BAB 3

RING ABELIAN

Sistem matematika yang terdiri dari satu himpunan takkosong dengan dua operasi biner yang memenuhi beberapa syarat tertentu dinamakan ring. Dalam ring terdapat perluasan pembahasan yaitu mengenai ring abelian. Secara eksplisit ring abelian didefinisikan sebagai berikut:

Definisi 3.1 (N Agayev et al., 2010:466)

Suatu ring R disebut abelian jika semua elemen idempoten di R adalah *central*, yaitu berlaku $ae = ea$ untuk setiap $a \in R$ dan idempoten $e \in R$.

Contoh

1. Himpunan bilangan bulat Z adalah ring abelian, karena semua idempoten di Z yaitu 0 dan 1 berlaku $ae = ea, \forall a \in Z$. Ambil sembarang $x \in Z$ perhatikan bahwa,

untuk $e = 0$

$$x0 = 0 = 0x$$

untuk $e = 1$

$$x1 = x = 1x$$

2. Himpunan matrik atas $\mathbb{R}$ yang berukuran 2×2 atau biasa dinotasikan $M_2(\mathbb{R}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid \_, b.c.d \in \mathbb{R}\right\}$ adalah bukan ring abelian.

Misalkan $M_2(\mathbb{R})$ adalah suatu ring, ambil $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ karena $e^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e \in M_2(\mathbb{R})$, artinya e suatu idempoten di $M_2(\mathbb{R})$. Ambil sembarang $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, perhatikan bahwa

$$ae = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ea = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

artinya bahwa $ae \neq ea$, $a \in M_2(\mathbb{R})$. Oleh karena itu $M_2(\mathbb{R})$ bukan ring abelian.

Definisi 3.2 (Agayev dan baser, 2006:285)

Misalkan R suatu ring, annihilator kanan dari suatu elemen $a \in R$ dinotasikan

$$r_R(a) = \{r \in R | ar = 0\}.$$

Sedangkan annihilator kiri dari suatu elemen $a \in R$ dinotasikan

$$l_R(a) = \{r \in R | ra = 0\}.$$

Selanjutnya pada pembahasan akan mengacu pada annihilator kiri

Contoh

Misalkan himpunan $(Z_6, +, \cdot)$ merupakan suatu ring, maka annihilator dari suatu elemen di Z_6 yaitu,

$$l(\bar{0}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$l(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$$

$$l(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$l(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$l(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$l(\bar{5}) = \{\bar{0}\}$$

Definisi 3.3 (N Agayev, et al., 2009:236)

Suatu ring R disebut semikomutatif jika untuk setiap $a \in R$, $l_R(a)$ adalah ideal di R, dimana untuk setiap $k, h \in l_R(a)$ dan $r \in R$ harus memenuhi $k - h \in l_R(a)$ dan $rk \in l_R(a)$. Dengan kata lain, untuk sembarang $a, b \in R$, $ba = 0$ maka $bRa = 0$.

Contoh:

Apakah ring $(Z_6, +, \cdot)$ merupakan ring semikomutatif?

Jawab

Annhilator dari suatu elemen di Z_6 yaitu,

$$l(\bar{0}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$l(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$$

$$l(\bar{2}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$l(\bar{3}) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$l(\bar{4}) = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$l(\bar{5}) = \{\bar{0}\}$$

Sekarang perhatikan,

$$l(\bar{0})Z_6 = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}\}$$

$$l(\bar{1})Z_6 = \{\bar{0}\}$$

$$l(\bar{2})Z_6 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$l(\bar{3})Z_6 = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$$

$$l(\bar{4})Z_6 = \{\bar{0}, \bar{3}\}$$

$$l(\bar{\bar{5}})Z_6 = \{\bar{0}\}$$

Oleh karena untuk setiap $a \in Z_6$, $l_R(\bar{a})$ adalah ideal di Z_6 maka ring $(Z_6, +,\cdot)$ merupakan ring semikomutatif.

Definisi 3.4 (N Agayev, et al., 2009:235)

Suatu ring disebut p.p-ring (principal projective ring) jika annihilator kiri dari suatu elemen di R dibangun oleh suatu idempoten. Dengan kata lain, untuk setiap $a \in R$, ada suatu idempoten $e \in R$, $l_R(a) = Re$ mengakibatkan $ea = 0$ dan $= be$, dimana $l_R(a) = \{ b \in R \mid ba = 0\}$ dan suatu ideal utama yang dibangun oleh suatu idempoten $e \in R$,yaitu $Re = \{re \mid r \in R\}$.

