BAB III

THRESHOLD AUTOREGRESSIVE CONDITIONAL HETEROCEDASTICTY (TARCH)

3.1. Model TARCH

Proses TARCH merupakan modifikasi dari model ARCH dan GARCH. Pada proses ini nilai residu yang lebih kecil dari nol (*bad news*) dan nilai residu yang lebih besar dari nol (*good news*) memberi pengaruh yang berbeda terhadap variansinya. Model ini akan memberikan estimasi yang lebih baik daripada model konvensional karena pada model runtun waktu konvensional membutuhkan asumsi variansi residu yang konstan, biasa dikenal dengan istilah homoskedastisitas. Sedangkan, di dalam data finansial sering terjadi keadaan heteroskedastisitas. Disamping itu, pemodelan dengan model-model konvensional hanya mampu menggambarkan data runtun waktu yang volatilitasnya tidak berkelompok. Sementara itu pada data runtun waktu finansial umumnya mengalami pengelompokan volatilitas (*volatility clustering*). Sedangkan jika menggunakan ARCH atau GARCH, model tersebut tidak memperhitungkan adanya pengaruh volatilitas yang asimetris pada kondisi *bad news* dan kondisi *good news*.

3.1.1 Proses TARCH

Bentuk umum dari model TARCH(p,q) adalah

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 \, d_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \, \sigma_{t-j}^2 \qquad (3.1.1)$$

dengan

$$d_{t-1} = \begin{cases} 1, untuk \ \varepsilon_t < 0 \\ 0, untuk \ \varepsilon_t \geq 0 \end{cases}$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t z_t, \qquad \varepsilon_t | I_{t-1} \sim iidN(0, \sigma_t) \qquad (3.1.2)$$

$$y_t = x_t^{'} \mu + \varepsilon_t \qquad (3.1.3)$$

$$\omega > 0, \ \alpha_i > 0, \ \beta_j > 0, \ \text{dan} - 1 \leq \gamma_i \leq 1$$

$$i = 1,2, \dots, p \ \text{dan} \ j = 1,2, \dots, q$$

Kondisi pada saat terjadi *good news* ($\varepsilon_t > 0$) dan *bad news* ($\varepsilon_t < 0$) memberi pengaruh berbeda terhadap variansinya. Pengaruh good news ditunjukkan oleh α sedangkan pengaruh bad news ditunjukkan oleh $(\alpha + \gamma)$. Deret ε_t mempunyai rata-rata nol dan tidak berkorelasi. Misalkan y_t adalah himpunan pengamatan selama waktu t, dengan $t = 1,2, \dots, T$ yang dipengaruhi variabel eksogen $x_t^{'}$. $x_t^{'}$ adalah vektor dari variabel bebas yang lemah berukuran n_t. Sedangkan μ adalah vektor parameter atau koefisien dari variabel eksogen. Parameter $\mu, \omega, \alpha_i, \beta_j$, dan γ_i merupakan parameter-parameter yang di estimasi, sedangkan γ_i merupakan *leverage effect*. Jika *leverage effect* bernilai positif ($\gamma_i > 0$), artinya *negative shock* memiliki pengaruh yang kuat dibandingkan *positive shock*, begitu juga sebaliknya (Black, 1976). Dengan ε_t adalah gejolak (*shock*), z_t adalah suatu data runtun waktu dan I_t merupakan himpunan informasi yang diketahui pada waktu t.

3.1.2 Proses TARCH (1,1)

Proses TARCH yang paling sederhana adalah proses TARCH (1,1). Misalkan Z_t adalah suatu runtun waktu dengan data observasi $z_1, z_2, \ldots, z_t$. I_t merupakan himpunan informasi yang diketahui pada waktu t. Proses z_t dikatakan mengikuti proses TARCH (1,1) jika dipenuhi

$$\varepsilon_t | I_{t-1} \sim iid\ N(0, \sigma_t)$$

$$\sigma_t = \omega + \alpha\varepsilon_{t-1}^2 + \gamma\varepsilon_{t-1}^2\, d_{,-1} + \beta\sigma_{t-1}^2 \tag{3.1.4}$$

3.2. Estimasi Parameter

Parameter $\mu, \omega, \alpha_i, \beta_j,$ dan γ_i , diestimasi dengan menggunakan metode maximum likelihood**.** Sehingga harus diasumsikan bahwa ε_t memiliki fungsi kepadatan peluang (fkp) tertentu**.** Misalkan fkp dinotasikan $f(\varepsilon_t | I_{t-1})$ dan $\eta = (\mu, \omega, \alpha_i, \beta_j, \gamma_i)'$ adalah vektor dari parameter yang tidak diketahui.

