Kuadrat jumlah (*Sum Square*)

MS : Kuadrat Rata-rata (*Mean Square*)

DF : Derajat Kebebasan (*Degree Free*)

Jika pada langkah verifikasi menghasilkan lebih dari satu model cocok (sesuai) dengan data maka dalam penentuan model terbaik digunakan prinsip parsimoni, yaitu dengan memilih model yang paling sederhana.

2.2.7 Heteroskedastisitas

Faktor sesatan (*error*) pada suatu model regresi biasanya memiliki masalah atas pelanggaran asumsi-asumsi pada *error*. Suatu keadaan dikatakan heteroskedastisitas (*heterokedasticity)*, apabila suatu data memiliki variasi *error* yang tidak konstan untuk setiap observasi atau dengan kata lain melanggar asumsi $var(\varepsilon_t) = \sigma^2$. Jika *error* pada suatu model mengandung masalah heteroskedastisitas, maka akibatnya :

1. Estimator yang dihasilkan tetap konsisten, tetapi tidak *lag*i efisien karena ada estimator lain yang memiliki varians lebih kecil daripada estimator yang memiliki *error* yang bersifat heteroskedastis.
2. Standar *error* yang dihitung dari suatu regresi memiliki *error* yang bersifat heteroskedastis tidak *lag*i akurat, sehingga menyebabkan uji hipotesis yang menggunakan standar *error* tidak *lag*i akurat.

2.2.8 Model ARCH

Model *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (ARCH) pertama kali dikembangkan oleh seorang ahli ekonometrika yang bernama Robert Engle pada tahun 1982. Robert Engle menganalisis masalah variansi residual yang berubah-ubah untuk setiap observasi di dalam runtun waktu. Menurutnya, variansi residual yang berubah-ubah untuk setiap observasi terjadi karena variansi residual tidak hanya fungsi dari variabel independen tetapi juga bergantung pada seberapa besar residual di masa lalu. Suatu model ARCH(p) mengasumsikan bahwa

$$y_t = x_t'\mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \qquad (2.2.17)$$

$z_t \sim iid\ N(0,1)$, $\omega > 0$, dan $\alpha_i > 0$ untuk $i = 1,2,\dots,p$

dimana x_t' adalah vektor dari variabel bebas yang lemah berukuran n_t dan ε_t adalah rata-rata *return* yang diperbaiki (*mean-corrected return*) dari aset *return* waktu ke t dan σ_t adalah akar kuadrat dari σ_t^2 yang bernilai positif.

Model volatilitas ARCH memiliki beberapa kelemahan (Tsay, 2002), yaitu

1) Model ARCH cukup terbatas. Karena parameter menjadi sangat rumit pada saat ordenya besar. Sehingga, parameter yang ada dalam model ARCH terbatas.
2) Model ARCH mengasumsikan bahwa harga sebuah aset finansial memberi respon sama terhadap peningkatan volatilitas (*positive shock*) dan penurunan volatilitas (*negative shock*). Padahal pada kenyataannya harga sebuah aset finansial memberi respon berbeda terhadap *positive shock* dan *negative shock*. Respon yang berbeda tersebut merupakan gejolak (*shock)* yang bersifat asimetris, yang disebut disebut *leverage effect* (Black, 1976; Nelson, 1991).

Dikarenakan model volatilitas ARCH memiliki kelemahan untuk penentuan parameter menjadi sangat rumit pada saat ordenya besar dan tidak mampu untuk menangkap gejolak yang bersifat asimetris, maka diperlukan model lain yang dapat menutupi kelemahan tersebut.