Contoh :

Apakah ring $(Z_5, +,\cdot)$ merupakan p.p-ring?

Jawab

Annhilator dari suatu elemen di Z_5 yaitu,

$$l(\bar{0}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}\}$$

$$l(\bar{1}) = \{\bar{0}\}$$

$$l(\bar{2}) = \{\bar{0}\}$$

$$l(\bar{3}) = \{\bar{0}\}$$

$$l(\bar{4}) = \{\bar{0}\}$$

Untuk suatu idempoten $e = \bar{0} \in Z_5$,

$$Z_5 e = Z_5\{\bar{0}\} = \{\bar{0}\}$$

Maka

$$l(\bar{1}) = Z_5 e, \text{ akibatnya } e\bar{1} = \bar{0} \text{ dan } \bar{0} = \bar{0}e$$

$$l(\bar{2}) = Z_5 e, \text{ akibatnya } e\bar{2} = \bar{0} \text{ dan } \bar{0} = \bar{0}e$$

$$l(\overline{3}) = Z_5e, \text{ akibatnya } e\overline{3} = \overline{0} \text{ dan } \overline{0} = \overline{0}e$$

$$l(\overline{4}) = Z_5e, \text{ akibatnya } e\overline{4} = \overline{0} \text{ dan } \overline{0} = \overline{0}e$$

Untuk suatu idempoten $e = \overline{1} \in Z_5$,

$$Z_5e = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}\}$$

Maka

$l(\overline{0}) = Z_5e$, akibatnya $e\overline{0} = \overline{0}$ dan $\overline{0} = \overline{0}e, \overline{1} = \overline{1}e, \overline{2} = \overline{2}e, \overline{3} = \overline{3}e, \overline{4} = \overline{4}e.$

Oleh karena itu ring $(Z_5, +, \cdot)$ merupakan p.p-ring.

Lemma 3.5

Jika ring R adalah ring semikomutatif maka R merupakan ring abelian.

Bukti:

Misalkan ring R adalah ring semikomutatif. Ambil suatu idempoten $e \in R$, perhatikan bahwa

$$e^2 = e$$

$$e - e^2 = 0$$

$$e(1 - e) = (1 - e)e = 0$$

Karena R adalah ring semikomutatif akibatnya untuk sembarang $a \in R$

$$ea(1 - e) = (1 - e)ae = 0$$

Sedemikian sehingga

$$ea(1 - e) = 0 \Leftrightarrow ea = eae$$

dan

$$(1 - e)ae = 0 \Leftrightarrow ae = eae$$

Oleh karena $ae = eae = ea$, artinya $ae = ea$. Berdasarkan **Definisi 3.1** jadi R merupakan ring abelian.

Lemma 3.6

Jika ring R merupakan ring abelian dan p.p-ring maka R suatu ring semikomutatif.

Bukti:

Misalkan R adalah ring abelian dan p.p-ring. Ambil sembarang $a, b \in R$ dengan $ba = 0$. Karena R adalah p.p-ring maka $b \in l_R(a) = Re$ untuk suatu idempoten $e \in R$ yang mengakibatkan $ea = 0$ dan $b = be$, ini berarti $Rea = 0$. Karena R adalah ring abelian maka $Rea = e$ 제$a = 0$. Dengan mengalikan b disisi kiri maka didapat $beRa = 0$, karena $b = be$ menyebabkan $bRa = 0$. Berdasarkan **Definisi 3.3** maka R merupakan ring semikomutatif.

Definisi 3.7(N Agayev, et al., 2009:235)

Suatu ring R disebut tereduksi jika R tidak memiliki elemen nilpotent taknol. Dengan kata lain untuk setiap $a, b \in R$, $ab = 0$ mengakibatkan $Rb \cap aR = 0$.