Dengan mengasumsikan z_t berdistribusi normal, kemudian metode maximum likelihood dapat secara konsisten mengestimasi parameter umum. Fungsi likelihoodnya adalah

$$L(\mu, \sigma^2 | y_t, x'_t) = (2\pi\sigma^2)^{-\frac{N}{2}} exp\left\{-\sum_{t=1}^{N} \frac{(y - x'_t\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{3.2.1}$$

Dalam kasus ini fungsi log likelihoodnya adalah

$$\ell_N(\eta) = -\frac{1}{2}\left(N \ln 2\pi + \sum_{t=1}^{N} \ln \sigma_t^2 - \sum_{t=1}^{N}\left(\frac{y - x'_t\mu}{\sigma_t}\right)^2\right) \tag{3.2.2}$$

dengan $\varepsilon_t = y - x'_t\mu$, persamaan diatas menjadi

$$\ell_N(\eta) = -\frac{1}{2}\left(N \ln 2\pi + \sum_{t=1}^{N} \ln \sigma_t^2 - \sum_{t=1}^{N}\left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right)^2\right) \tag{3.2.3}$$

kemudian, turunkan fungsi log likelihood terhadap η

$$\frac{\partial \ell_N(\eta)}{\partial \eta} = -\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \eta}\left(N \ln 2\pi + \sum_{t=1}^{N} \ln \sigma_t^2 - \sum_{t=1}^{N}\left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t}\right)^2\right)$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma_t^2}.\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} + \left(\frac{2\varepsilon_t.\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \eta}.\sigma_t^2 - \varepsilon_t^2.\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}}{\sigma_t^4}\right)\right)$$

$$= -\frac{1}{2\sigma_t^2}.\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} - \frac{\varepsilon_t}{\sigma_t^2}.\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \eta} + \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^4}.\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta}$$

$$= -\frac{\varepsilon_t}{\sigma_t^2}\frac{\partial \varepsilon_t}{\partial \eta} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sigma_t^4}(\sigma_t^2 - \varepsilon_t^2)\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \eta} \qquad (3.2.4)$$

Penurunan log likelihood terhadap η berturut-turut adalah perhitungan dari $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \eta}$, dimana spesifikasi model TARCH adalah dalam kondisi variansi σ_t. Penyelesaian akhir yang diinginkan adalah memperoleh $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \eta}$. Untuk memperoleh $\frac{\partial \sigma_t}{\partial \eta}$, ada beberapa tahapan yang harus dilakukan, yaitu

1) Tahap pertama, persamaan (3.1.1) diturunkan terhadap μ

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \mu} = \frac{\partial}{\partial \mu}\left(\omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2\, d_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2\right) \qquad (3.2.5)$$

2) Tahap kedua, persamaan (3.1.1) diturunkan terhadap ω

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega}\left(\omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2\, d_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2\right) = 1 \qquad (3.2.6)$$

3) Tahap ketiga, persamaan (3.1.1) diturunkan terhadap α_i

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \alpha_i} = \frac{\partial}{\partial \alpha_i}\left(\omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2\, d_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2\right) \qquad (3.2.7)$$

4) Tahap keempat, persamaan (3.1.1) diturunkan terhadap β_j

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \beta_j} = \frac{\partial}{\partial \beta_j}\left(\omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2\, d_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2\right) \qquad (3.2.8)$$

5) Tahap kelima, persamaan (3.1.1) diturunkan terhadap γ_i

$$\frac{\partial \sigma_t}{\partial \gamma_i} = \frac{\partial}{\partial \gamma_i}\left(\omega + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2\, d_{t-1} + \sum_{j=1}^{q} \beta_j\, \sigma_{t-j}^2\right) \qquad (3.2.9)$$

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA PERPUSTAKAAN

Untuk mendapatkan pendekatan estimasi parameter maka digunakan metode iteratif. Algoritma optimisasi untuk iterasi dimulai dari suatu nilai awal, misalkan η_0. Kemudian η_0 digunakan untuk mencari η_1. Proses iteratif estimator η_1 dilakukan sampai diperoleh jarak yang kecil antara η_{t-1} dan η_1. Ada tiga metode iteratif yang dapat digunakan, yaitu metode Newton-Raphson, *Method of Scoring*, dan iterasi Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH).