2.2.9 Model GARCH

Model ARCH pada tahun 1986 oleh Tim Bollerslev dikembangkan menjadi model *Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (GARCH). Tim Bollerslev menyatakan bahwa variansi residual tidak hanya bergantung pada residual periode lalu tetapi juga variansi residual periode lalu. Model ini dikembangkan karena pada proses ARCH dengan orde tinggi memiliki kesulitan dalam masalah perhitungan dikarenakan modelnya yang sangat rumit. Lebih spesifik *lag*i, suatu model GARCH(p, q) mengasumsikan bahwa

$$y_t = x_t'\mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t$$

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2 \tag{2.2.18}$$

$$z_t \sim iid\, N(0,1), \omega > 0,\ \alpha_i > 0,\ \beta_j > 0,$$

$$i = 1,2,\dots,p \text{ dan } j = 1,2,\dots,q$$

dimana x_t' adalah vektor dari variabel bebas yang lemah berukuran n_t dan $\sum_{i=1}^{\max(p,q)}(\alpha_i + \beta_i) < 1$, $\alpha_i = 0$ untuk $i > m$, dan $\beta_j = 0$ untuk $j > s$. Pembatasan $(\alpha_i + \beta_i)$ mengakibatkan variansi tidak bersyarat dari ε_t berhingga, sedangkan variansi bersyaratnya berkembang sepanjang waktu.

Model volatilitas GARCH masih belum bisa menutupi kelemahan yang ada dalam model ARCH untuk menangkap gejolak (*shock)* yang bersifat asimetris, namun model GARCH dijadikan dasar untuk mengembangkan model-model untuk menangkap gejolak (*shock)* bersifat asimetris. Dalam tugas akhir ini akan dibahas salah satu model yang dapat digunakan untuk menutupi kelemahan yang dimiliki oleh model volatilititas ARCH dan GARCH, yaitu model *Threshold Autoregressive Conditional Heteroscedasticity* (TARCH) yang dikembangkan oleh Zakoian pada tahun 1991.

2.2.10 Uji Efek ARCH

Sebelum membentuk suatu model yang menangkap gejolak asimetris terlebih dahulu harus dipenuhi syarat, bahwa data runtun waktu yang digunakan harus memiliki masalah heteroskedastisitas atau keberadaan efek ARCH. Untuk mendeteksi keberadaan efek ARCH ada dua metode yang digunakan (Wahyudi, 2010), yaitu :

1) Uji efek ARCH dengan mengetahui pola residual kuadrat dari *correlogram*.

Jika fungsi autokorelasi dan fungsi autokorelasi parsial dari residual tidak berbeda dengan nol maka dapat disimpulkan bahwa model mengandung unsur ARCH. Uji keberadaan efek ARCH dalam residual kuadrat melalui fungsi autokorelasi maupun fungsi autokorelasi parsial dapat juga dianalisis melalui uji statistik dari Ljung-Box. Langkah pengujian Ljung-Box sebagai berikut

Hipotesis yang harus diuji adalah :

H_0 : k *lag* pertama fak dari barisan $\varepsilon_t^2 = 0$ (Residual model *return* tidak mengandung efek ARCH)

H_1 : k *lag* pertama fak dari barisan $\varepsilon_t^2 \neq 0$ (Residual model *return* mengandung efek ARCH)

statistik uji :

$$LB = n(n+2)\sum_{k=1}^{K}\left(\frac{\rho_k^2}{n-k}\right) \sim \chi^2_{(k-m)} \qquad (2.2.19)$$

dengan $\hat{\rho}_K = \frac{\sum_{k=1}^{K}(e_t^2-\sigma^2)(e_{t-k}^2-\sigma^2)}{\sum_{t-1}^{T}(e_t^2-\sigma^2)^2}$, dimana

k : banyak residual atau *lag* yang di ambil

m : banyaknya parameter

n : banyaknya observasi

adapun kriteria untuk uji kecocokan adalah sebagai berikut :

Tolak H_0 jika $LB > \chi^2_{(k-m)}$

atau dengan menggunakan *software* Eview 6.0, kriteria untuk uji efek ARCH adalah sebagai berikut :

Tolak H_0 jika $Prob.F < \alpha$

2) Uji ARCH-LM

Robert Engle tahun 1982 mengembangkan pengujian untuk mengetahui masalah heteroskedastisitas dalam data runtun waktu yang dikenal dengan uji ARCH *Lagrange Multiplier* (ARCH-LM). Ide dasar uji ini adalah bahwa variansi residual bukan hanya fungsi dari variabel independen tetapi tergantung pada residual kuadrat pada periode sebelumnya.