Contoh

Misalkan pada ring $(Z_6, +, \cdot)$, ambil $2,3 \in Z_6$, dengan $2 \cdot 3 = 0$. Sekarang perhatikan

$$(Z_6)2 = \{0,2,4\}$$

$$3(Z_6) = \{0,3\}$$

karena

$$(Z_6)2 \cap 3(Z_6) = \{0\}$$

Maka ring $(Z_6, +, \cdot)$ merupakan ring tereduksi.

Lemma 3.8

Jika ring R merupakan ring tereduksi maka R merupakan ring abelian.

Bukti:

Misalkan ring R merupakan ring tereduksi, ambil sembarang $a, b \in R$ dengan $ab = 0$, akan ditunjukan bahwa $aRb = 0$. Karena $ab = 0$ dapat ditunjukan bahwa $ba = 0$. Andai $ba \neq 0$ karena R ring tereduksi diperoleh ba bukan elemen nilpoten yang artinya $(ba)^n \neq 0, \forall n$. Ambil $n = 2$ artinya diperoleh $(ba)^2 = baba \neq 0$. Diketahui bahwa $ab = 0$ sehingga $(ba)^2 = baba = b0a = 0$ artinya ba merupakan elemen nilpoten. Karena R tereduksi sehingga seharusnya $ba = 0$, ini kontradiksi dengan $ba \neq 0$. Sekarang perhatikan bahwa

$$(aRb)^2 = aRbaRb = aR0Rb = 0$$

artinya aRb merupakan elemen nilpoten semikomutatif. Karena R tereduksi maka $aRb = 0$. Berdasarkan **Definisi 3.3,** R merupakan ring semikomutatif**.** Karena R ring semikomutatif berdasarkan **Lemma 3.5,** R merupakan ring abelian.

Lemma 3.9

Jika ring R merupakan p.p-ring dan ring abelian maka R adalah ring tereduksi.

Bukti:

Misalkan R merupakan ring abelian dan p.p-ring. Ambil sembarang $a, b \in R$ dengan $ab = 0$ karena R suatu p.p-ring maka $a \in l_R(b) = Re$ untuk suatu idempoten $e \in R$ mengakibatkan $eb = 0$ dan $a = ae$. Ambil

$x \in Rb \cap aR$ akan ditunjukkan bahwa $x = 0$. Karena $x \in Rb \cap aR$ maka $x = r_1 b = ak_1$ ada suatu $r_1 \in R$ dan $k_1 \in R$, Perhatikan bahwa,

$\underline{x = r_1 b = ak_1 \qquad \times e}$

$ex = er_1 b = eak_1$,

$xe = r_1 eb = aek_1$, Karena R ring abelian,

$= r_1 eb = aek_1 = ak_1 = 0$, Karena $eb = 0$, $a = ae$

Didapat $ak_1 = 0$, sehingga $x = r_1 b = ak_1 = 0$. Oleh karena itu $Rb \cap aR = 0$ jadi R adalah ring tereduksi.

Definisi 3.10 (N Agayev, et al., 2010:465)

Diberikan suatu ring R, didefinisikan polinom perluasan atas R sebagai berikut:

$$R[x] = \left\{ \sum_{i=0}^{s} a_i x^i \ , s \geq 0, a_i \in R \right\}.$$

Polinom deret pangkat perluasan atas R sebagai berikut

$$R[[x]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \ , a_i \in R \right\}.$$

Contoh

Misalkan pada ring $(Z_n, +, \cdot)$, polinom perluasan atas Z_n adalah

$$f(x) = b_0 + b_1 x^1 + \ ... + b_m x^m \ \in Z_n[X]$$

dengan $b_i \in Z_n$. Polinom deret pangkat perluasan atas Z_n adalah

$$f(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ ... + a_n x^n + \ ... \ \in Z_n[[X]]$$

dengan $a_i \in Z_n$.

Definisi 3.11(N Agayev, et al., 2010:468)

Suatu ring R disebut armendariz jika untuk setiap $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x^i \in R[x]$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j , \in R[x],\ a_i, b_j \in R$ dengan $f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0, \forall\, i, j$. Suatu ring R disebut armendariz deret pangkat jika untuk setiap $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x^i \in R\big[[x]\big]$ dan $g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} b_j x^j , \in R\big[[x]\big],\ f(x)g(x) = 0$ maka $a_i b_j = 0, \forall\, i, j$.