3.2.1 Metode Newton-Raphson

Secara umum metode Newton-Raphson melakukan aproksimasi dengan deret Taylor orde kedua untuk fungsi likelihood di sekitar nilai awal, yaitu η_0

$$\ell_t(\eta) = \ell_t|_{\eta_0} + \left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0} (\eta - \eta_0) + \frac{1}{2}(\eta - \eta_0)' \left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_0} (\eta - \eta_0) \tag{3.2.10}$$

Untuk memperoleh kondisi optimum, fungsi (3.2.10) diturunkan terhadap parameter η (Sanjoyo, 2006), menjadi

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta} = 0 + \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right] + \left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_0} (\eta - \eta_0) = 0 \tag{3.2.11}$$

berdasarkan persamaan (3.2.10) dan (3.2.11) secara implisit dapat ditaksir η_1

$$\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta} = \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right] + \left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_1} (\eta_1 - \eta_0) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right] = -\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_1} (\eta_1 - \eta_0) \Leftrightarrow -\left[\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_1}\right]^{-1} \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right] = (\eta_1 - \eta_0)$$

$$\Leftrightarrow -\left[\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial \eta \partial \eta'}\right|_{\eta_1}\right]^{-1} \left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial \eta'}\right|_{\eta_0}\right] + \eta_0 = \eta_1$$

Sehingga diperoleh bentuk umumnya

$$\eta_{m+1} = -\left[\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'}\right|_{\eta_1}\right]^{-1}\left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial\eta'}\right|_{\eta_0}\right] + \eta_m \tag{3.2.12}$$

atau

$$\eta_{m+1} = -\left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial\eta'}\right|_{\eta_0}\right] P_m + \eta_m \tag{3.2.13}$$

dengan

$$P_m = \left[\left.\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'}\right|_{\eta_m}\right]^{-1}$$

3.2.2 *Method of Scoring*

Pada *Method of Scoring*, algoritma iterasi menggunakan nilai ekspektasi dari fungsi likelihood. Algoritmanya dinyatakan sebagai berikut

$$\eta_{m+1} = \eta_m + \left[E\left(\left.\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'}\right)\right|_{\eta_m}\right)\right]^{-1}\left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial\eta}\right|_{\eta_m}\right] \tag{3.2.14}$$

atau

$$\eta_{m+1} = \eta_m - P_m\left[\left.\frac{\partial \ell_t}{\partial\eta}\right|_{\eta_m}\right] \tag{3.2.15}$$

dengan

$$P_m = \left[-E\left(\left.\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'}\right)\right|_{\eta_m}\right)\right]^{-1}$$

3.2.3 Iterasi Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH)

Metode ini mengeksploitasi algoritma iterasi dari *Method of Scoring*. Bagian yang dieksploitasi adalah P_m dari *Method of Scoring* menjadi bentuk

$$P_m = \left[-E\left(\left(\frac{\partial^2(\ell_1+\ell_2+\ldots+\ell_N)}{\partial\eta\partial\eta'} \right) \bigg|_{\eta_m} \right) \right]^{-1} = \left[-E\left(\left(\frac{\partial^2 \sum_{t=1}^{N} \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'} \right) \bigg|_{\eta_m} \right) \right]^{-1}$$

$$= \left[-E\left(\left(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'} \right) \bigg|_{\eta_m} \right) \right]^{-1}$$

selanjutnya

$$P_m = \left[-\sum_{t=1}^{N} E\left(\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'} \right) \bigg|_{\eta_m} \right) \right]^{-1}$$

$$= \left[-NE\left(\left(\frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'} \right) \bigg|_{\eta_m} \right) \right]^{-1}$$

$$= \left[-N \frac{1}{N} \left(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'} \right) \bigg|_{\eta_m} \right]^{-1}$$

akhirnya diperoleh

$$P_m = \left[-\left(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'} \right) \bigg|_{\eta_m} \right]^{-1}$$

bentuk umum dari skema iterasi BHHH hampir sama dengan *Method of Scoring*, seperti pada persamaan (3.2.14) yang membedakannya adalah persamaan dari P_m . Sehingga bentuk umum dari iterasi BHHH adalah