Misalkan $\varepsilon_t = y_t - \mu_t$ adalah residual model rata-rata Box Jenkins. Barisan ε_t^2 digunakan untuk memeriksa heteroskedastisitas bersyarat atau efek ARCH. Regresi linear dari variansi

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 + e_t \; ; \; t = m+1, \dots, N \qquad (2.2.20)$$

dengan e_t adalah *error*, m bilangan bulat, dan N adalah banyaknya observasi. Hipotesis yang harus diuji adalah :

H_0 : $\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_p = 0$ (Residual model *return* tidak mengandung efek ARCH)

H_1 : minimal satu tanda "=" tidak berlaku (Residual model *return* mengandung efek ARCH)

statistik uji :

$$F = \frac{(SSR_0 - SSR_1)/m}{SSR_1/(N-2m-1)} \quad (2.2.21)$$

dengan $SSR_0 = \sum_{m+1}^{N}(\varepsilon_t^2 - \bar{\omega})^2$ dan $SSR_1 = \sum_{m+1}^{N} \hat{e}_t{}^2$

dimana

$\bar{\omega}$: rata-rata sampel dari ε_t^2 dengan $\bar{\omega} = \frac{\sum_{t-1}^{T} \varepsilon_t^2}{T}$

$\hat{e}_t{}^2$: residual kuadrat terkecil

adapun kriteria untuk uji ARCH-LM adalah sebagai berikut :

Tolak H_0 jika $F > \chi_m^2(\varepsilon)$

jika ukuran sampel besar, menurut Engle model dalam persamaan (2.2.20) akan mengikuti distribusi *Chi-Squares* dengan derajat kebebasan p, yaitu:

$$(n-p)R^2 \sim \chi_P^2(\varepsilon) \quad (2.2.22)$$

sehingga kriteria pengujiannya menjadi Tolak H_0 jika $F > (n-p)R^2 \sim \chi_P^2(\varepsilon)$ atau dengan menggunakan *software* Eview 6.0, kriteria untuk ARCH-LM adalah sebagai berikut :

Tolak H_0 jika $Prob.F < \alpha$

2.3. Metode Maximum Likelihood pada Persamaan Regresi

Misalkan dimiliki model regresi sebagai berikut

$$Y = X\beta + \varepsilon \quad (2.3.1)$$

jika ε, berdistribusi normal dengan $E(\varepsilon) = 0$ dan $E(\varepsilon\varepsilon') = \sigma^2 I$ atau $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2 I)$, maka fungsi likelihood berbentuk

$$L(\beta, \sigma^2 | Y, X) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} exp\left\{-\frac{(Y - X\beta)'(Y - X\beta)}{2\sigma^2}\right\} \quad (2.3.2)$$

jika

$$V(\beta) = (Y - X\beta)'(Y - X\beta)$$

maka persamaan (2.2.2) dapat ditulis

$$L(\beta, \sigma^2 | Y, X) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} exp\left\{-\frac{V(\beta)}{2\sigma^2}\right\} \quad (2.3.3)$$

dengan Log likelihood-nya adalah

$$\ell(\beta, \sigma^2 | Y, X) = \ln L(\beta, \sigma^2 | Y, X) = -\left(\frac{N}{2}\right) ln 2\pi - \left(\frac{N}{2}\right) ln\, \sigma^2 - \frac{V(\beta)}{2\sigma^2} \quad (2.3.4)$$

Secara umum tidak memungkinkan untuk mencari penaksir $\widehat{\beta}$ sehingga $\frac{\partial \ell}{\partial \beta} = 0$, yang memungkinkan adalah mencari penaksir σ^2 . Diferensialkan persamaan (2.3.4) terhadap σ^2, samakan hasilnya dengan nol sehingga diperoleh penaksir