Contoh:

Misalkan pada polinom perluasan atas ring $(Z_6, +, \cdot)$, ambil $f(x) = a_0 + a_1 x + \ \dots + a_n x^{\text{捯}}$ dan $g(x) = b_0 + b_1 x + \ \dots + b_m x^m$ dengan $f(x)g(x) = 0$ dimana $f(x), g(x) \in Z_6[X]$.

Karena

$$f(x)g(x) = 0$$

$$(a_0 + a_1 x + \ \dots + a_n x^n)(b_0 + b_1 x + \ \dots + b_m x^m) = 0$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \ \dots + (a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \ \dots + a_t b_0)x^r = 0$$

Akibatnya,

1. $a_0 b_0 = 0$
2. $(a_0 b_1 + a_1 b_0) = 0$

   $\vdots$

3. $(a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \ \dots + a_t b_0) = 0$

Dari 1) didapat $a_0 b_0 = 0$, berdasarkan contoh **Definisi 3.7** Z_6 merupakan ring tereduksi maka $b_0 a_0 = 0$. Selanjutnya perhatikan persamaan 2),

$\underline{a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0 \quad \times b_0}$

$b_0 a_0 b_1 + b_0 a_1 b_0 = 0$

$0 + b_0 a_1 b_0 = 0$

$b_0 a_1 b_0 = 0$

Karena $(a_1 b_0)^2 = a_1 b_0 a_1 b_0 = a_1\, 0 = 0$, artinya $a_1 b_0$ adalah elemen nilpoten. Karena Z_6 ring tereduksi maka $a_1 b_0 = 0$. Selanjutnya subtitusikan $a_1 b_0 = 0$ ke persamaan 2) didapat $a_0 b_1 = 0$. Untuk persamaan selanjutnya penyelesaian sama seperti kasus sebelumnya. Sehingga diperoleh $a_i b_j = 0$, $\forall\, a_i, b_j \in Z_6$.

Lemma 3.12

Jika R merupakan ring armendariz maka R adalah ring abelian.

Bukti:

Misalkan\`$g_1(x), g_2(x)$ polinomial atas ring R dengan $g_1(x) = e - er(1-e)x + 0x^2 + \ldots + 0x^t$, $g_2(x) = (1-e) - (1-e)rex + 0x^2 + \ldots + 0x^t \in R[x]$ dan $f_1(x), f_2(x)$ polinomial atas R dengan $f_1(x) = (1-e) + er(1-e)x + 0x^2 + \ldots + 0x^s$, $f_2(x) = e + (1-e)rex + 0x^2 + \ldots + 0x^s \in R[x]$ dimana e suatu idempoten di R, dan $r \in R$. Karena R suatu ring armendariz artinya

$$f_1(x) g_1(x) = 0$$

$$\big((1-e) + er(1-e)x + 0x^2 + \ldots + 0x^s\big)(e - er(1-e)x + 0x^2 + \ldots + 0x^t) = 0$$

$$\big((1-e) + er(1-e)x\big)(e - er(1-e)x) = 0$$

$$(1-e)e - (1-e)(er(1-e)x) + (er(1-e)ex) - (er(1-e)x\, er(1-e)x) = 0$$

$$-(er(1-e)x\, er(1-e)x) = 0$$

$$\big(er(1-e)\big)^2 x^2 = 0$$

sehingga

$$\left(er(1-e)\right)^2 = 0 \iff er(1-e) = 0 \iff er = ere$$

dan

$$f_2(x)g_2(x) = 0$$

$$(e + (1-e)rex + 0x^2 + \ \dots + 0x^s)\left((1-e) - (1- \cancel{X}\cancel{X})rex + 0x^2 + \ \dots + 0x^t\right)$$
$$= 0$$

$$(e + (1-e)rex)\left((1-e) - (1-e)rex\right) = 0$$

$$e(1-e) - e(1-e)rex + \left((1-e)rex(1-e)\right) - \left((1-e)rex(1-e)rex\right) = 0$$

$$-\left((1-e)rex(1-e)rex\right) = 0$$

$$\left((1-e)re\right)^2 x^2 = 0$$

Sehingga

$$\left((1-e)re\right)^2 = 0 \Leftrightarrow (1-e)re = 0 \Leftrightarrow re = ere$$

Oleh karena $er = ere$ dan $ere = re$ maka $er = re$ jadi R merupakan ring abelian.