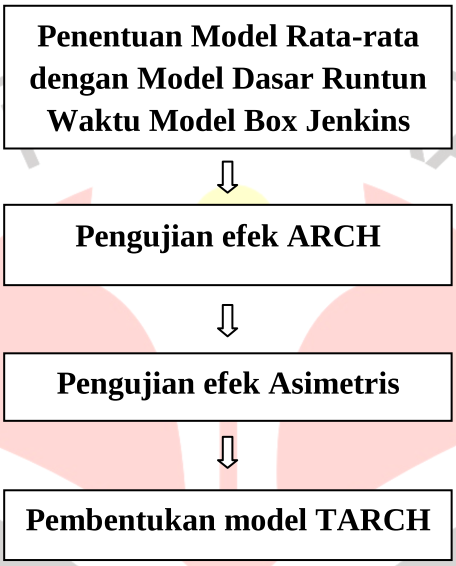
$$\eta_{m+1} = \eta_m + \left[-\left(\sum_{t=1}^{N} \frac{\partial^2 \ell_t}{\partial\eta\partial\eta'} \right) \bigg|_{\eta_m} \right]^{-1} \left[\frac{\partial \ell_t}{\partial\eta} \bigg|_{\eta_m} \right] \qquad (3.2.16)$$

Dari ketiga metode iteratif yang ada, metode yang digunakan untuk menemukan pendekatan estimasi parameter dalam tugas akhir ini metode iteratif yang digunakan adalah Iterasi Berndt, Hall, Hall & Hausman (BHHH). Untuk selanjutnya perhitungan akan dilakukan dengan bantuan *software Eviews 6.0*.

UNIVERSITAS PENDIDIKAN INDONESIA
PERPUSTAKAAN

3.3. Identifikasi Model

Sebelum data runtun waktu dimodelkan ke model TARCH, terlebih dahulu harus dilakukan beberapa langkah identifikasi model. Langkah-langkah yang dilakukan untuk identifikasi model dapat dilihat dalam gambar 3.1



Gambar 3.1
Langkah-langkah Indentifikasi Model TARCH

3.4. Pengujian Efek Asimetris

Untuk memeriksa keberadaan pengaruh efek *leverage* (efek asimetris) terlebih dahulu data runtun waktu harus dimodelkan ke dalam model GARCH (Enders, 2004). Kemudian dari model tersebut diuji apakah memiliki efek asimetris dengan melihat korelasi antara $\varepsilon_t^{\,2}$ (standar residual kuadrat) dengan ε_{t-p} (lag standar residual) menggunakan *cross correlation*. *Cross correlation* dari 2 runtun/barisan (*series*) didefinisikan sebagai berikut

$$r_{xy}(l) = \frac{c_{xy}(l)}{\sqrt{c_{xx}(0)}.\sqrt{c_{yy}(0)}}, l = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm m$$

dimana

$$c_{xy}(l) = \begin{cases} \sum_{t=1}^{N-l} \frac{(x_t-\bar{x}).(y_{t-l}-\bar{y})}{N}, & l = 0, +1, +2, \dots, +m \\ \sum_{t=1}^{N+l} \frac{(x_t-\bar{x}).(y_{t+l}-\bar{y})}{N}, & l = 0, -1, -2, \dots, -m \end{cases}$$

dengan

x : barisan ${\varepsilon_t}^2$ (standar residual kuadrat)

l : lag (tingkat observasi)

y : barisan ε_{t-p} (lag standar residual)

N : Banyaknya Observasi

hipotesis yang diuji adalah

Ho : runtun waktu bersifat simetris

H_1 : runtun waktu bersifat asimetris

kriteria pengujian Tolak Ho, jika korelasi $\neq 0$.

3.5. Verifikasi Model

3.5.1 Pengujian Berdasarkan Keberartian Koefisien

Pada pengujian berdasarkan keberartian koefisien, yang menjadi statistik uji adalah nilai probabilitas dari masing-masing koefisien, dengan hipotesis

H_0 : koefisien tidak berpengaruh secara signifikan terhadap model

H_1 : koefisien berpengaruh secara signifikan terhadap model

kriteria untuk uji keberartian koefisien adalah sebagai berikut:

Tolak H_0 jika probabilitas $< \alpha = 5\%$.

3.5.2 Pengujian Berdasarkan Perbandingan Nilai AIC dan SC

Model terbaik dapat dipilih berdasarkan nilai *Akaike Information Criterion* (AIC) dan *Schwarz Criterion* (SC). Model terbaik adalah model dengan nilai AIC dan SC paling kecil. AIC dan SC didefinisikan sebagai berikut

$$AIC = N \ln \hat{\sigma}_t^2 + 2p$$

$$SC = N \ln \hat{\sigma}_t^2 + p \ln N$$

dengan

$\hat{\sigma}_t^2$: Estimasi dari rata-rata error

N : Jumlah observasi

p : Jumlah parameter yang di estimasi

3.6. Peramalan

Langkah terakhir dalam pembentukan model adalah melakukan peramalan untuk beberapa periode selanjutnya. Berdasarkan model yang paling sesuai, akan ditentukan distribusi bersyarat observasi yang akan datang berdasarkan pola data di masa lalu.