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{V(\beta)}{N}$$

Selanjutnya tulis kembali fungsi log likelihood dalam β dengan mengganti σ^2 oleh $\widehat{\sigma}^2$, yaitu

$$\ell(\beta, \sigma^2 | Y, X) = \ln L(\beta, \sigma^2 | Y, X) = -\left(\frac{N}{2}\right) ln 2\pi - \left(\frac{N}{2}\right) ln\, \sigma^2 - \left(\frac{N}{2}\right)$$

$$= -\left(\frac{N}{2}\right) ln 2\pi - \left(\frac{N}{2}\right) ln \frac{V(\beta)}{N} - \left(\frac{N}{2}\right)$$

$$= k - \left(\frac{N}{2}\right) ln \frac{V(\beta)}{N} \quad (2.3.5)$$

dengan $k = -\left(\frac{N}{2}\right) ln 2\pi - \left(\frac{N}{2}\right)$ adalah sebuah konstanta.

2.4. Transformasi Box Cox

Dalam pemodelan runtun waktu sering ditemukan kondisi dengan variansi yang tidak stasioner atau tidak konstan. Untuk menstasionerkan data dalam variansi dapat dilakukan dengan transformasi data sehingga didapatkan data yang stasioner dalam variansi. Salah satu transformasi yang biasa digunakan adalah transformasi Box Cox. Transformasi Box Cox adalah transformasi pangkat pada respon. Pertama kali diperkenalkan oleh Box dan Cox pada tahun 1964. Box Cox mempertimbangkan kelas transformasi berparameter tunggal, yaitu λ yang dipangkatkan pada variabel terikat Y, sehingga transformasinya menjadi Y^{λ}, dimana λ merupakan parameter yang ditaksir. Berikut ini adalah tabel beberapa nilai λ dengan transformasinya:

Tabel 2.1

Beberapa Nilai λ dengan Transformasinya

λ	Transformasi
-2	$\frac{1}{Y^2}$
-0.5	$\frac{1}{\sqrt{Y}}$
0	ln Y
0.5	$\sqrt{Y}$
2	Y^2

Bentuk transformasi yang digunakan dalam transformasi Box Cox, antara lain :

1) $W_i(\lambda) = \begin{cases} \frac{(Y_i{}^{\lambda} - 1)}{\lambda}, \lambda \neq 0 \\ \ln y \ , \lambda = 0 \end{cases}$

2) $V_i(\lambda) = \begin{cases} \frac{(Y_i{}^{\lambda} - 1)}{\lambda \hat{Y}^{\lambda-1}}, \lambda \neq 0 \\ \hat{Y} \ln Y_i \ , \lambda = 0 \end{cases}$

dimana i= $1, \dots, N$,

$$W_i(\lambda) = \begin{bmatrix} W_1(\lambda) \\ W_2(\lambda) \\ \vdots \\ W_T(\lambda) \end{bmatrix} = X\beta + \varepsilon \ ,$$

$$V_i(\ddot{e}) = \begin{bmatrix} V_1(\ddot{e}) \\ V_2(\ddot{e}) \\ \vdots \\ V_T(\ddot{e}) \end{bmatrix} = X\hat{a} + \mathring{a},$$

$\hat{Y} = \sqrt[N]{Y_1 Y_2 \dots Y} = \left(\prod_{i=1}^{N} Y_i\right)^{N}$,

dan Y merupakan regresi (2.3.1) dengan kelas transformasi berparameter tunggal $\ddot{e}$. Dalam penggunaannya bentuk transformasi dengan parameter V lebih disukai (Ispriyanti, 2004).