Lemma 3.13

Jika R adalah $p.p.$-ring dan ring abelian maka R adalah ring armendariz.

Bukti:

Misalkan R adalah ring abelian dan p.p-ring. Untuk suatu $a, b \in R$, dan suatu idempoten $e \in R$ didapat $eab = aeb$. Berdasarkan **Lemma 3.6,** R suatu ring semikomutatif artinya $ab = 0$ mengakibatkan $aRb = 0$, untuk suatu $a, b \in R$. Misalkan $g(x) = \sum_{j=0}^{s} b_j x^j \in R[x]$ dan $f(x) = \sum_{i=0}^{t} a_i x^i \in R[x]$, $a_i, b_j \in R$.

Asumsikan

$$f(x)g(x) = 0$$

$$(a_0 + a_1x + \ \dots + a_tx^t)(b_o + b_1x + \ \dots + b_sx^s) = 0$$

$$a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + \ \dots + (a_0b_s + a_1b_{s-1} + \ \dots + a_tb_0)x^n = 0$$

Akibatnya,

1. $a_0b_0 = 0$
2. $a_0b_1 + a_1b_0 = 0$
3. $a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0$

$\vdots$

Dari 1) didapat bahwa $a_0b_0 = 0$, karena R suatu p.p-ring, $a_0 \in l(b_0) = Re$ untuk suatu idempoten $e_0 \in R$, mengakibatkan $e_0b_0 = 0$ dan $a_0e_0 = a_0$. Perhatikan 2) ,

$\underline{a_0b_1 + a_1b_0 = 0, \quad \times e_0}$

$e_0a_0b_1 + e_0a_1b_0 = 0,$

$a_0e_0b_1 + a_1e_0b_0 = 0$, karena R ring abelian

$a_0b_1 + 0 = 0$, karena $e_0b_0 = 0$ dan $a_0e_0 = a_0$

$a_0b_1 = 0$

Subtitusikan $a_0b_1 = 0$, ke persamaan 2) sehingga $a_1b_0 = 0$.

Didapat bahwa $a_0b_1 = 0$ dan $a_1b_0 = 0$, karena R suatu p.p-ring, $a_0 \in l(b_1) = Re$ untuk suatu idempoten $e_1 \in R$, yang mengakibatnya $e_1b_1 = 0$, $a_0e_1 = a_0$, dan $a_1 \in l(b_0) = Re$ untuk suatu idempoten $e_0 \in R$, yang mengakibatnya $e_0b_0 = 0$, $a_1e_0 = a_1$. Sekarang perhatikan 3),

$\underline{a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0 = 0 , \qquad \times e_1e_0}$

$e_1e_0a_0b_2 + e_1e_0a_1b_1 + e_1e_0a_2b_0 = 0,$

$a_0e_1e_0b_2 + a_1e_1e_0b_1 + a_2e_1e_0b_0 = 0,$ karena R ring abelian

$a_0e_0b_2 + e_0a_1e_1b_1 + 0 = 0$, karena R ring abelian, $e_0b_0 = 0$, $a_0e_1 = a_0$

$a_0b_2 + 0 + 0 = 0$, karena $a_0e_0 = a_0$, $e_1b_1 = 0$

$a_0b_2 = 0$

Subtitusikan $a_0b_2 = 0$ ke persamaan 3) sehingga menjadi $a_1b_1 + a_2b_0 = 0$. Sekarang perhatikan bahwa,

$\underline{a_1b_1 + a_2b_0 = 0, \quad \times e_0}$

$e_0a_1b_1 + e_0a_2b_0 = 0,$

$a_1e_0b_1 + a_2e_0b_0 = 0,$ karena R ring abelian

$a_1b_1 + 0 = 0$, karena $e_0b_0 = 0$, $a_1e_0 = a_1$

$a_1b_1 = 0$

Subtitusikan $a_1b_1 = 0$ ke persamaan $a_1b_1 + a_2b_0 = 0$ maka $a_2b_0 = 0$

Berdasarkan 1), 2) dan 3) dapat dilanjutkan dengan langkah yang serupa sehingga diperoleh $a_ib_j = 0$, $\forall\ 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq s$. Oleh karena itu R merupakan ring armendariz.

Akibat 3.14

Jika R adalah ring armendariz deret pangkat maka R adalah ring abelian.

Bukti:

Misalkan` $g_1(x), g_2(x)$ polinomial atas ring R dengan $g_1(x) = e - er(1-e)x + 0x^2 + \dots$, $g_2(x) = (1-e) - (1-e)rex + 0x^2 + \dots \in R[[x]]$ dan $f_1(x), f_2(x)$ polinomial atas R dengan $f_1(x) = (1-e) +$

$er(1-e)x + 0x^2 + \ ...,$ $\qquad f_2(x) = e + (1-e)rex + 0x^2 + \ ... \ \in R[[x]]$

dimana e suatu idempoten di R, dan $r \in R$. Karena R suatu ring armendariz artinya

$$f_1(x)g_1(x) = 0$$

$$\big((1-e) + er(1-e)x + 0x^2 + \cdots + 0x^s + \ ...\big)(e - er(1-e)x + 0x^2 + \cdots + 0x^t + ..) = 0$$

$$\big((1-e) + er(1-e)x\big)(e - er(1-e)x) = 0$$

$$(1-e)e - (1-e)(er(1-e)x) + (er(1-e)ex) - (er(1-e)x\, er(1-e)x) = 0$$

$$-(er(1-e)x\, er(1-e)x) = 0$$

$$\big(er(1-e)\big)^2 x^2 = 0$$

sehingga

$$\big(er(1-e)\big)^2 = 0 \iff er(1-e) = 0 \iff er = ere$$

dan

$$f_2(x)g_2(x) = 0$$

$$(e + (1-e)rex + 0x^2 + \cdots + 0x^s + \cdots)\big((1-e) - (1-e)rex + 0x^2 + \cdots + 0x^t + \cdots\big) = 0$$

$$(e + (1-e)rex)\big((1-e) - (1-e)rex\big) = 0$$

$$e(1-e) - e(1-e)rex + \big((1-e)rex(1-e)\big) - \big((1-e)rex(1-e)rex\big) = 0$$

$$-\big((1-e)rex(1-e)rex\big) = 0$$

$$\big((1-e)re\big)^2 x^2 = 0$$

Sehingga

$$\big((1-e)re\big)^2 = 0 \iff (1-e)re = 0 \iff re = ere$$

Oleh karena $er = ere$ dan $ere = re$ maka $er = re$ jadi R merupakan ring abelian.

Lemma 3.15

Jika R adalah $p.p.$-ring dan ring abelian maka R adalah ring armendariz deret pangkat.

Bukti:

Misalkan R adalah ring abelian dan p.p-ring. Berdasarkan **Lemma 3.6,** R suatu ring semikomutatif artinya $ab = 0$ mengakibatkan $aRb = 0$, untuk suatu $a, b \in R$. Misalkan $g(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_j x^i \in R[[x]]$ dan $f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_i x^j \in R[[x]]$, $a_i, b_j \in R$.

Asumsikan

$$f(x)g(x) = 0$$

$$(a_0 + a_1 x + \ldots)(b_o + b_1 x + \ldots) = 0$$

$$a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + \ldots + (a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \ldots + a_t b_0)x^n + \ldots = 0$$

Akibatnya,

1. $a_0 b_0 = 0$
2. $a_0 b_1 + a_1 b_0 = 0$
3. $a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0 = 0$

   $\vdots$

4. $a_0 b_s + a_1 b_{s-1} + \ldots + a_t b_0 = 0$

   $\vdots$

Berdasarkan **Lemma 3.13** telah ditunjukan bahwa $a_i b_j = 0,\ \forall\, 1 \le i \le t, 1 \le j \le s$. Selanjutnya akan ditunjukan bahwa $a_0 b_{s+1} + a_1 b_s + \ \dots\ + a_{t+1} b_0 = 0$ mengakibatkan $a_i b_j = 0,\ \forall\, 1 \le i \le t+1, 1 \le j \le s+1$.