Prosedur Box Cox secara simultan menduga $\ddot{e}$ dari model tersebut. Parameter $\ddot{e}$ dapat ditaksir menggunakan metode maximum likelihood, dengan fungsi likelihood berbentuk

$$L\left(V_i(\ddot{e}), \hat{a}_j, \ddot{e}, \acute{o}^2\right) = \left(2\check{\delta}\acute{o}^2\right)^{-\frac{N}{2}} exp\left\{-\frac{(V(\ddot{e}) - X\hat{a})'(V(\ddot{e}) - X\hat{a})}{2\acute{o}^2}\right\} \qquad (2.4.1)$$

dimana i= $1, \dots, N$ dan j= $1, \dots, p-1$, dengan membuat $\frac{\partial L}{\partial \hat{a}} = 0$, diperoleh

$\left(X'X\right)\hat{a} = X'V(\ddot{e})$ diperoleh taksiran $\hat{\hat{a}} = \left(X'X\right)^{-1} X'V(\ddot{e})$

kemudian dengan membuat $\frac{\partial L}{\partial \acute{o}^2} = 0$, diperoleh

$$\hat{V}(\ddot{e}) = X\hat{a} = X\left(X'X\right)^{-1}X'V(\ddot{e}) \tag{2.4.2}$$

dimana

$$\hat{\acute{o}}^2(\ddot{e}) = \frac{1}{N}\,RSS(V(\ddot{e})) = \frac{1}{N}\,\left(V(\ddot{e}) - X\hat{a}\right)'\left(V(\ddot{e}) - X\hat{a}\right)$$

$$= \frac{1}{N}\left(V(\ddot{e}) - \hat{V}(\ddot{e})\right)'\left(V(\ddot{e}) - \hat{V}(\ddot{e})\right)$$

dengan

RSS = Jumlah residual kuadrat (*Residual sum of squares*)

N = Jumlah atau banyaknya observasi

Log likelihood-nya adalah

$$\ell\left(V(\ddot{e}), \hat{a}, \ddot{e}, \acute{o}^2\right) = \ln L = -\left(\frac{N}{2}\right) ln2\eth - \left(\frac{N}{2}\right) ln\, \acute{o}^2 - \frac{\left(V(\ddot{e})-V(\ddot{e})\right)'\left(V(\ddot{e})-\hat{V}(\ddot{e})\right)}{2\acute{o}^2}$$

$$= -\left(\frac{N}{2}\right) ln2\eth - \left(\frac{N}{2}\right) ln\, \acute{o}^2 - \frac{1}{2\acute{o}^2}\left(V(\ddot{e}) - \hat{V}(\ddot{e})\right)'\left(V(\ddot{e}) - \hat{V}(\ddot{e})\right)$$

$$= -\left(\frac{N}{2}\right) ln2\eth - \left(\frac{N}{2}\right) ln\frac{RSS(V(\ddot{e}))}{N} - \frac{N}{2RSS(V(\ddot{e}))}\left(V(\ddot{e}) - \hat{V}(\ddot{e})\right)'\left(V(\ddot{e}) - \hat{V}(\ddot{e})\right)$$

$$= -\left(\frac{N}{2}\right) ln2\eth - \left(\frac{N}{2}\right) ln\frac{RSS(V(\ddot{e}))}{N} - \frac{N}{2}$$

$$= k - \left(\frac{N}{2}\right) ln\frac{RSS(V(\ddot{e}))}{T} \tag{2.4.3}$$

dengan $k = -\left(\frac{N}{2}\right) ln2\eth - \left(\frac{N}{2}\right)$ adalah sebuah konstanta. Diperoleh bahwa taksiran $\ddot{e}$ meminimumkan $\left(\frac{N}{2}\right) ln\frac{RSS(V(\ddot{e}))}{N}$ dengan kata lain $\ddot{e}$ meminimumkan $RSS(V(\ddot{e}))$, sehingga taksiran $\ddot{e}$ dapat diketahui dari

$$RSS(V(\ddot{e})) = \left(V(\ddot{e}) - X\hat{a}\right)'\left(V(\ddot{e}) - X\hat{a}\right) \tag{2.4.4}$$