Karena $a_i b_j = 0,\ \forall\, 1 \le i \le t, 1 \le j \le s$ dan R merupakan pp-ring maka

$a_0 \in l(b_0) = Re_0$, untuk suatu idempoten $e_0 \in R$,

$a_0 \in l(b_1) = Re_1$, untuk suatu idempoten $e_1 \in R$,

$\vdots$

$a_0 \in l(b_s) = Re_s$, untuk suatu idempoten $e_s \in R$,

$a_1 \in l(b_0) = \ \square e_0$, untuk suatu idempoten $e_0 \in R$

$a_1 \in l(b_1) = Re_0$, untuk suatu idempoten $e_1 \in R$

$\vdots$

$a_t \in l(b_0) = Re_0$, untuk suatu idempoten $e_0 \in R$

mengakibatkan

$$a_0 e_0 = a_0 \text{ dan } e_0 b_0 = 0$$

$$a_0 e_1 = a_0 \text{ dan } e_1 b_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$a_0 e_s = a_0 \text{ dan } e_s b_s = 0$$

$$a_1 e_0 = a_1 \text{ dan } e_0 b_0 = 0$$

$$a_1 e_1 = a_1 \text{ dan } e_{11} b_1 = 0$$

$$\vdots$$

$$a_t e_0 = a_t \text{ dan } e_0 b_0 = 0$$

Sekarang perhatikan bahwa,

$$a_0 b_{s+1} + a_1 b_s + \ \dots\ + a_{t+1} b_0 = 0$$

kalikan dengan $e_0e_1 \ldots e_s$

$$e_0e_1 \ldots e_sa_0b_{s+1} + e_0e_1 \ldots e_sa_1b_s + \ldots + e_0e_1 \ldots e_sa_{t+1}b_0 = 0$$

karena R ring abelian,

$$a_0e_0e_1 \ldots e_sb_{s+1} + a_1e_0 \square_1 \ldots e_sb_s + \ldots + a_{t+1}e_0e_1 \ldots e_sb_0 = 0$$

karena R ring abelian dan pp-ring,

$$a_0e_0e_1 \ldots e_sb_{s+1} + e_0e_1 \ldots a_1e_sb_s + \ldots + 0 = 0$$

karena R ring abelian dan pp-ring,

$$a_0e_0e_1 \ldots e_sb_{s+1} + 0 + \ldots + 0 = 0$$

Karena R suatu p.p-ring,

$$a_0b_{s+1} = 0$$

Subtitusikan $a_0b_{s+1} = 0$ ke $a_0b_{s+1} + a_1b_s + \ldots + a_{t+1}b_0 = 0$ sehingga menjadi $a_1b_s + \ldots + a_{t+1}b_0 = 0$. Dengan cara yang serupa dengan kasus sebelumnya maka akan didapat $a_ib_j = 0,\ \forall\ 1 \le i \le t+1, 1 \le j \le s+1$dan berlaku untuk $a_ib_j = 0,\ \forall\ 1 \le i \le \infty, 1 \le j \le \infty$.

Definisi 3.16(N Agayev, et al., 2010:470)

Suatu ring R disebut ring simetrik, jika $abc = 0$ akibatnya $bac = 0$, untuk setiap $a, b, c \in R$.

Contoh

Misalkan pada ring $(Z_6, +, \cdot)$, ambil $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3} \in Z_6$ dengan $\overline{1} \cdot \overline{2} \cdot \overline{3} = 0$. Karena $\overline{2} \cdot \overline{1} \cdot \overline{3} = 0$ sedemikian sehingga ring $(Z_6, +, \cdot)$ merupakan ring simetrik.

Lemma 3.17

Jika ring R merupakan ring simetrik maka R merupakan ring abelian.

Bukti:

Misalkan R merupakan ring simetrik. Untuk suatu idempoten $e \in R$ perhatikan bahwa,

$$e^2 = e$$

$$e - e^2 = 0$$

$$(1 - e)e = e(1 - e) = 0$$

Untuk suatu $a \in R$

$$a(1 - e)e = ae(1 - e) = 0$$

Karena R suatu ring simetrik maka

$$(1 - e)ae = 0 \iff ae = eae$$

dan

$$ea(1 - e) = 0 \iff eae = ea$$

Oleh karena $ae = eae = ea$, maka R merupakan ring abelian.

Lemma 3.18

Jika R merupakan p.p-ring dan ring abelian maka R adalah ring simetrik.

Bukti:

Misalkan R merupakan ring abelian dan p.p-ring. Ambil sembarang $a, b, c \in R$ dengan $abc = 0$, karena R suatu p.p-ring maka $a \in l_R(bc) = Re$, untuk suatu idempoten $e \in R$ mengakibatkan $ebc = 0$ dan $a = ae$. Berdasarkan **Lemma 3.6** R merupakan ring semikomutatif sehingga didapat $ebRc = 0$. Untuk $a \in R$ perhatikan bahwa,

$ebRc = ebac$

$\quad = baec$ Karena R abelian

$= bac$ Karena $ae = a$

$= 0$

Oleh karena $bac = 0$, maka R merupakan ring simetrik.

Teorema 3.19

Misalkan suatu ring R merupakan p.p-ring. Pernyataan berikut ekuivalen:

1. R adalah ring tereduksi
2. R adalah ring simetrik
3. R adalah ring semikomutatif
4. R adalah ring armendariz
5. R adalah ring armendariz deret pangkat
6. R adalah ring abelian

Bukti:

$1 \Longrightarrow 2$

Misalkan R merupakan ring tereduksi dan p.p-ring. Karena R merupakan ring tereduksi berdasarkan **Lemma 3.8** maka R merupakan ring abelian. Ambil sembarang $a, b, c \in R$ dengan $abc = 0$, karena R suatu p.p-ring maka $a \in l_R(bc) = Re$, untuk suatu idempoten $e \in R$ mengakibatkan $ebc = 0$ dan $a = ae$. Karena R ring tereduksi berdasarkan pembuktian **Lemma 3.8** maka R merupakan ring semikomutatif sehingga didapat $ebRc = 0$. Untuk $a \in R$ perhatikan bahwa,

$ebRc = ebac$

$= baec$ Karena R abelian

$= bac$ Karena $ae = a$

$= 0$

Oleh karena $bac = 0$, maka R merupakan ring simetrik.

$2 \Longrightarrow 3$

Misalkan R adalah ring simetrik dan p.p-ring. Ambil sembarang $a, b \in R$ dengan $ba = 0$. Karena R adalah p.p-ring maka $b \in l_R(a) = Re$ untuk suatu idempoten $e \in R$ yang mengakibatkan $ea = 0$ dan $b = be$, ini berarti $Rea = 0$. Karena R adalah ring simetrik berdasarkan **Lemma 3.17** maka R merupakan ring abelian. Sehingga $Rea = eRa = 0$. Dengan mengalikan b disisi kiri maka didapat $beRa = 0$, karena $b = be$ menyebabkan $bRa = 0$. Berdasarkan **Definisi 3.3** jadi R merupakan ring semikomutatif.

$3 \Longrightarrow 4$

Misalkan R merupakan ring semikomutatif dan p.p-ring. Karena R merupakan ring semikomutatif berdasarkan **Lemma 3.5** maka R merupakan ring abelian. karena R merupakan ring abelian dan p.p-ring Berdasarkan **Lemma 3.13** maka R merupakan ring armendariz. Sehingga Untuk sembarang $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1 x + \ldots + b_m x^m$ dengan $f(x) \cdot g(x) = 0$ dimana $f(x)g(x) \in R[X]$. maka $a_i b_j = 0, \forall\, i, j,$

$4 \Longrightarrow 5$

Misalkan R merupakan ring armendariz dan p.p-ring. Karena R merupakan ring armendariz berdasarkan **Lemma 3.12** maka R merupakan ring abelian. Karena R merupakan ring abelian dan p.p-ring berdasarkan **Akibat 3.15** R merupakan ring armendariz deret pangkat. Sehingga untuk sembarang

$f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ dan $g(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_mx^m$ dengan $f(x) \cdot m(x) = 0$ dimana $f(x)g(x) \in R[[X]]$. maka $a_ib_j = 0$, $\forall\, 1 \leq i \leq \infty, 1 \leq j \leq \infty$

$5 \Longrightarrow 6$

Misalkan R merupakan ring armendariz deret pangkat dan p.p-ring. Berdasarkan **Akibat 3.14** maka R merupakan ring abelian

$6 \Longrightarrow 1$

Misalkan R merupakan ring abelian dan p.p-ring , berdasarkan **Lemma 3.9** maka R merupakan ring tereduksi.